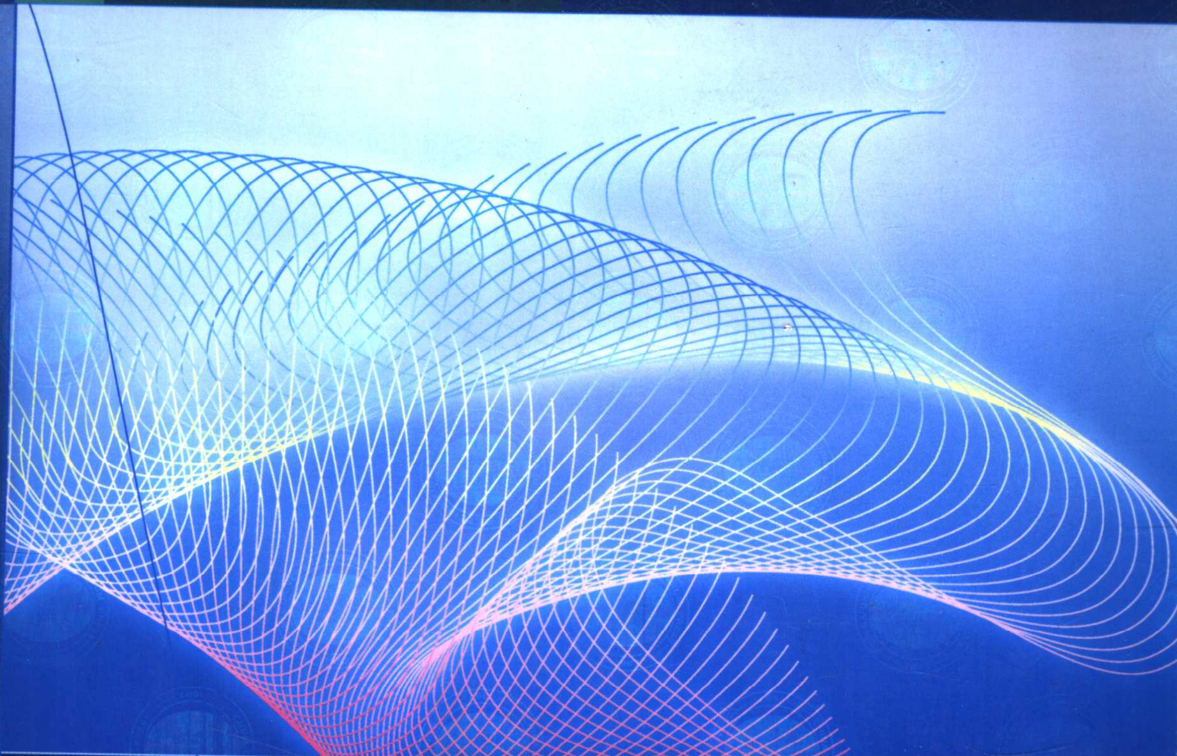
高职高专教材



高等数学

（下册）

□ 主编　张传宝　刘德厚　任丽华

中国石油大学出版社

高职高专教材

高等数学

（下册）

主　编　张传宝　刘德厚　任丽华

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/张传宝主编. —东营:中国石油大学出版社,2006.10

ISBN 7-5636-2251-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. 张… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 078841 号

书　　名:高等数学(下册)

主　　编:张传宝　刘德厚　任丽华

责任编辑:刘玉兰(电话 0546—8391810)

出 版 者:中国石油大学出版社(山东 东营,邮编 257061)

网　　址:http://www.uppbook.com.cn

电子信箱:eyi0213@hdpu.edu.cn

排 版 者:中国石油大学出版社排版中心

印 刷 者:沂南县汇丰印刷有限公司

发 行 者:中国石油大学出版社(电话 0546—8392062)

开　　本:180×235　印张:19.25　字数:399 千字

版　　次:2006 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

定　　价:23.80 元

前　言

随着高等职业技术教育的发展，数学作为一门基础技术越来越受到重视，但是传统的数学教育已远远不能适应时代的发展，新的数学教育要求不仅要教给学生数学知识，还要培养学生应用数学的意识、兴趣和能力，使学生能用数学的思维方法分析并借助于计算机解决实际问题。为了适应高等职业教育的发展，我们组织了本教材的编写。本教材针对高等职业教育的培养目标和各专业对数学课的基础要求，主要体现了以下几个特点：

1° 对于基本概念和基本理论，注重背景材料的引入和直观阐述，推理简洁，避免面面俱到的复杂论证。

2° 加强了应用性计算的比重，本教材介绍了高等教学的基本公式和基本方法，但重点放在了如何应用方面。

3° 本教材上下两册共 19 章，分为四个数学知识模块：微积分学（1～11 章）、线性代数（12～13 章）、概率论初步（14～16 章）、离散数学（17～19 章）。其中第一、二模块理工各专业统修；第三模块为工业工程、农业工程各专业必修课；第四模块为计算机各专业必修课，是计算机等级考试内容。

4° 为适应专升本的要求，本教材在第 9 章安排了空间解析几何内容。它既是专升本必考内容，又是多元函数微积分第 10、11 章的基础。

本教材第 1 章由解玖霞编写，第 2～6 章由任丽华编写，第 7、8、14～16 章由刘德厚编写，第 9～11 章由刘德厚、董秀红编写，第 12、13 章由杨蕊、吕娜编写，第 17～19 章由张传宝编写。最后由刘德厚、张传宝、任丽华统稿。

本教材经过两届学生的试用，在广泛征求教师和学生意见的基础上进行了修订，其中第 1～16 章由刘德厚修订，第 17～19 章由张传宝修订。

中国石油大学王子亭教授、宋光兴教授，曲阜师范大学刘立山教授仔细审阅了该书稿并提出了宝贵意见，在此一并表示衷心的感谢！

由于水平有限，教材中难免有不足之处，恳请广大师生批评指正。

编　者

2006 年 6 月

目　录

第 9 章　向量代数与空间解析几何 ······ (1)

§ 9-1　空间直角坐标系 ······ (1)

一、空间直角坐标系(1)　二、空间两点间的距离公式(2)

习题 9-1(2)

§ 9-2　空间向量 ······ (3)

一、向量与向量的线性运算(3)　二、向量的坐标表示(5)　三、向量的乘法运算(7)　习题 9-2(11)

§ 9-3　平面与直线 ······ (12)

一、点的轨迹方程的概念(12)　二、平面(13)　三、直线(16)　四、平面、直线间的夹角(19)　五、点到平面的距离(20)　习题 9-3(21)

§ 9-4　曲面与曲线 ······ (22)

一、几种常见的曲面及其方程(23)　二、曲线(25)　习题 9-4(27)

第 10 章　多元函数微分 ······ (28)

§ 10-1　多元函数的概念、极限和连续性 ······ (28)

一、区域(28)　二、二元函数(28)　习题 10-1(32)

§ 10-2　偏导数 ······ (33)

一、多元函数的偏导数(33)　二、高阶偏导数(35)　习题 10-2(36)

§ 10-3　全微分 ······ (37)

习题 10-3(39)

§ 10-4　复合函数的求导法则 ······ (40)

一、多元复合函数的求导法则(40)　二、隐函数的求导法则(44)

习题 10-4(45)

§ 10-5　偏导数在几何上的应用 ······ (46)

一、空间曲线的切线与法平面(46)　二、曲面的切平面与法线(48)

习题10-5(50)

§ 10-6　多元函数的极值 ······ (51)

一、最大值和最小值(51)　二、条件极值(54)　习题10-6(55)

第 11 章　多元函数积分学 ······ (56)

§ 11-1　二重积分 ······ (56)

一、二重积分的概念(56) 二、二重积分的性质(57) 习题 11-1(58)
§11-2 二重积分的计算法 …… (59)
一、利用直角坐标计算二重积分(59) 二、利用极坐标计算二重积分(64) 习题 11-2(67)
§11-3 二重积分的应用 …… (68)
一、求体积(68) 二、求曲面的面积(70) *三、求质量与重心(72) 习题 11-3(73)
*§11-4 三重积分的概念和计算 …… (74)
一、三重积分的概念(74) 二、三重积分的计算(74) 习题 11-4(79)
§11-5 平面曲线积分 …… (79)
一、对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)(79) 二、对坐标的曲线积分(第二类曲线积分)(81) 习题 11-5(85)
§11-6 格林公式 …… (85)
一、格林(Green)公式(85) 二、曲线积分与路径无关的条件(87) 习题 11-6(87)
第12章 行列式与矩阵 …… (91)
§12-1 行列式 …… (91)
一、二阶行列式(91) 二、三阶行列式(92) 三、n阶行列式(94) 习题 12-1(95)
§12-2 行列式的性质 …… (95)
习题 12-2(99)
§12-3 克莱姆(Caramer)法则 …… (100)
习题 12-3(101)
§12-4 矩阵及其运算 …… (101)
一、矩阵的概念(101) 二、矩阵的运算(103) 习题 12-4(107)
§12-5 逆矩阵 …… (108)
一、逆矩阵的概念(108) 二、逆矩阵的性质(109) 三、逆矩阵存在的充要条件(110) 习题 12-5(112)
§12-6 矩阵的秩与初等变换 …… (112)
一、矩阵的秩(112) 二、矩阵的初等变换(114) 三、利用初等行变换求矩阵的秩(115) 四、利用初等行变换求逆矩阵(116) 习题 12-6(117)
第13章 线性方程组 …… (118)
§13-1 消元法 …… (118)
习题 13-1(125)

§13-2　线性方程组解的情况判定 …… (126)
习题 13-2(129)
§13-3　n 维向量及向量组的线性相关性 …… (130)
一、n 维向量的概念(130)　二、n 维向量间的线性关系(131)　三、向量组的线性相关性的判定(133)　习题 13-3(135)
§13-4　向量组的秩 …… (135)
习题 13-4(140)
§13-5　线性方程组解的结构 …… (141)
一、齐次线性方程组解的结构(141)　二、非齐次线性方程组解的结构(143)　习题 13-5(145)
第 14 章　随机事件与概率 …… (149)
14-1　随机事件 …… (149)
一、随机现象与随机事件(149)　二、事件间的关系和运算(151)　三、事件间的关系和运算的性质(153)　习题 14-1(154)
§14-2　随机事件的概率 …… (154)
一、概率的统计定义(155)　二、古典概型(157)　习题 14-2(158)
§14-3　随机事件概率的计算 …… (159)
一、加法公式(159)　二、条件概率和乘法公式(161)　三、全概率公式(164)　习题 14-3(165)
§14-4　伯努利概型 …… (166)
一、事件的独立性(166)　二、伯努利概型(169)　习题 14-4(170)
第 15 章　随机变量及其数字特征 …… (171)
§15-1　随机变量及其分布 …… (171)
一、随机变量的概念(171)　二、离散型随机变量(172)　三、连续型随机变量(173)　四、分布函数(174)　五、随机变量函数的分布(177)
习题 15-1(179)
§15-2　几种常见随机变量的分布 …… (180)
一、几种常见的离散型随机变量的分布(180)　二、几种常见的连续型随机变量的分布(182)　习题 15-2(183)
§15-3　正态分布 …… (184)
一、正态分布(184)　二、标准正态分布(184)　三、非标准正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的概率的计算(186)　* 四、二项分布的正态近似计算(187)
习题 15-3(188)
§15-4　随机变量的数字特征 …… (188)
一、数学期望(188)　二、方差(190)　三、期望与方差的性质(191)

习题 15-4(192)

第 16 章 统计推断 …… (193)

§ 16-1 总体、样本、统计量 …… (193)

一、总体和样本(193) 二、统计量(194) 三、重要的特征数(195)

习题 16-1(197)

§ 16-2 抽样分布 …… (197)

一、χ^2 公布(198) 二、t 分布(200) 习题 16-2(201)

§ 16-3 参数的点估计 …… (201)

一、矩估计法(201) 二、最大似然估计法(203) 三、估计量的评价准则(206) 习题 16-3(208)

§ 16-4 区间估计 …… (208)

一、置信区间与置信度(208) 二、数学期望的区间估计(209) * 三、方差 σ^2 的区间估计(211) 习题 16-4(213)

§ 16-5 假设检验 …… (213)

一、假设检验问题(213) 二、正态总体的假设检验问题(215)

习题 16-5(219)

第 17 章 集 合 …… (223)

§ 17-1 集合的基本概念 …… (223)

§ 17-2 集合的运算 …… (225)

一、集合的并运算(225) 二、集合的交运算(226) 三、集合的减运算(227) 四、集合的对称差(228) 习题 17-2(228)

§ 17-3 二元关系 …… (229)

一、集合的笛卡儿乘积(230) 二、二元关系的定义(230) 三、关系的表示方法(232) 四、关系的基本类型(235) 五、等价关系与划分(237)

习题 17-3(240)

§ 17-4 函 数 …… (241)

一、函数的定义(241) 二、特殊函数(243) 习题 17-4(244)

第 18 章 数理逻辑 …… (246)

§ 18-1 命题逻辑 …… (246)

一、命题与联结词(246) 二、真值表与逻辑等价(249) 三、永真蕴含式(252) 四、推理理论(253) 习题 18-1(256)

§ 18-2 谓词逻辑 …… (257)

一、谓词与量词(258) 二、谓词公式与变元约束(260) 三、谓词演算的等价式与永真蕴含式(262) 习题 18-2(266)

第 19 章 图 论 …… (268)

§19-1　图的基本概念 …………………………………………………… (268)
§19-2　通路与赋权图的最短通路 …………………………………………… (272)
　　一、通路与回路(272)　二、赋权图的最短通路(273)
§19-3　图与矩阵 …………………………………………………………… (274)
§19-4　欧拉图与哈密顿图 ……………………………………………… (277)
　　一、欧拉图(277)　二、哈密顿图(279)
§19-5　二部图与平面图 ………………………………………………… (280)
　　一、二部图(280)　二、平面图(283)
§19-6　树 …………………………………………………………………… (286)
　　一、无向树(286)　二、有向树(287)　习题 19(292)
附表 1　标准正态分布数值表 ……………………………………………… (296)
附表 2　χ^2 分布临界值表 ………………………………………………… (297)
附表 3　t 分布临界值表 …………………………………………………… (298)

第 9 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何与平面解析几何一样，也是用代数的方法研究空间图形的一门学科，它在其他学科中应用非常广泛，且是学习多元函数微积分学的基础，因此，在学习多元函数微积分之前，先介绍空间解析几何的知识.

§9-1　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

三条相交于原点 O、两两垂直、具有相同的长度单位、其方向符合右手法则的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，构成空间直角坐标系 $Oxyz$，点 O 称为坐标原点，x 轴、y 轴和 z 轴分别称为横轴、纵轴和竖轴(或立轴)，统称为坐标轴. 所谓右手法则，即以右手握住 z 轴，大拇指的指向是 z 轴的正方向，再伸开右手的四个手指指向 x 轴正方向，然后四指自然弯曲 $\frac{\pi}{2}$ 弧度时，四指的指向是 y 轴正方向，如图 9-1-1 所示.

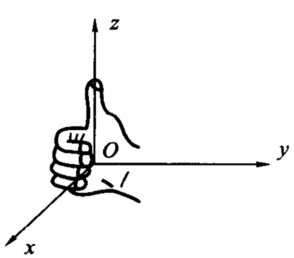


图 9-1-1

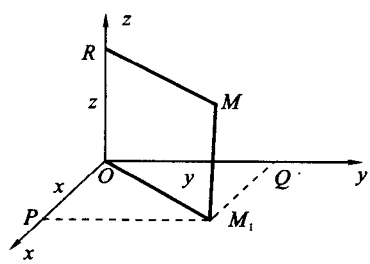


图 9-1-2

由任意两条坐标轴确定的平面称为坐标平面(简称坐标面)，这样由三条坐标轴确定的坐标平面分别称为 xOy 面，yOz 面和 zOx 面.

对于空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的任意一点 M，可用类似平面直角坐标系的方法来规定 M 的空间直角坐标. 如图 9-1-2 所示，过点 M 作 xOy 面的垂线，交 xOy 面于点 M_1，作 $M_1P \perp Ox$ 交 x 轴于点 P、$M_1Q \perp Oy$ 交 y 轴于点 Q，连接 OM_1，作 $MR \parallel OM_1$ 交 z 轴于点 R，则点 P、Q、R 分别是点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影，设有向线段 OP、OQ、OR 的数量分别为 x、y、z，于是点 M 唯一地确定一个有序数组 x,y,z. 反之，给定

有序数组 x,y,z，总能在三条坐标轴上找到与之对应的点 P,Q,R，使 $OP=x,OQ=y,OR=z$. 过点 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴，y 轴，z 轴的平面，三个平面必然交于点 M. 由此可见，点 M 和有序数组 x,y,z 之间存在一一对应关系. 有序数组 x,y,z 称为点 M 的坐标，其中 x 称为横坐标，y 称为纵坐标，z 称为竖(或立)坐标，这时点 M 可记作 $M(x,y,z)$.

三个坐标平面把空间分隔成八个部分，每个部分称为一个卦限，依次称为第一至八卦限，八个卦限中点的坐标符号依次为：

Ⅰ(＋,＋,＋)　　Ⅱ(－,＋,＋)

Ⅲ(－,－,＋)　　Ⅳ(＋,－,＋)

Ⅴ(＋,＋,－)　　Ⅵ(－,＋,－)

Ⅶ(－,－,－)　　Ⅷ(＋,－,－)

二、空间两点间的距离公式

设点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，过点 M_1 和 M_2 分别作垂直于 x,y,z 轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(如图 9-1-3)，容易看到，该长方体的各棱长分别为

$$|x_2-x_1|,\ |y_2-y_1|,\ |z_2-z_1|.$$

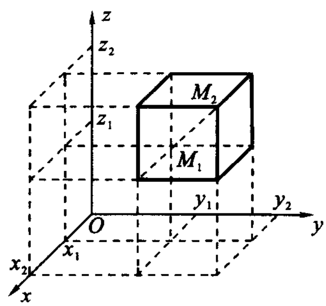


图 9-1-3

根据立体几何知识，长方体的对角线长的平方等于三条棱长的平方和，于是有

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

所以点 M_1 和 M_2 间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{9-1-1}$$

例 1　在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

解　因为所求的点在 y 轴上，故可设它为 $M(0,y,0)$，依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即有

$$\sqrt{(1-0)^2+(-3-y)^2+(7-0)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(7-y)^2+(-5-0)^2},$$

解得

$$y=2.$$

因此，所求点为 $M(0,2,0)$.

习　题　9-1

1. 填空题：

已知点 $A(2,-1,-1)$，则点 A 到 z 轴的距离是____，到 y 轴的距离是____，到 x 轴的距离是____.

2. 指出下列点在空间直角坐标系中位置的特点：

$A(2,0,0)$　　$B(0,-3,0)$　　$C(0,-3,1)$

$D(-5,0,3)$　　$E(2,-2,0)$　　$F(0,0,-7)$

3. 求点 $(2,-3,-1)$ 关于：

(1) 各坐标面的对称点；

(2) 各坐标轴的对称点；

(3) 坐标原点的对称点.

4. 根据下述条件求点 B 的坐标：

(1) $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$；　(2) $A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$.

§9-2　空间向量

一、向量与向量的线性运算

1. 向量的概念

在实际问题中，常会遇见两种不同类型的量，一类是只有大小的量，如长度、面积、体积、质量等，称为数量或标量；另一类量不仅有大小，而且有方向，如速度、加速度、位移等，这种量称为向量或矢量.

数学上常用一条有向线段来表示向量，其长度表示向量的大小，方向表示向量的方向，有向线段的起点和终点分别称为向量的起点和终点. 以点 A 为起点，点 B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 向量也常用一个上方加箭头的字母（或黑体字母）表示，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{i}$ 等. 相应的向量的长度记为 $|\boldsymbol{a}|$，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模. 模为 1 的向量称为单位向量，模为 0 的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$，规定零向量的方向可以是任意的.

根据向量的定义，若两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模和方向都相等，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 向量相等的概念是在不考虑向量的起点在何处的前提下给出的，即一个向量可以在空中任意地平行移动，这种向量称为自由向量. 我们所讨论的向量一般都是指自由向量.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的，因此，可以认为零向量与任何向量都平行.

设给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，将向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合，则它们所在射线间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角（如图 9-2-1），记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$ 时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，可以认为零向量与任何向量都垂直.

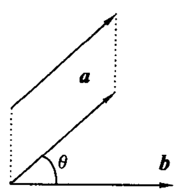


图 9-2-1

2. 向量的线性运算

向量的加法、数与向量的乘法统称为向量的线性运算.

我们在中学学习物理时已知道，两个不平行的力的合力由平行四边形法则来确定，向量的加法也是用同样的方法规定的.

设有两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$，则向量 $\overrightarrow{OC}$ 称作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（如图 9-2-2）. 这种方法称为向量加法的平行四边形法则.

由图 9-2-2 知，向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，故向量的加法也可规定如下：将向量 $\boldsymbol{b}$ 平移，使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量便是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和（如图 9-2-3）. 这种方法称为向量加法的三角形法则.

如果一个向量的模与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相反，则称此向量为向量 $\boldsymbol{b}$ 的反向量（或负向量），记作 $-\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（如图 9-2-4）.

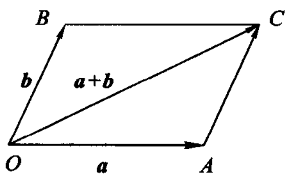


图 9-2-2

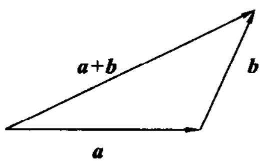


图 9-2-3

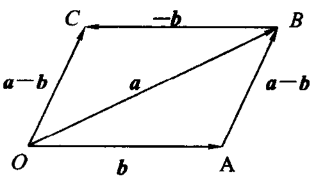


图 9-2-4

数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个平行于 $\boldsymbol{a}$ 的向量，它的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 并规定：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

向量的加法、数乘有以下运算性质：

(1) 交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 结合律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(3) 分配律　　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

由数与向量的乘法，可得下述定理：

定理 9-2-1　向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充要条件是存在唯一常数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

例 1　如图 9-2-5 所示，设 $\triangle ABC$ 的边 BC 的三等分点为 D，E，记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AE}$.

解　由向量的加法和减法法则以及数乘向量的定义知

$$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\quad \overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

所以 $$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a} + \overrightarrow{BD} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{AE} = \boldsymbol{b} - \overrightarrow{EC} = \boldsymbol{b} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \frac{1}{3}\boldsymbol{a} + \frac{2}{3}\boldsymbol{b}.$$

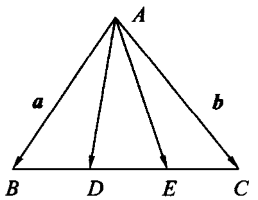


图 9-2-5

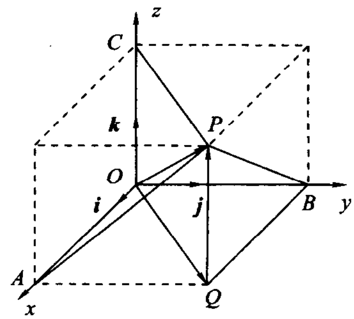


图 9-2-6

二、向量的坐标表示

向量的运算仅靠几何方法研究有些不便，为此需将向量的运算代数化. 下面我们引进向量的坐标表示法.

在空间直角坐标系中，以原点为始点，而终点分别为点 (1,0,0)，(0,1,0)，(0,0,1) 的三个单位向量，相应地记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称为基本单位向量.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，先将其平移使其始点落在原点 O，设此时 $\boldsymbol{a}$ 的终点为 $P(a_x,a_y,a_z)$，即 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OP}$. 过点 $P(a_x,a_y,a_z)$ 分别作三条坐标轴的垂面，设垂足依次为 A,B,C（如图 9-2-6），则点 A 的横坐标为 a_x，根据向量与数的乘法运算得向量 $\overrightarrow{OA} = a_x\boldsymbol{i}$，同理 $\overrightarrow{OB} = a_y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC} = a_z\boldsymbol{k}$. 于是，由向量加法的三角形法则，有

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}.$$

我们称 $a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式，其中 a_x,a_y,a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，还可记作 $\boldsymbol{a} = \{a_x,a_y,a_z\}$，我们称 $\{a_x,a_y,a_z\}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

用向量的坐标很容易表示向量的和、差及数乘.

设 $$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \{a_x,a_y,a_z\},$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} = \{b_x,b_y,b_z\},$$

则由数乘向量的运算规律及向量的加法运算规律，得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} &= (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k} \\ &= \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}, \end{aligned} \tag{9-2-1}$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}. \tag{9-2-2}$$

定理 9-2-1 中向量平行的条件也可以用坐标表示为

$$b_x = \lambda a_x, \quad b_y = \lambda a_y, \quad b_z = \lambda a_z.$$

定理 9-2-1′ 向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充要条件是，存在数 λ，使 $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$，即 $\{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z\}$，或写作 $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = \lambda$（其中若有某个分母等于零的情况时，如 $\dfrac{a_x}{0} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$，应理解为 $a_x = 0, \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$）.

例 2 设点 $A(a_x, a_y, a_z)$，$B(b_x, b_y, b_z)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示式.

解
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) - (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \\ &= \{b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z\}.\end{aligned} \tag{9-2-3}$$

由此可知，起点不在坐标原点的向量的坐标，恰好等于向量相应的终点坐标与起点坐标之差.

例 3 已知 $\boldsymbol{a} = \{2, -1, 3\}$，$\boldsymbol{b} = \{2, 1, -4\}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \{2+2, -1+1, 3-4\} = \{4, 0, -1\},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \{2-2, -1-1, 3+4\} = \{0, -2, 7\},$$
$$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b} = \{6, -3, 9\} - \{4, 2, -8\} = \{2, -5, 17\}.$$

下面再来讨论如何用向量的坐标表示向量的模及方向.

显然向量 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ 的模就是点 $P(a_x, a_y, a_z)$ 到原点 O 的距离，由两点间的距离公式知

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{9-2-4}$$

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可由该向量与三个坐标轴正向的夹角 α, β, γ（其中 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$，$0 \leqslant \beta \leqslant \pi$，$0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$）或这三个角的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 来表示. 称 α, β, γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角；$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

因为 $\triangle OAP$，$\triangle OBP$，$\triangle OCP$ 都是直角三角形（图 9-2-6），所以

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\end{aligned} \tag{9-2-5}$$

且

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{9-2-6}$$

向量

$$\boldsymbol{a}^\circ = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{i} + \cos\beta \cdot \boldsymbol{j} + \cos\gamma \cdot \boldsymbol{k} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} \tag{9-2-7}$$

是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

例 4 已知 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$，求 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

解
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \{1, -5, 1\}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} = \{3, 3, 5\}$，

所以 $$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2+(-5)^2+1^2} = 3\sqrt{3},$$
$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2+3^2+5^2} = \sqrt{43}.$$

例 5 已知点 $M_1(1,-2,3)$，$M_2(4,2,-1)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相同的单位向量.

解 由公式(9-2-3)，得
$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \{4-1,2+2,-1-3\} = \{3,4,-4\}.$$
由公式(9-2-4)、(9-2-5)，得
$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{3^2+4^2+(-4)^2} = \sqrt{41},$$
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{41}}, \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{41}}, \quad \cos\gamma = -\frac{4}{\sqrt{41}}.$$
所以，向量 $\boldsymbol{a}^\circ = \left\{\frac{3}{\sqrt{41}},\frac{4}{\sqrt{41}},-\frac{4}{\sqrt{41}}\right\}$ 就是所求的与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相同的单位向量.

例 6 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha = \frac{1}{3}$，$\cos\beta = \frac{2}{3}$，又 $|\boldsymbol{a}| = 6$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

解 因为 $\cos\alpha = \frac{1}{3}$，$\cos\beta = \frac{2}{3}$，由公式(9-2-6)，得
$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \pm\frac{2}{3}.$$
由公式(9-2-5)，得
$$a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha = 6\cdot\frac{1}{3} = 2, \quad a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta = 6\cdot\frac{2}{3} = 4,$$
$$a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma = 6\cdot\left(\pm\frac{2}{3}\right) = \pm 4,$$
所以 $$\boldsymbol{a} = \{2,4,4\} \quad 或 \quad \boldsymbol{a} = \{2,4,-4\}.$$

例 7 设向量 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{j}+\mu\boldsymbol{k}$，问数 λ,μ 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行?

解 要使 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$，必有
$$\frac{\lambda}{0} = \frac{2}{-1} = \frac{-1}{\mu},$$
即 $$\lambda = 0, \quad \frac{2}{-1} = \frac{-1}{\mu},$$
所以 $\lambda = 0$，$\mu = \frac{1}{2}$ 时，$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$.

三、向量的乘法运算

1. 向量的数量积

数量积是从物理、力学问题中抽象出来的一个数学概念. 先看一个例子，设有一个

物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线运动，产生的位移是 $\boldsymbol{s}$，如果力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ、如图 9-2-7 所示，则力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

上式右边可看成两个向量进行某种运算的结果，这种运算就是两个向量的数量积.

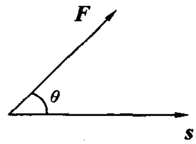


图 9-2-7

定义 9-2-1 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量，数 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}). \tag{9-2-8}$$

定义 9-2-2 $|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}). \tag{9-2-9}$$

同样，向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

根据定义，观察图 9-2-8、图 9-2-9、图 9-2-10 可知，当向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角时，投影为正数；当向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角时，投影为负数；当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，投影等于零. 显然

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

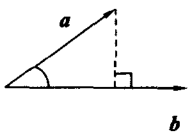


图 9-2-8

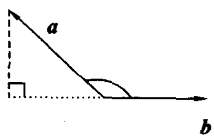


图 9-2-9

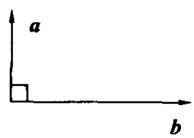


图 9-2-10

两个向量的数量积有以下运算性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0} = 0$；

(3) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(4) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，其中 λ 是数；

(5) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

这里我们只证明性质(1)和性质(3)，其余性质读者自己证明.

证 (1) 由于 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}}) = 0$，所以由(9-2-8)式，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0 = |\boldsymbol{a}|^2,$$

所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1.$$

(3) 由于 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = (\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，所以由定义得