面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

经济数学—线性代数

学习指导与习题解析

COLLEGE MATHEMATICS

廖玉麟 赵艳辉 张 艳

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

经济数学—线性代数
学习指导与习题解析

经济数学习题题解
历届考研与部分自考试题选解

廖玉麟　赵艳辉　张　艳

湖 南 大 学 出 版 社
2002年·长沙

内 容 提 要

本书既是学习线性代数的指导书，又是备考硕士研究生入学考试和高等教育自学考试的应试指南. 全书共分五章，每章由三部分组成：一、基本概念、性质与定理；二、赵树嫄主编的经济应用数学(二)《线性代数》习题解答；三、历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷一、二、三、四中的线性代数试题及高等教育自学考试部分试题及其解答. 书中题型齐全、方法多样，读者可从中加深对线性代数主要内容的理解，提高解题和应试能力.

本书可供本(专)科学生学习线性代数时阅读参考，对有志考研和参加自考者更是一本有指导价值的很好的参考书. 对从事线性代数教学的教师，亦有一定的参考价值

图书在版编目(CIP)数据

经济数学——线性代数学习指导与习题解析/廖玉麟等编.
—长沙：湖南大学出版社，2002.7
ISBN 7－81053－495－5
Ⅰ. 经… Ⅱ. ①廖… ②赵… ③张… Ⅲ. 经济数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 039242 号

经济数学——线性代数学习指导与习题解析

Jingji Shuxue—Xianxing Daishu Xuexi Zhidao yu Xiti Jiexi

廖玉麟 赵艳辉 张 艳

□责任编辑 李立鹏 俞 涛
□出版发行 湖南大学出版社
社址 长沙市岳麓山 邮码 410082
电话 0731-8821691 0731-8821315
□经 销 湖南省新华书店
□印 装 长沙环境保护学校印刷厂

□开本 850×1168 32 开 □印张 9.75 □字数 244 千
□版次 2002 年 7 月第 1 版 □2002 年 7 月第 1 次印刷
□印数 1～5 000 册
□书号 ISBN 7－81053－495－5/O・39
□定价 12.00 元

前　言

本书既不同于一般的教材，也不同于习题集和题解，它着重于基本解题思路分析，解题方法、技巧的归纳和应用.

本书题型齐全，方法多样，基本理论简明，解题思路清晰，确是一本考试必备，考研必读的读物.

该书可供大专院校、电大、职大等广大学生学习线性代数时参阅. 对于考研和参加高等教育自学考试者，更是其良师益友，对于从事线性代数教学的教师亦有一定的参考价值.

限于作者水平，疏漏不当之处在所难免，恳请读者指正.

作　者

2002 年 2 月

目　次

第一章　行列式

§1.1　基本概念与性质

一、n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其值为所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 各项的符号由 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 决定. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，相应的项取正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，相应的项取负号.

注 Ⅰ　n 级排列. 由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列共有 $n!$ 个.

Ⅱ　奇排列、偶排列，在一个 n 级排列中，如 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，若 $i_t > i_s$，则称这一对数 i_ti_s 构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 若 τ 为奇数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列；若 τ 为偶数，则称此排列为偶排列.

在所有的 n 级排列中，奇排列个数等于偶排列个数 $=\frac{n!}{2}$.

Ⅲ　任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数计算法：

$\tau(i_1i_2\cdots i_n) = i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+\ i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+\ i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

也可按下法求.

查看排在 1 前面的数码个数，设为 k_1，划掉 1. 再查看排在 2 前面的数码个数，设为 k_2，划掉 2. …，最后查看排在 n 前面的数码个数，设为 k_n，划掉 n，则

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

Ⅳ　交换排列中任何两个数字，则改变排列的奇、偶性.

二、行列式的性质

1. 行列式与其转置行列式等值，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 交换行列式的两行或两列，行列式变号.

推论　如果行列式中有两行(列)的元素对应相等，则该行列式的值为零.

3. 用数 k 乘行列式的某行(列)的各元素，等于以数 k 乘此行列式.

推论 1　行列式的某行(列)的元素均等于“0”，则该行列式的值等于零.

推论 2　如果行列式有两行(列)对应元素成比例，则行列式的值等于零.

4. 若行列式的某一行(列)的每一个元素都是两数之和，则该行列式可以写成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

5. 将行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

6. 行列式的值等于它的某一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$
\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & a_{nj} & \cdots\cdots \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}
$$

$$
= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.
$$

7. 在 n 阶行列式中,任意选定 k 行(列)$(1 \leqslant k \leqslant n)$,由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式乘积之和等于该行列式的值.

三、特殊行列式

1. 上、下三角行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},
$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & * & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.
$$

注 “*”区内的元素不全为“0”,“0”区内的元素全为“0”.

2. 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

四、克莱姆法则

含有 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

中，若系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有惟一解，且

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1,2,\cdots,n),$$

其中 D_j 是将系数行列式 D 中第 j 列元素换成方程组右端所得到的行列式.

§1.2 习题解析一

A

1. 计算下列二阶行列式：

解法提示：对于二阶行列式，可以利用对角线法则直接求其值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 1 \times 3 = 1$;

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-1) \times 1 = 5$;

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 6 \times 12 - 8 \times 9 = 0$;

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - a^2b$;

(5) $$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+x+1) - x^2 = x^3 - x^2 - 1;$$

(6) $$\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 - \frac{2t}{1+t^2} \times \left(\frac{-2t}{1+t^2}\right) = \frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2} = 1;$$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - \log_b a \times \log_a b = 0$.

2. 计算下列三阶行列式：

解法提示：对三阶行列式可以直接利用对角线法则求其值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

解 (1) 原式 $=1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3-1\times2\times3-2\times3\times1-3\times1\times2=1+8+27-6-6-6=18$.

(2) 原式 $=1\times1\times5+1\times4\times8+1\times3\times9-1\times4\times9-1\times3\times5-1\times1\times8=5+32+27-36-15-8=5$.

(3) 原式 $=1\times5\times1+0+(-1)\times3\times4-0-0-(-1)\times5\times0=-7$.

(4) 原式 $=-b\begin{vmatrix} a & 0 \\ d & 0 \end{vmatrix}=0$.

3. 证明下列等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

证 根据三阶行列式的对角线法则，有

左边 $=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3-c_1b_2a_3$

$=a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$；

根据二阶行列式的对角线法则，有

右边 $=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$

$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-b_1a_2c_3+b_1a_3c_2+c_1a_2b_3-c_1a_3b_2$

$=a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$，

左边 = 右边，故原等式成立.

4. $k=?$时，$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$.

解 因为$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} k & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ k & 1 \end{vmatrix} + 0$

$$= k^2 - 4k + 3,$$

所以当 $k^2 - 4k + 3 = 0$ 时，解得 $k = 3$ 或 $k = 1$，

即 $k = 3$ 或 $k = 1$ 时，原行列式值为 0.

5. 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$.

解 由$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{vmatrix} - 0 + x\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix}$

$$= -x^2 + x(3x - 4) = 2x^2 - 4x = 0,$$

得 $x = 0$，或 $x = 2$.

当 $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$ 时，原行列式的值不等于 0.

6. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

解 因为$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ a & a \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2$
$+ 4$，故当 $-a^2 + 4 > 0$ 时，有 $-2 < a < 2$. 同时易知当 $-2 < a < 2$ 时，$-a^2 + 4 > 0$.

故原行列式值大于 0 的充要条件为 $-2 < a < 2$.

7. 求下列排列的逆序数.

(1) 41253;　　　　(2) 3712456;

(3) 36715284;　　　(4) $n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$.

解 (1) 因为 4 在 1 前，4 在 2 前，4 在 3 前，5 在 3 前，所以此排列的逆序数为 4.

(2) 同理，此排列的逆序数为 7.

(3) 此排列的逆序数为 13.

(4) 因为在 1 前面的有 $n-1$ 个数，在 2 前面的有 $n-2$ 个数，…，在 $n-1$ 前面的有 1 个数，所以此排列的逆序数为

$$\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

8. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各元素乘积应取什么符号？

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$.

解 此元素中第一个下标所成的排列为 123456，其逆序数为 0，第二个下标所成的排列为 532416，其逆序数为 8. 故此项符号为 $(-1)^{0+8}=1$. 为正.

(2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$.

解 此元素中第一个下标所成的排列为 123456. 其逆序数为 0，第二个下标所成排列为 162435，其逆序数为 5. 故此项符号为 $(-1)^{0+5}=-1$，为负.

(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$.

解 此元素中第一个下标所成排列为 251463，第二个下标所成排列为 136254，其逆序数分别为 6 和 5. 故此项符号为 $(-1)^{6+5}=-1$，为负.

(4) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$.

解 此元素中第一个下标、第二个下标所成的排列分别为 531462 和 123456，其逆序数分别为 8 和 0. 故此项符号为 $(-1)^{8+0}=1$，为正.

(5) $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$.

解 此元素中第一个下标和第二个下标所成的排列为 654321 和 123456，其逆序数分别为 15 和 0. 故此项符号为 $(-1)^{15+0}=-1$，为负.

9. 选择 k,l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有负号的项.

解 元素 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 中第一个下标和第二个下标所成的排

列分别为 12345 和 $3k42l$. 排列 12345 的逆序数为 0. 故要使此项符号为负，只要排列 $3k42l$ 的逆序数为奇数. 又 k,l 都可取 1 或 5. 当 $k=1,l=5$ 时，排列 31425 的逆序数为 3. 故此项符号为负，而当 $k=5,l=1$ 时，排列 35421 的逆序数为 8. 故此项符号为正.

因此，当 $k=1,l=5$ 时，元素 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 的符号为负.

10. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为 0，证明该行列式为零.

证 因为 n 阶行列式共有 n^2 个元素，又由题设知 n 阶行列式有 n^2-n 个以上元素为 0. 则该 n 阶行列式至少有一行或一列元素全为 0.

把该行列式全为 0 的那行或那列展开为 n 个 $n-1$ 阶行列式，则这 $n-1$ 阶行列式前的系数全为 0. 故该行列式必等于 0.

11. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 用 (i,j) 表示行列式中第 i 行第 j 列交叉点处元素的位置.

(1) 考察给定行列式的非零项，各行各列均只有一个元素不为 0. 因此取 $(1,n),(2,n-1),\cdots,(n,1)$ 处的元素的乘积构成行列式的一项，其他各项都为 0. 而排列 $123\cdots(n-1)n$ 和 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数分别为 0 和 $\frac{n(n-1)}{2}$，故该乘积的符号为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

因此,原行列式的值为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$.

(2) 考察该行列式的非零项,同(1)一样. 必取$(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n),(n,1)$处的元素的乘积构成行列式的项,而其他各项均为0,又排列$123\cdots(n-1)n$和$234\cdots n1$的逆序数分别为0和$n-1$. 故此乘积的符号为$(-1)^{n-1}$.

因此原行列式的值为$(-1)^{n-1}n!$.

12. 用行列式的性质计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab(b-a)$.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

(3) $\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix} \overset{}{\underset{-①+②}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 34215 & 1000 \\ 28092 & 1000 \end{vmatrix}$

$= 1000\begin{vmatrix} 34215 & 1 \\ 28092 & 1 \end{vmatrix} = 1000 \times (34215 - 28092) = 6123000$.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{①+④ \\ ①+③ \\ ①+②}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1 \times 2^3 = 8$.

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \xlongequal[-①+④]{\substack{-①+②\\-①+③}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{②+(-2)①\\③+(-3)①}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1.$$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[-4①+④]{\substack{-2①+②\\-3①+③}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{-2①+②\\-7①+③}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -36 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1) \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 36 \end{vmatrix} = 160.$$

(7) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{①+②+③}\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-y③+②]{-x③+①}2(x+y)\begin{vmatrix} 0 & y-x & y \\ 0 & x & x-y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} y-x & y \\ x & x-y \end{vmatrix}=-2(x^3+y^3).$$

13. 把下列行列式化为上三角形行列式,并计算其值.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\substack{2①+② \\ \frac{3}{2}①+③ \\ ①+④}}\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$