

电子信息本科系列教材

电磁场与电磁波

DIANCICHANG YU DIANCIBO

马冰然 编著

华南理工大学出版社

内 容 简 介

本书是在 1991 年出版、1999 年再版的《电磁场与微波技术》教材的基础上修订编写的。

全书内容包括电磁场、电磁波和波导与谐振腔,共分矢量分析与场论基础、静电场、恒定电场、恒定磁场、静态场的边值问题、时变电磁场、平面电磁波和波导与谐振腔等 8 章。每章前有提要,后有小结,并列典型例题及附有一定数量的习题和参考答案。

本书可作为高等院校电子信息类与电气信息类相关专业的基础理论课教材,以及成人高等教育有关电类专业的教材或参考书,也可供有关工程技术人员阅读参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场与电磁波/马冰然编著. —广州: 华南理工大学出版社, 2007.8
(电子信息本科系列教材)
ISBN 978-5623-2664-9

I. 电… II. 马… III. ①电磁场 ②电磁波 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 125158 号

总 发 行: 华南理工大学出版社 (广州五山华南理工大学 17 号楼, 邮编 510640)

营销部电话: 020-87113487 87110964 87111048 (传真)

E-mail: scutcl3@scut.edu.cn

http: //www. scutpress. com. cn

责任编辑: 詹志青

印 刷 者: 广州穗彩彩印厂

开 本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 23.25 字数: 589 千

版 次: 2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 1~3000 册

定 价: 35.00 元

版权所有 盗版必究

前 言

踏进 21 世纪, 人类进入了信息时代。随着科学新技术的不断涌现及经济建设的迅速发展, 电磁现象及其理论和技术应用已全方位、全时空地渗透到人类活动的所有领域中。作为电子与信息、电子与通信、电气与信息类专业技术的基础理论的电磁场与电磁波课程, 不仅在以上专业技术人员的必备的知识结构及素质需求中扮演了越来越重要的角色, 而且成为其他专业的大学生为拓宽专业知识面、增强适应和竞争能力而选修的课程。以麦克斯韦四个微分方程表示的电磁理论体系是一个成熟的、完整的、内涵丰富的科学体系, 但也是一个理论性偏强、需要抽象思维和推理理解的体系, 因此, 一个既符合电磁理论科学体系又适应现时代需求的、既具有合适深度而又易于教授便于自学的电磁基础理论教材, 是所有此类教材的编写者的追求。

本书是在 1991 年出版、1999 年再版的《电磁场与微波技术》的基础上, 结合编者历年使用该教材在各种电磁场理论教学实践中的心得体会而修订编成的。全书共设矢量分析与场论基础、静电场、恒定电场、恒定磁场、静态场的边值问题、时变电磁场、平面电磁波及波导与谐振腔等 8 章内容。本书内容编排注意体现电磁理论体系的科学性和系统性, 采用学生比较容易接受的由特殊到一般的归纳方法, 并注意在归纳的基础上从一般到特殊地分析以帮助读者加深对电磁基本定理的内涵的认识。

本书力求对物理概念、定理叙述准确, 注意应用场论等数学知识描述和分析, 力求令教学推理严密、逻辑性强, 并尽量让读者易于阅读。在素材组织上注重教材的基础性, 力求深浅合适、详略得当; 但对重点和难点给予充分说明和分析, 不刻意追求“简明扼要”, 且尽量结合典型工程应用以加深读者对理论的认识。在叙述上注意思路清晰、前后连贯、由浅入深、通俗易懂。

本书每章前有提要, 后有小结, 以便于读者阅读并掌握重点; 章节中还有针对性地配置相当数量的、精选的典型例题及分析; 每章后又附了一定数量的习题和参考答案, 用以加深读者对基本概念和基本定理的理解, 以及加强其对概念、定理的应用和分析解决问题的能力。

本书可作为高等院校电子信息类和电气信息类专业基础理论课程教材; 若在内容上作适当取舍, 也可作为不同层次、不同类型的电气专业的教材或

参考书。

编者已完成与本书相配套的辅导资料及习题解集，欲努力令《电磁场与电磁波》能易教易学，希望该书的出版能让读者共享编者的心得与体会。

本书的编写得到了华南理工大学电信学院物电教研组从事电磁场与电磁波教学的各位老师的支持，在此，编者谨向他们表示衷心感谢。

限于编者的水平和能力，书中难免存在缺点和错误，敬请读者批评指正。

编 者

2007 年 5 月

目 录

1 矢量分析与场论基础	1
1.1 三种常用的坐标系	1
1.1.1 直角坐标系	2
1.1.2 圆柱坐标系	3
1.1.3 球坐标系	5
1.1.4 三种坐标系的坐标变量之间的关系	7
1.1.5 三种坐标系的坐标单位矢量之间的关系	8
1.2 矢量代数	10
1.2.1 矢量加法和减法	11
1.2.2 矢量的乘积	11
1.3 标量场的梯度	14
1.3.1 标量场的等值面	14
1.3.2 方向导数	14
1.3.3 梯度	16
1.4 矢量场的散度	20
1.4.1 矢量的通量	20
1.4.2 散度	22
1.5 矢量场的旋度	27
1.5.1 矢量的环量	27
1.5.2 旋度	28
1.6 亥姆霍兹定理及矢量场的分类	33
1.6.1 亥姆霍兹定理	33
1.6.2 矢量场的分类	34
本章小结	36
习题	38
2 静电场	40
2.1 库仑定律与电场强度	40
2.1.1 库仑定律	40
2.1.2 电场强度	41
2.2 静电场的无旋性与电位函数	45
2.2.1 静电场的无旋性	45
2.2.2 电位	46
2.2.3 电力线与等位面	49

2.3 静电场中的导体与电介质	50
2.3.1 静电场中的导体	50
2.3.2 静电场中的电介质	51
2.4 高斯通量定理	56
2.4.1 真空中的高斯通量定理	56
2.4.2 电介质中的高斯通量定理	58
2.5 泊松方程和拉普拉斯方程	64
2.5.1 静电场的基本方程	64
2.5.2 泊松方程和拉普拉斯方程	65
2.5.3 一维泊松方程的解	65
2.6 分界面上的边界条件	67
2.6.1 电位移 D 的边界条件	67
2.6.2 电场强度 E 的边界条件	68
2.6.3 介质分界面上电场方向的关系	69
2.7 导体系统的电容	72
2.7.1 电容与电容器	72
2.7.2 部分电容	74
2.8 静电场能量和静电力	80
2.8.1 静电场能量	80
2.8.2 静电力	84
本章小结	86
习题	88
3 恒定电场	92
3.1 电流密度	92
3.2 欧姆定律和焦耳定律	94
3.2.1 欧姆定律	94
3.2.2 焦耳定律	96
3.3 恒定电场的基本方程	97
3.3.1 电流连续性方程	97
3.3.2 恒定电场的基本方程	98
3.3.3 导电媒质内的体积电荷	99
3.4 分界面上的边界条件	99
3.5 恒定电场与静电场的比拟	102
3.5.1 静电比拟法	102
3.5.2 用静电比拟法求电导	103
3.6 接地电阻	105
本章小结	107
习题	108
4 恒定磁场	110

4.1 恒定磁场的实验定律和磁感应强度	110
4.1.1 安培力定律	110
4.1.2 比奥—沙伐定律及磁感应强度	111
4.1.3 洛伦兹力	112
4.2 磁场的散度和磁通连续性原理	115
4.2.1 磁感应强度的散度	115
4.2.2 磁通、磁通连续性原理	116
4.3 真空中的安培环路定律和恒定磁场的旋度	117
4.3.1 真空中的安培环路定律及磁感应强度 B 的旋度	117
4.3.2 安培环路定律的应用	120
4.4 矢量磁位和矢量泊松方程	122
4.4.1 矢量磁位的定义	122
4.4.2 矢量磁位 A 的积分计算公式	123
4.4.3 矢量泊松方程	123
4.4.4 利用矢量位 A 求磁通	125
4.5 媒质的磁化和安培环路定律	127
4.5.1 媒质的磁化与等效磁化电流	127
4.5.2 导磁媒质中的安培环路定律	129
4.6 恒定磁场的基本方程、分界面上的边界条件	132
4.6.1 恒定磁场的基本方程	132
4.6.2 不同媒质分界面上的边界条件	133
4.7 标量磁位	137
4.7.1 标量磁位的定义	137
4.7.2 标量磁位的多值性	138
4.7.3 标量磁位的拉普拉斯方程和泊松方程	139
4.7.4 用标量磁位表示的分界面上的边界条件	140
4.8 电感	142
4.8.1 电感、自感与互感	142
4.8.2 内自感和外自感	143
4.8.3 计算互感的一般公式(诺依曼公式)	144
4.9 磁场能量、磁场力	147
4.9.1 磁场能量	147
4.9.2 磁场力	150
本章小结	152
习题	155
5 静态场的边值问题	160
5.1 静态场边值问题的基本概念	160
5.2 唯一性定理和解的叠加原理	161
5.2.1 唯一性定理	161

5.2.2 解的叠加原理	163
5.3 镜像法	164
5.3.1 导体平面镜像	164
5.3.2 导体球面镜像	168
5.3.3 导体圆柱面镜像	173
5.3.4 媒质分界平面的镜像	177
5.4 分离变量法	181
5.4.1 分离变量法的一般步骤	181
5.4.2 直角坐标系中的分离变量法	182
5.4.3 圆柱坐标系中的分离变量法	187
5.4.4 圆球坐标系中的分离变量法	193
5.5 有限差分法	196
5.5.1 差分方程组的形成	196
5.5.2 差分方程组的解法	198
5.5.3 边界条件的差分处理	201
5.5.4 场强与电磁参数的计算	202
本章小结	203
习题	204
6 时变电磁场	210
6.1 法拉第电磁感应定律与麦克斯韦第二方程	210
6.1.1 法拉第电磁感应定律	210
6.1.2 麦克斯韦第二方程	212
6.2 位移电流和全电流定律	213
6.2.1 安培环路定律与位移电流	213
6.2.2 全电流定律	215
6.3 麦克斯韦方程组	216
6.3.1 麦克斯韦方程组	216
6.3.2 麦克斯韦方程组的限定形式与媒质的本构关系	217
6.4 分界面上的边界条件	218
6.4.1 不同媒质分界面上的边界条件	218
6.4.2 理想介质分界面上的边界条件	219
6.4.3 完纯导体表面上的边界条件	220
6.5 坡印廷定理和坡印廷矢量	221
6.5.1 坡印廷定理	221
6.5.2 坡印廷矢量	222
6.6 时谐变电磁场	224
6.6.1 时谐变电磁场量的复数表示法	224
6.6.2 麦克斯韦方程组的复数形式	225
6.6.3 能量密度、坡印廷定理和坡印廷矢量的复数表示法	226

6.7 波动方程	230
6.7.1 非齐次波动方程	230
6.7.2 齐次波动方程	231
6.7.3 齐次亥姆霍兹方程	231
6.8 时变场的标量位和矢量位	232
6.8.1 时变场的位函数	232
6.8.2 洛仑兹条件及达朗贝尔方程	233
6.8.3 达朗贝尔方程解的形式	234
6.8.4 函数 $f_1(t-r/v)$ 的物理意义及滞后位	235
6.8.5 洛仑兹条件、达朗贝尔方程及方程解的复数形式	236
本章小结	237
习题	239
7 平面电磁波	242
7.1 无限大理想介质中的均匀平面波	242
7.1.1 理想介质中的波动方程	242
7.1.2 无界理想介质中的均匀平面波	242
7.1.3 无界理想介质中的时谐变均匀平面波	245
7.1.4 理想介质中均匀平面波的特性	247
7.2 平面波的极化	250
7.2.1 波的极化	250
7.2.2 直线极化	251
7.2.3 圆极化	251
7.2.4 椭圆极化	252
7.3 导电媒质中的均匀平面波	256
7.3.1 导电媒质中均匀平面波的场方程	256
7.3.2 导电媒质中均匀平面波的特性	258
7.3.3 低损耗媒质和良导电媒质	260
7.4 均匀平面波对平面边界的垂直入射	265
7.4.1 均匀平面波的垂直入射、反射波及折射波	265
7.4.2 均匀平面波对理想介质与理想导体分界面的垂直入射	267
7.4.3 均匀平面波对理想介质与理想介质分界面的垂直入射	269
7.5 均匀平面波对多层介质分界面的垂直入射	272
7.5.1 总场波阻抗	272
7.5.2 多层平行介质平面的垂直入射	273
7.6 沿任意方向传播的均匀平面波	276
7.7 均匀平面波对平面边界的斜入射	279
7.7.1 反射、折射基本定律	279
7.7.2 均匀平面波对理想介质的斜入射	281
7.7.3 全折射及布儒斯特角	286

7.7.4 全反射及临界角	288
7.7.5 均匀平面波对理想导体的斜入射	292
7.8 相速与群速	296
本章小结	297
习题	299
8 波导与谐振腔	303
8.1 电磁波的频谱及其应用	303
8.2 导行波的一般特性	305
8.2.1 导行波的场方程	305
8.2.2 导行波的一般特性	308
8.3 矩形波导	311
8.3.1 矩形波导中的纵向场量法	312
8.3.2 矩形波导的传输特性	314
8.3.3 矩形波导中的主模—— TE_{10} 模	317
8.4 圆波导	322
8.4.1 圆波导中的纵向场量法	322
8.4.2 圆波导的传输特性	327
8.4.3 圆波导中常用的三种模式	328
8.5 同轴线	330
8.5.1 同轴线中的 TEM 波	330
8.5.2 同轴线中的 TM 波和 TE 波	332
8.5.3 同轴线尺寸的选择	332
8.6 谐振腔	333
8.6.1 矩形金属谐振腔	335
8.6.2 圆柱形谐振腔	340
本章小结	343
习题	346
附 录	348
附录 1 物理量的符号与单位	348
附录 2 常用物理常数	350
附录 3 国际单位制(SI)中的词头	351
附录 4 常用公式	352
附录 5 亥姆霍兹定理	355
附录 6 立体角	357
附录 7 公式 $\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{R}) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 的证明	358
附录 8 某些金属导体材料的电特性(20℃)	360
附录 9 某些电介质材料的电特性	361
参考文献	362

1 矢量分析与场论基础

电磁场是自然界中存在的,且为人类越来越熟知并广泛应用的物理场。所谓场,在物理学中的概念是:如果在全部空间(或部分空间),每一点上都对应着某个物理量的确定值,我们就说在这个空间域中确定了该物理量的场。

如果物理量的确定值仅用一个数值就能表示(即确定值是一个标量),则称该物理量的场为标量场。例如,温度场、密度场和电位场等是标量场。

如果物理量的确定值是一个矢量(即是既有大小、又有方向的量),则称该物理量的场为矢量场。例如,力场、流速场、电场和磁场等均是矢量场。

假如物理量的确定值不随时间变化,则称该物理量的场为静态场;反之,若物理量除有空间分布的确定规律外,每一点上的值还随时间变化,则称该场为动态场或时变场。例如,随时间变化的电荷(或电流)产生的场是时变电磁场。

电磁场理论是研究宏观电磁现象及电磁过程的基本规律和分析计算方法的理论。电磁场中的基本场量(如电场强度 E 和磁感应强度 B 等)均是矢量,故研究其在空间的分布及变化规律时,要应用矢量分析和场论基础的数学知识。这部分知识是研究电磁场理论的重要数学工具,也是学习后续各章课程的数学基础。

要表达并分析场量(尤其是场矢量)在空间的分布及变化规律,必须借助坐标系。以下简单介绍三种常用的坐标系。

1.1 三种常用的坐标系

坐标系是将空间的点的位置用一组有顺序的、一一对应的数值表示的数学模型。位于平面上的一个点,只需二维独立坐标便可确定,例如,可用平面直角坐标系中的 x, y 坐标来标记点 $P(x, y)$;而任何描述三维空间的点的坐标则需要三个独立的坐标变量 u_1, u_2, u_3 (如直角坐标系中的 x, y, z 坐标,又如圆柱坐标系中的 r, φ, z 坐标)。当坐标变量 u_1, u_2, u_3 为常数时,分别代表空间的三组曲面(或平面),称为坐标面。每两组坐标面的交线称为坐标曲线。如图 1-1 所示,坐标面 $u_1 = c_1$ 与 $u_3 = c_3$ 的交线是 u_2 坐标曲线。若过空间任意 M 点的三条坐标曲线都两两相互正交(此时,其相应的坐标面也两两相互垂直),则称这种坐标系为正交坐标系。

经过空间任一点 M 的三条坐标曲线的切向单位矢量,称为点 M 上该坐标的单位矢量。如图 1-1 中的 a_{u_1}

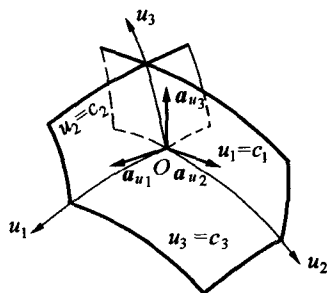


图 1-1 广义正交坐标系

是过原点的 u_1 坐标的单位矢量。坐标单位矢量的模等于 1, 并以各坐标变量正的增加方向作为正方向。一个正交坐标系的坐标单位矢量按顺序满足右手螺旋法则(按常规, 均采用右手系统), 如图 1-1 中有

$$\mathbf{a}_{u_1} \times \mathbf{a}_{u_2} = \mathbf{a}_{u_3},$$

同样有

$$\mathbf{a}_{u_2} \times \mathbf{a}_{u_3} = \mathbf{a}_{u_1},$$

和

$$\mathbf{a}_{u_3} \times \mathbf{a}_{u_1} = \mathbf{a}_{u_2}.$$

直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系是正交坐标系中最常用的三种坐标系。下面简单介绍坐标变量、坐标单位矢量、长度元、面积元、体积元和矢量函数在三个常用坐标系中的表示法及其相互关系。

1.1.1 直角坐标系

直角坐标系中的三个坐标变量是 x, y, z 。它们的变化范围是

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty.$$

直角坐标系的坐标面是平面, 坐标曲线是直线。点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 是三个坐标面 $x = x_1$, $y = y_1$ 和 $z = z_1$ 的交点, 如图 1-2 所示。过点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 的坐标曲线是三条相互正交的直线, 点 M 处的坐标单位矢量记为 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 。它们相互正交, 即

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0, \quad (1-1)$$

而且遵循右手螺旋法则:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_z, \\ \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x &= -\mathbf{a}_z, \\ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_y, \\ \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z &= -\mathbf{a}_y, \\ \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_x, \\ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y &= -\mathbf{a}_x. \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

直角坐标系的坐标单位矢量 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 是常

矢量, 其方向不随点 M 的位置变化而变化。这是直角坐标系的一个很重要的特征, 也是在其他坐标系处理一些矢量分析计算(如在圆柱或球坐标系中对给定在不同点的两个矢量的相加等计算)时要变换到直角坐标系处理的原因。

在直角坐标系内的任一矢量 $\mathbf{A}$ 可以表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z. \quad (1-3)$$

式中, A_x, A_y, A_z 分别是矢量 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 方向上的投影。

在图 1-3 中, 空间相邻的两个点 $M(x, y, z)$ 与 $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ 所在的六个坐标面 $x, x + dx, y, y + dy, z, z + dz$ 围成了一个直角坐标系中的微分体元。由点 M 指向点 M' 的小矢量 $d\mathbf{l}$ 称为点 M 处的矢量线元。矢量线元 $d\mathbf{l}$ 在点 M 的三个坐标单位矢量方向上的投影称为该坐标方向上的长度元, 即

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz. \quad (1-4)$$

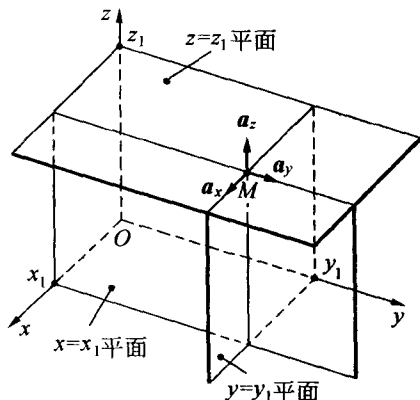


图 1-2 直角坐标系

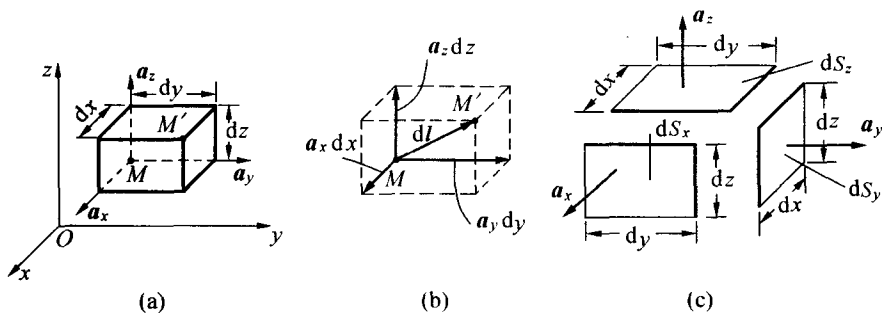


图 1-3 直角坐标系中的单位矢量、长度元、面积元和体积元

由图 1-3b 可知,直角坐标系三个坐标单位矢量方向上的长度元为

$$\left. \begin{aligned} dl_x &= dx, \\ dl_y &= dy, \\ dl_z &= dz. \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

图 1-3a 中的微分六面体由六个微分面元包围,过点 M 的三个面积元如图 1-3c 所示,是

$$\left. \begin{aligned} dS_x &= dl_y dl_z = dy dz (\text{与 } \mathbf{a}_x \text{ 垂直}), \\ dS_y &= dl_z dl_x = dz dx (\text{与 } \mathbf{a}_y \text{ 垂直}), \\ dS_z &= dl_x dl_y = dx dy (\text{与 } \mathbf{a}_z \text{ 垂直}). \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

在直角坐标系中,包含点 M 的任意面积元矢量 $d\mathbf{S}$,可用坐标系的面积元来表示。即若设点 M 处的面元法向单位矢量为 $\mathbf{n}$,如图 1-4 所示,有

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_x \cos\alpha + \mathbf{a}_y \cos\beta + \mathbf{a}_z \cos\gamma.$$

式中, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 $\mathbf{n}$ 在三个坐标轴方向上的投影,也称方向余弦。则面元 $d\mathbf{S}$ 可表示为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$$

$$= \mathbf{a}_x dS \cos\alpha + \mathbf{a}_y dS \cos\beta + \mathbf{a}_z dS \cos\gamma. \quad (1-7)$$

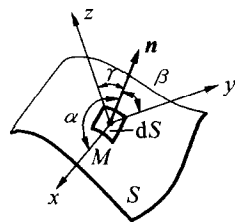


图 1-4 直角坐标系中的面元矢量

当 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 的夹角满足 $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ 时,则

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \mathbf{a}_x dS_x + \mathbf{a}_y dS_y + \mathbf{a}_z dS_z \\ &= \mathbf{a}_x dy dz + \mathbf{a}_y dz dx + \mathbf{a}_z dx dy. \end{aligned} \quad (1-8)$$

包含点 M 的微分体积元 dV 就是图 1-3a 中的微分六面体的体积,即

$$dV = dl_x dl_y dl_z = dx dy dz. \quad (1-9)$$

1.1.2 圆柱坐标系

圆柱坐标系中的三个坐标变量是 r, φ, z 。 z 坐标变量的定义与直角坐标系相同。各变量的定义域是:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

在图 1-5 所示的圆柱坐标系中,点 $M(r_1, \varphi_1, z_1)$ 是以下三个坐标面的交点:

① $r = r_1$, 是以 z 轴为轴线、以 r_1 为半径的圆柱面。 r_1 是点 M 到 z 轴的垂直距离。

② $\varphi = \varphi_1$, 是以 z 轴为界的半平面。 φ_1 是 xOz 平面与通过点 M 的半平面之间的夹角。

③ $z = z_1$, 是与 z 轴垂直的平面。 z_1 是点 M 到 xOy 平面的垂直距离。

过点 M 的坐标曲线分别是:

① 与 z 轴平行的 QM 直线(是 z 坐标曲线, 由 $r = r_1$ 与 $\varphi = \varphi_1$ 相交而成)。

② 与 xOy 平面平行的始于 z 轴的射线 PM (r 坐标曲线, 由 $\varphi = \varphi_1$ 与 $z = z_1$ 相交而成)。

③ 位于 $z = z_1$ 平面上、半径为 r_1 、圆心在 z 轴上(P 点)的圆(φ 坐标曲线, 由 $z = z_1$ 与 $r = r_1$ 相交而成)。

因此, 空间任意点 $M(r, \varphi, z)$ 处的坐标单位矢量为与经过点 M 的坐标曲线相互平行或相切的 a_r, a_φ 与 a_z 。它们相互正交, 即

$$a_r \cdot a_\varphi = a_\varphi \cdot a_z = a_z \cdot a_r = 0, \quad (1-10)$$

而且遵循右手螺旋法则:

$$\left. \begin{aligned} a_r \times a_\varphi &= a_z, \\ a_\varphi \times a_z &= a_r, \\ a_z \times a_r &= a_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

在柱坐标系中, 除 a_z 是常矢量外, a_r, a_φ 都是变矢量, 其方向都随点 M 位置的变化而变化。在柱坐标系中处理矢量的代数、微分和积分等运算时要特别注意这一点。

在点 M 的任一矢量 A 可表示为

$$A = a_r A_r + a_\varphi A_\varphi + a_z A_z. \quad (1-12)$$

式中, A_r, A_φ 和 A_z 分别是矢量 A 在位于点 M 处的坐标单位矢量 a_r, a_φ 和 a_z 方向上的投影。

如图 1-6 所示, 空间相邻的两个点 $M(r, \varphi, z)$ 与 $M'(r + dr, \varphi + d\varphi, z + dz)$ 所在的六个坐标面 $r, r + dr, \varphi, \varphi + d\varphi, z, z + dz$ 围成一个微分六面体元。利用这个六面体元, 柱坐标系中的长度元、面积元和体积元可表示如下:

1. 长度元

由点 M 指向点 M' 的矢量线元 dl 在点 M 处沿 a_r, a_φ, a_z 方向上的投影, 也即长度元, 如图 1-6b 所示, 为

$$\left. \begin{aligned} dl_r &= dr, \\ dl_\varphi &= r d\varphi, \\ dl_z &= dz. \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

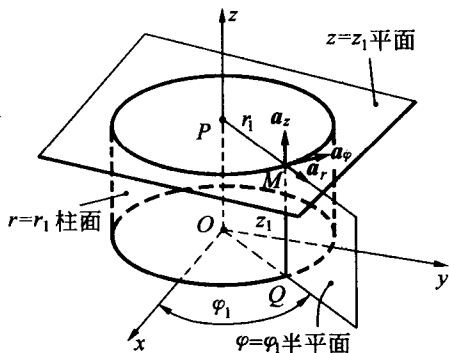


图 1-5 圆柱坐标系

则 dl 可表示为

$$dl = a_r dl_r + a_\varphi dl_\varphi + a_z dl_z = a_r dr + a_\varphi r d\varphi + a_z dz. \quad (1-14)$$

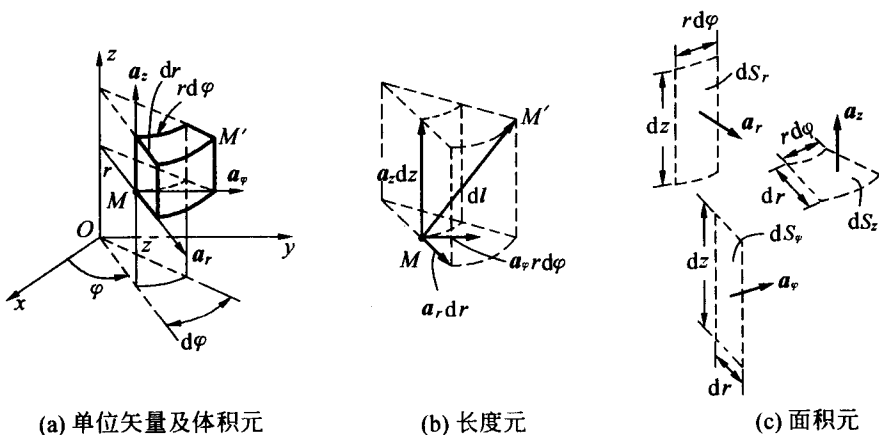


图 1-6 圆柱坐标系

2. 面积元

如图 1-6c 所示, 面元矢量 dS 在三个坐标单位矢量方向上的面积元为

$$\left. \begin{aligned} dS_r &= dl_\varphi dl_z = r d\varphi dz \quad (\text{与 } a_r \text{ 垂直}), \\ dS_\varphi &= dl_r dl_z = dr dz \quad (\text{与 } a_\varphi \text{ 垂直}), \\ dS_z &= dl_r dl_\varphi = r dr d\varphi \quad (\text{与 } a_z \text{ 垂直}). \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

则任意包含点 M 的面元矢量 dS , 当其面元法向单位矢量 n 的方向与点 M 处的坐标单位矢量方向的夹角大于、等于零并小于、等于 $\frac{\pi}{2}$ 时, 可表示为

$$\begin{aligned} dS &= a_r dS_r + a_\varphi dS_\varphi + a_z dS_z \\ &= a_r r d\varphi dz + a_\varphi dr dz + a_z r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (1-16)$$

3. 体积元

$$dV = dl_r dl_\varphi dl_z = r dr d\varphi dz \quad (1-17)$$

1.1.3 球坐标系

球坐标系中的三个坐标变量是 r, θ, φ 。其中, 坐标变量 φ 与柱坐标系中的定义相同。 r, θ, φ 的变化范围是

$$0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

在球坐标系中, 如图 1-7 所示, 点 $M(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ 由下述三个面的交点所确定:

① $r = r_1$, 是以原点为球心、 r_1 为半径的球面。 r_1 是点 M 到原点的直线距离(注意: 球坐标系中的 r 坐标与圆柱坐标系中的 r 坐标定义

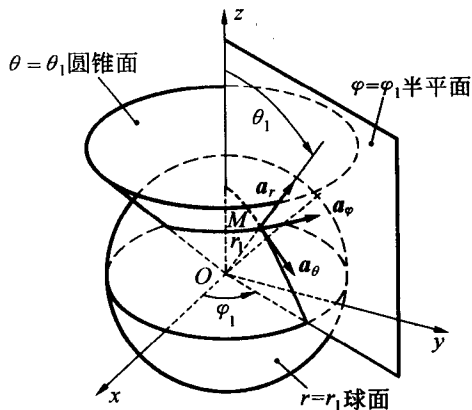


图 1-7 球坐标系

是不同的)。

② $\theta = \theta_1$, 是以原点为顶点、以 z 轴为轴线的圆锥面。 θ_1 是正向 z 轴与连线 OM 之间的夹角。

③ $\varphi = \varphi_1$, 是以 z 轴为界的半平面。 φ_1 是 xOz 平面与过点 M 的半平面之间的夹角 (φ 与圆柱坐标系中的定义相同)。坐标变量 φ 称为方位角。

过点 $M(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ 的坐标曲线分别是:

① 始于原点、并经过点 M 的射线 OM (r 坐标曲线, 由 $\theta = \theta_1$ 与 $\varphi = \varphi_1$ 相交而成)。

② 位于 $\varphi = \varphi_1$ 半平面、并以原点 O 为圆心和以 r_1 为半径的半圆弧 (即 θ 坐标曲线, 由 $\varphi = \varphi_1$ 与 $r = r_1$ 相交而成)。

③ 圆心在 z 轴上、以 $r_1 \sin \theta_1$ 为半径并位于过点 M 而垂直 z 轴的平面上的圆 (即 φ 坐标曲线, 由 $r = r_1$ 与 $\theta = \theta_1$ 相交而成)。

空间任意点 $M(r, \theta, \varphi)$ 处的坐标单位矢量的方向分别与过点 M 的坐标曲线相切, 如图 1-8 所示, 为 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 。它们相互正交, 即

$$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_r = 0, \quad (1-18)$$

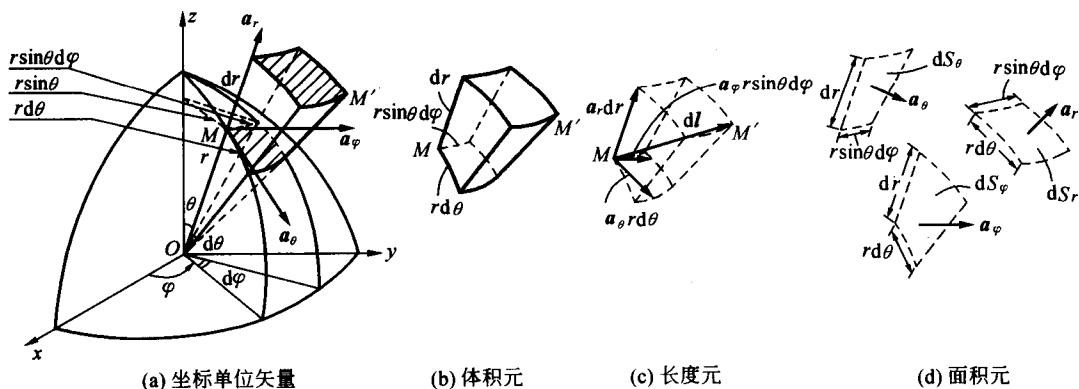


图 1-8 球坐标系

并且遵循右手螺旋法则:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta &= \mathbf{a}_\varphi, \\ \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\varphi &= \mathbf{a}_r, \\ \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_r &= \mathbf{a}_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

和柱坐标系相似, 在球坐标系中, 空间任意点 $M(r, \theta, \varphi)$ 处的坐标单位矢量 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 都是变矢量, 其方向会随点 M 位置的变化而变化。在作矢量代数及微、积分运算时应该注意到这一点。

在球坐标系中, 位于点 M 的任一矢量 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi. \quad (1-20)$$

式中, A_r, A_θ 和 A_φ 分别是矢量 $\mathbf{A}$ 在点 M 处的坐标单位矢量 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta$ 和 $\mathbf{a}_\varphi$ 方向上的投影。

如图 1-8a, b 所示, 球坐标系中的长度元、面积元和体积元可用空间相邻的两个点

$M(r, \theta, \varphi)$ 与 $M'(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$ 所在的六个坐标面围成的微分六面体来表示:

1. 长度元

由点 M 至点 M' 的矢量线元 $d\mathbf{l}$ 在点 M 处沿 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$ 方向上的投影即为该方向上的长度元, 如图 1-8c 所示, 为

$$\left. \begin{aligned} dl_r &= dr, \\ dl_\theta &= r d\theta, \\ dl_\varphi &= r \sin\theta d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

在球坐标中, $d\mathbf{l}$ 可表示为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\varphi r \sin\theta d\varphi. \quad (1-22)$$

2. 面积元

如图 1-8d 所示, 面元矢量 $d\mathbf{S}$ 在三个坐标单位矢量方向上的面积元为

$$\left. \begin{aligned} dS_r &= dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{与 } \mathbf{a}_r \text{ 垂直}), \\ dS_\theta &= dl_r dl_\varphi = r \sin\theta dr d\varphi \quad (\text{与 } \mathbf{a}_\theta \text{ 垂直}), \\ dS_\varphi &= dl_r dl_\theta = r dr d\theta \quad (\text{与 } \mathbf{a}_\varphi \text{ 垂直}). \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

对于任意包含点 M 的面元矢量 $d\mathbf{S}$, 当其面元法向单位矢量 $\mathbf{n}$ 的方向与点 M 处的坐标单位矢量的夹角大于、等于零并小于、等于 $\frac{\pi}{2}$ 时, 可表示为

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \mathbf{a}_r dS_r + \mathbf{a}_\theta dS_\theta + \mathbf{a}_\varphi dS_\varphi \\ &= \mathbf{a}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi + \mathbf{a}_\theta r \sin\theta dr d\varphi + \mathbf{a}_\varphi r dr d\theta. \end{aligned} \quad (1-24)$$

3. 体积元

$$dV = dl_r dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi. \quad (1-25)$$

1.1.4 三种坐标系的坐标变量之间的关系

变量 r 和单位矢量 $\mathbf{a}_r$ 的定义在球坐标系与柱坐标系中是不相同的。为了加以区别, 在讨论三个坐标系之间的关系时, 暂用 R 及 $\mathbf{a}_R$ 代替球坐标系中的 r 和 $\mathbf{a}_r$ 。

由图 1-9 的几何关系, 可以直接写出三种坐标系的坐标变量之间的关系。

1. 直角坐标系与柱坐标系的关系

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi, & (1-26a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = r \sin\varphi, & (1-26b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = z_0. & (1-26c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, & (1-27a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (1-27b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = z_0. & (1-27c) \end{cases}$$

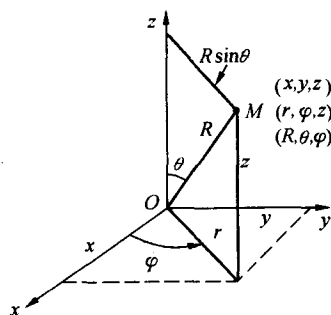


图 1-9 三种坐标系的坐标变量之间的关系