UE YANJIU GAODENG DAISHU JIAOXUE YANJIU

高等代数
教学研究

赵兴杰 著

西南师范大学出版社

GAODENG DAISHU JIAOXUE YANJIU

高等代数教学研究

赵兴杰 著

西南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数教学研究/赵兴杰著．—重庆:西南师范大学出版社,2006.9

ISBN 7-5621-3723-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．①赵….　Ⅲ．高等代数—教学研究—高等学校　Ⅳ．015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 103277 号

高等代数教学研究

赵兴杰　著

责任编辑:朱乃明

封面设计:王正端

出版、发行:西南师范大学出版社

(重庆·北碚　邮编:400715

网址:www.xscbs.com)

印　　刷:西南师范大学印刷厂

开　　本:787 mm×1092 mm　1/16

印　　张:20.75

字　　数:500 千字

版　　次:2006 年 9 月第 1 版

印　　次:2006 年 9 月第 1 次

书　　号:ISBN 7-5621-3723-4/G·2263

定　　价:38.00 元

前言

本书以北京大学数学系几何与代数教研室代数小组所编的《高等代数》(第 2 版)的内容为主要线索，介绍高等代数形成与发展的基本线索、主要研究对象、特点；研究各章节分析解决问题的基本线索与思想方法，主要概念与结论的原理与思想；总结各节问题的类型与处理方法。

高等代数是高等师范院校数学类专业的一门重要的基础课，不仅对学生完成 4 年本科专业课程的学习具有基础性的作用，而且对今后从事中学数学教学具有重要的理论指导作用，同时，也是研究生入学考试的重要内容。

高等代数的理论较初等数学具有高度的抽象性，从初等数学的直观性到高等代数的抽象性尚有适应过程。由于欠发达地区的地方院校学生基础较差，普遍感到高等代数的理论抽象、方法灵活多变难以掌握，因而很多学生在课程学习中花了大量的功夫仍收效不佳。甚至有的学生认为高等代数的理论和方法在中学教学或生活实践中用不上，以致于对该课程的学习报以应付考试的态度，到学习近世代数时，许多基本概念与重要的内容又需要重新复习。这种情形直接影响了学科教学质量。

尽管目前高等代数的学习辅导书、教学参考书版本众多，但基本上是一种体系——内容提要、典型例题、练习题与参考答案，缺乏帮助刚进入大学的学生去认识教材中基本概念的背景与意义、领悟重要理论的思想方法、掌握内容之间有机的逻辑联系以及解决问题的基本方法的指导。

为了帮助学生理解和掌握高等代数的基本理论与基本方法，提高对中学数学相关内容的认识，对备考硕士研究生的学生，提高他们对相关知识的理解和运用，同时也为青年教师提供参考意见，笔者根据自己在教学中积累的经验和认识，试图从基本概念的自然引入、重要理论的思想方法及其应用等方面阐述高等代数主体内容。因此，本书以北京大学数学系几何与代数教研室代数小组所编的《高等代数》(第 2 版)的内容为主要线索，参考张禾瑞、郝炳新所编的《高等代数》(第 4 版)等教材，由下列 5 个方面的内容构成。

1. 对每一章分析它在整个课程中的地位与作用、主要内容的逻辑联系、解决的主要问题与研究问题的思想方法，使学生对全章内容有比较清晰的脉络，领悟处理问题的思想方法。如第一章介绍了一元多项式理论的 5 个部分(一般数域上的一元多项式的概念、整除性、因式分解、根、3 个特殊数域上的应用)的联系；第五章分析了合同变换化简二次型的思想等。

2. 对每一节的基本概念介绍其来龙去脉，让学生认识概念的产生、发展与应用。

如第六章从线性空间的背景、代数学研究对象与方法等方面，比较详细地分析了线性空间的两个运算的意义和8条公理各自的作用，并介绍了线性空间不同的定义形式；第九章分析了建立欧氏空间的目的和4条公理的作用，以及定义与有关学科的联系等。

3. 对每一节的重要定理与命题，分析其理论基础、原理与作用，指导学生理解其应用。如第一章介绍了数域的本质——关于四则运算(除数不为零)封闭的数集，因式分解定理的地位与作用。

4. 研究对中学数学相关内容的指导意义，引导学生以较高的观点去认识中学数学内容，为指导中学数学教学奠定基础。如在第三章分析了线性方程组的矩阵解法、有解判别定理以及解的结构所反映的辩证思想，指导对中学数学的加减消元法本质的认识；第九章介绍了柯西—布涅科夫斯基不等式在初等数学中的应用等。

5. 对每一章每一节应当解决的主要问题尽可能地进行分类，提出解决思路，同时也选取一些典型的例题(第二章至第五章，选取了2003年～2006年全国硕士研究生入学部分考试题)分析解法。如第二章§2介绍了行列式通常的计算方法；第三章§2总结了几类线性方程问题的处理方法；第四章§2总结了通常关于矩阵5类问题的解法等。

6. 在每一章的最后按基本要求配有自测题，并在附录中提供参考答案与提示。

本书力求在内容上揭示其原理与内在联系，在解决问题上总结方法，以指导学生学习，供教学参考。

本书可作为高等师范院校数学类专业、高等院校理工类专业的教学参考书。

由于笔者水平所限，书中的观点亦为个人浅见，不妥甚至错漏之处在所难免，尊敬的读者，若有发现，望勿吝指正。

作　者

课 程 简 介

向学生作课程简介，一是使学生明确为什么要学习本课程，该课程在本专业中的地位和作用，对今后的发展以及从事中学数学教学或其他数学工作的意义，二是让学生知道本课程的教学要求，以利于学生有足够的认识和准备。

一、高等代数形成与发展的基本线索

高等代数学的形成与发展源于实践的需求。在人们的生产和生活中存在着大量的计算问题需要解决，其中的绝大部分可归结为数学中的不等式和等式（方程），因此，解方程和不等式是数学的基本课题，建立方程的求解理论和算法是数学研究的主要任务。方程的表现形式是多种多样的，例如，代数方程、微分方程、积分方程、函数方程、矩阵方程等，其中较简单的一类是代数方程（用一个等号连接代数式而得的式子）。较简单的代数式是一元多项式和 n 元一次多项式。因此，早期代数学的中心问题是研究一元高次方程和多元一次方程组的求解理论。到了 19 世纪，由一元高次方程是否存在求根公式的问题研究，引发了近世代数的出现。多元一次方程组与高次联立方程的研究，发展形成了线性代数学，它的主要内容是行列式与线性方程组的理论、矩阵的理论及线性空间及线性变换的理论等。高等代数是代数学发展到高级阶段的总称，它包括许多分支。现在大学里开设的高等代数，一般包括两部分：线性代数初步、多项式理论。

二、高等代数的主要研究对象

高等代数的主要内容包含一元多项式理论和线性代数两个部分。在应用上，一元多项式理论的基本课题是求根问题，而一元多项式的求根问题等价于一元多项式的分解问题。因而，一元多项式理论的中心内容是因式分解理论。线性代数的初衷是线性方程组的求解理论，但线性代数的一般理论、方法和工具适用于任何具有线性运算性质的对象（集合）。因此，线性代数的研究对象是抽象集合的（线性）运算性质及其代数化的实现。从内容可以看出，高等代数的研究对象已不局限于数，而是研究带有运算的集合，数学中把这样的集合叫做代数系统。

三、高等代数的特点

代数、几何、分析是数学的三大基础学科，数学的各个分支的发生和发展，基本上都是围绕着这三大学科进行的。而代数与另外两门学科在研究对象与方法上都有显

著的区别。一方面，代数的研究对象是带有运算的集合，代数学本身仅限于研究有限次的、离散性的演变过程，一般不考虑无限状态的极限过程（分析学特征）。另一方面，高等代数是运用公理化的研究方法，即把数学对象进行分类，从不同质的具体事物或过程中抽取共同的量的基本关系，将所得的关系作为最基本的公理、性质（定义），从这些公理与性质（定义）出发，采取统一的观点与方法进行演绎推理，揭示和研究新的性质，在这个意义上类似于几何。因此，高等代数具有概念多、抽象度高、论证量大、计算技巧性强的特点。

高等代数的上述特点使得数学的具体与抽象、特殊与一般、计算与论证等矛盾集中于课程之中，将使初学者感到学习困难。但是应当看到：尽管在现实中连续性和不连续性是辩证统一的，但是为了认识现实，有时候需要把它分为若干个部分，分别探索其结构与规律，再综合起来，得到对现实的总的认识，这是人们认识事物的简单但却是科学的重要手段，也是代数学的基本思想和方法之一；抽象程度越高，则概括程度越强，适用范围越广，这是高等代数成为众多学科的共同基础的原因之一。

四、高等代数研究问题的基本线索

一元多项式部分是在具有一定运算的集合上，将多项式作为形式表达式来讨论多项式整除性与因式分解，形成一套比较完整的理论，再将多项式作为函数，利用已经形成的理论讨论多项式的根，并进一步在常见的 3 个数域（复数域、实数域、有理数域）上讨论因式分解与根的分布。线性代数是在一般数域上讨论 n 阶行列式、n 元线性方程组、矩阵的运算、线性空间及其线性变换、二次型、多项式矩阵，最后对实数域的线性空间引进度量后讨论其分解及其正交变换。线性代数的基本概念以公理化方法定义，矩阵是重要工具，贯穿于整个线性代数的内容。

五、学习高等代数的意义

1. 高等代数是数学类各专业的一门重要的基础课。

高等代数是数学专业许多后继课程的基础。如近世代数、解析几何、计算数学、运筹学、常微分方程、实变函数论等课程都需要高等代数的理论与方法作基础。

2. 高等代数对中学数学教学具有重要的理论指导作用。

高等代数在初等代数的基础上进一步扩充了研究对象，引进了许多新的概念以及与通常不相同的量，比如最基本的有集合、向量和向量空间等。这里的向量具有和数相类似的运算的特点，不过研究的方法和运算的方法都更加复杂。中学数学中许多内容（如一元多项式的整除性、因式分解、求多项式的根、解线性方程组、二次曲线的化简等）在高等代数中作为具体的模型，其理论与方法得到进一步的提高和完善。因此，高等代数可以看成中学代数的延续和提高。另外，《高中数学课程标准》已经将一些线性代数的简单内容放到高中选修课中。学习高等代数，将进一步提高对中学数学相应内容的本质的认识，对今后从事中学数学教学具有居高临下的指导作用。所以，高等代数是高等师范院校数学专业重要的专业基础课。

3. 高等代数对发展智力和培养创新意识具有基础性的作用

高等代数对行列式、线性方程组、矩阵、二次型的研究，在方法上往往采用几何直观的思想，结论也常常能得到几何解释。而线性空间、线性变换、欧氏空间及其正交变换的内容，基本概念是以代数、分析、几何等方面的某些概念作为雏形抽象出来的。所以，高等代数对认识代数与几何的相互联系、以代数与几何的观点去认识数学的科学价值、人文价值，提高提出问题、分析问题和解决问题的能力，发展智力和培养创新意识具有基础性的作用。

4. 高等代数对学生的数学思维能力训练具有独特的作用

高等代数研究问题的方法包括归纳类比、抽象概括、演绎证明、公理系化和解析几何的直观感知、观察发现、空间想象，以及符号表示、运算求解等思维方法，对学生数学思维能力的培养具有独特的作用。

5. 高等代数是进一步学习的基础

高等代数一般都是数学专业类硕士研究生入学考试的主要内容之一，线性代数是全国硕士研究生入学考试高等数学试题的一个部分。

六、课程的学习任务

1. 掌握一元多项式及线性代数的基础知识和基本理论。

2. 初步掌握代数学研究问题的基本方法，提高抽象思维能力、逻辑推理能力及运算能力

3. 初步掌握具体与抽象、特殊与一般、有限与无限等辩证关系，培养辩证唯物主义观点。

4. 加深对中学数学有关内容的认识，能居高临下地把握中学数学的有关内容。

目　录

第一章　一元多项式

概　　述

(一) 本章内容的地位和作用

1. 研究一元多项式的意义

(1) 多项式是一类最常见、最简单的函数,它的应用非常广泛,如分析中的泰勒公式、级数就是要将非多项式函数的函数值计算转化为多项式,利用计算机求近似值.

(2) 多项式也是代数学中最基本的概念,多项式理论是以代数方程的根的计算和分布作为中心问题的数学理论,也叫做方程论.研究多项式理论,主要在于探讨代数方程的性质,从而寻找简易的解方程的方法.

(3) 多项式的整除性与因式分解是研究一元高次方程的基础.因式分解理论将进一步用于线性空间、线性变换的特征根、λ—矩阵等内容的讨论中,因此,是线性代数的基础.

(4) 在中学数学中,多项式是最简单的代数式,多项式的运算是代数式运算的基础,多项式函数是最常见的初等函数.所以,高等代数研究的多项式,是中学数学的拓展,在基本概念、基本理论方面是对中学数学有关内容的规范化,尤其是因式分解的原理与思想方法方面,对中学数学有关内容的教学具有重要的指导作用.所以,本章内容的教学重点是多项式的因式分解理论.

2. 本章主要讨论的问题及其方法

(1) 一般数域上的一元多项式的概念、运算及其基本性质.

解决问题的方法是:引入数域的概念,为一元多项式的研究提供基础数域,从而在一般的数域上将一元多项式作为形式表达式来定义,并按照形式表达式的项的结构来讨论多项式的加法、减法、乘法运算及其基本性质.

(2) 一般数域上的一元多项式的整除性理论.

解决问题的方法是:以带余除法定理为基础,引入整除的概念,讨论整除和最大公因式的有关理论.

(3) 一般数域上的一元多项式的因式分解理论.

解决问题的方法是:在一般数域上引入不可约多项式的概念,讨论多项式分解式

的存在性和唯一性，得出一般数域上的一元多项式的因式分解及其唯一性定理，以该定理为依据，进一步讨论标准分解式、重因式，从而形成本章的重要理论 —— 因式分解理论.

(4) 一般数域上的一元多项式的根以及根与次数的联系.

解决问题的方法是：将一元多项式作为函数来定义，结合整除与因式关系，以函数的观点，利用余式定理来讨论一元多项式的根与重根，得到根与次数的联系.

(5)3 个特殊数域(复数域、实数域、有理数域) 上一元多项式的因式分解与根的分布.

最后作为一元多项式的因式理论在特殊数域上的应用，将不可约多项式的概念、一元多项式的因式分解及其唯一性定理分别在复数域、实数域和有理数域上讨论，得到相应数域上因式分解理论和根的分布.

(二) 教学目标

1. 知识目标

(1) 理解数域 P 上一元多项式的定义，掌握运算规则、带余除法、整除的充要条件和性质.

(2) 掌握两个多项式的最大公因式的计算方法.

(3) 理解多项式互素的定义和性质.

(4) 理解不可约多项式的概念，掌握不可约多项式与其他多项式的关系.

(5) 掌握判别多项式有无重因式的方法.

(6) 理解多项式根的概念和性质，掌握多项式重根与重因式的联系.

(7) 理解复系数、实系数因式分解定理.

(8) 掌握整系数多项式的有理根的判别与求法.

2. 能力目标

(1) 能熟练地求出两个多项式的最大公因式.

(2) 能用导数判别多项式有无重因式以及有重因式时重因式的重数.

(3) 能根据根与系数的关系、实系数多项式非实复根共轭成对的原理和拉格朗日插值公式求多项式.

(4) 能熟练地求出存在有理根的有理系数多项式的全部有理根.

(5) 能用艾森斯坦因定理证明一些无理数.

(6) 通过本章的学习，领悟高等代数研究一元多项式的思想方法，并用这种理论和方法去认识中学教材中相应的代数内容.

(三) 本章内容的研究方法分析

本章主要讨论五个方面的问题：

1. 一般数域上的一元多项式的概念、运算及其基本性质；

2. 一般数域上的一元多项式的整除性理论；

3. 一般数域上的一元多项式的因式分解理论；

4. 一般数域上的一元多项式的求根方法；

5. 3 个特殊数域（复数域、实数域、有理数域）上一元多项式的因式分解与根的分布.

各节基本概念、结论与知识点教学研究

§1. 数域

（一）本节内容的地位与作用

在基础教育阶段所涉及的数集有：自然数集合 **N**、整数集合 **Z**、有理数集合 **Q**、实数集合 **R** 和复数集合 **C**，而且它们的相互联系为 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. 自然数集合 **N** 满足加法和乘法封闭，但减法与除法（尽管除数不为 0）不封闭；整数集合 **Z** 满足加法、减法、乘法封闭，但除法（尽管除数不为 0）不封闭；而有理数集合 **Q**、实数集合 **R** 和复数集合 **C** 都满足四则运算（除法除数不为 0）封闭.

在中学代数里，因式分解要求分到不能再分为止，如何界定“不能再分”？

满足四则运算（除法的除数不为 0）封闭的数集除 **Q**、**R**、**C** 外，是否还有其他的数集？

针对上述问题，本节是在初等代数的基础上进一步讨论数的运算 —— 加、减、乘、除及运算的性质，从而建立数域的概念. 为一般数域上研究多项式提供基础域.

（二）教学目标

1. 理解数域的概念，能正确判别一个数集是否为一个数域.

2. 从数的扩展上，进一步认识不同数集的结构.

（三）教学重点与难点

重点：数域的概念

难点：一些数域的证明

（四）基本概念与主要结论

数域的定义

定义 1　设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1. 如果 P 中任意两个数（这两个数也可以相同）的和、差、积、商（除数不为 0）仍然是 P 中的数，那么 P 就称为一个数域.

（五）知识点解析

1. 对定义 1 的理解

事实上，定义中的条件“如果 P 中任意两个数（这两个数也可以相同）的和、差、积、商（除数不为 0）仍然是 P 中的数”已经包含了条件“P 包括 0”（$a-a=0$），所以定义实质上是指，若复数集合的子集有非零数且满足四则运算（除法的除数不为 0）封闭，则该集合为一个数域，可用逻辑符号表示为：

设 $0\neq a\in P\subset \mathbf{C}$(复数集合)，若 $\forall a,b\in P$，有 $a+b$、$a-b$、ab、$a\div b(b\neq 0)\in P$，则 P 称为一个数域.

数域也可以用数环来定义：

数环 设 $\varnothing\neq S\subset \mathbf{C}$(复数集合)，若 $\forall a,b\in S$，有 $a+b$、$a-b$、$ab\in S$，则称 S 是一个数环.

数域 设 P 是一个数环，且有 $0\neq a\in P$. 若 $\forall a,b\in P$，$b\neq 0$，有 $a\div b(b\neq 0)\in P$，则 P 称为一个数域.

数域是数环，整数集 $\mathbf{Z}$ 是数环，有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 和复数集 $\mathbf{C}$ 是数域.

2. 对数环和数域的进一步认识

对于数的四则运算，自然数集合 $\mathbf{N}$ 对减法、除法运算都不封闭；整数集合 $\mathbf{Z}$、有理数集合 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 和复数集 $\mathbf{C}$ 对除法运算都不封闭. 因此，在数的四则运算中，除法总要求除数不为 0.

代数学研究的主要对象是非特定元素的集合系统，而集合系统是非空集合与其代数运算(集合 $A\neq\varnothing$，$A\times A$ 到 A 的映射叫做 A 的代数运算) 形成的一个有机整体，封闭是代数运算的基本要求之一. 如果将数集的四则运算中减法归结为加法、除法归结为乘法，即 $a-b=a+(-b)$，$-b$ 是 b 的负元，$a\div b=ab^{-1}(b\neq 0)$，b^{-1} 为 b 的逆元，则数环是有加法与乘法两个代数运算的非空数集做成的交换环，而数域是有加法与乘法两个代数运算的非空数集做成的域. 这也是数环和数域名称的来源.

3. 数集扩充的认识

在人类对数的认识的发展中，经历了由自然数到整数、有理数、实数再到复数的过程. 在基础教育阶段，数学所涉及的数域只是有理数域、实数域和复数域，通过本节的教学可以看到：除了上述 3 个常见的数域外，还有类似于 $Q(\sqrt{2})$，$Q(\sqrt{3})$，…，$Q(\sqrt{p})$ (p 是素数)、$Q(\sqrt{\pi})$、$Q(\sqrt{e})$ 以及 $R=\{\frac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m}\mid a_i,b_j$ 是整数，$i=0,1,\cdots,n$；$j=0,1,\cdots,m\}$ 和 $S=\{\frac{a_0+a_1\mathrm{e}+\cdots+a_n\mathrm{e}^n}{b_0+b_1\mathrm{e}+\cdots+b_m\mathrm{e}^m}\mid a_i,b_j$ 是整数，$i=0,1,\cdots,n$；$j=0,1,\cdots,m\}$ 等无穷多个数域，这些数域都以有理数域为真子域，而它们又是实数域的真子域，从而说明在有理数域和实数域之间存在无穷多个数域. 进一步地还可以证明

$$\{a+bi\mid a,b \text{ 为有理数}, i^2=-1\}$$

是介于有理数域和复数域之间异于实数域的数域，而在实数域与复数域之间到目前为止，还没发现有其他的数域.

中学数学中多项式不能再分实际上是针对确定的数域而言的，这个问题将在 §6 详细讨论.

(六) 问题的求解方法

本节涉及的习题主要是证明或判断一个集合是否为一个数域，其方法一般是根据定义验证是否为复数集合的非空子集，且满足四则运算封闭.

【例】 证明 $R=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$($\mathbf{Q}$ 为有理数集合，p 是素数) 是数域.

证:$0+0=\sqrt{p}\in R, \varnothing\neq R\subset C$;

$\forall a+b\sqrt{p}, c+d\sqrt{p}\in R$,则 a,b,c,d 是有理数,p 是素数,$\sqrt{p}$ 是无理数,于是有:

$(a+b\sqrt{p})+(c+d\sqrt{p})=(a+c)+(b+d)\sqrt{p}\in R$,即加法封闭;

$(a+b\sqrt{p})-(c+d\sqrt{p})=(a-c)+(b-d\sqrt{p})\in R$,即减法封闭;

$(a+b\sqrt{p})(c+d\sqrt{p})=(ac+pbd)+(ad+bc)\sqrt{p}\in R$,即乘法封闭;

当 c、d 是不全为 0 的有理数时,

$$\frac{a+b\sqrt{p}}{c+d\sqrt{p}}=\frac{(ac-bdp)+(bc-ad)\sqrt{p}}{c^2-d^2p}$$

$$=\frac{ac-bdp}{c^2-d^2p}+\frac{(bc-ad)\sqrt{p}}{c^2-d^2p}\in R$$

($c^2-d^2p\neq 0$,否则 $c=\sqrt{d^2}\sqrt{p}$ 与 c,d 是不全为 0 的有理数相矛盾),即除法封闭.所以 R 是数域.

§2. 一元多项式

(一) 本节内容的地位与作用

本节内容是在一般数域上以"形式表达式"定义一元多项式,多项式相等以及加法、减法和乘法 3 种代数运算,并讨论其运算性质,为一元多项式的研究作运算准备.因此本节既是今后要研究的一元多项式理论的运算基础,也将在中学教材的基础上进一步规范一元多项式的定义,为认识中学教材的有关内容提供指导.

(二) 教学目标

1. 理解一般数域 P 上的一元多项式的定义.
2. 掌握一元多项式的运算.

(三) 教学重点与难点

重点:一元多项式的运算

难点:对中学教材一元多项式定义的认识

(四) 基本概念与主要结论

1. 数域 P 上的一元多项式的定义

定义 2 设 n 是一非负整数,P 是一个数域,x 是一个符号(或称文字),形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 $a_i\in P(i=0,1,2,\cdots,n)$,称为系数在数域 P 中的一元多项式,或简称为数域 P 上的一元多项式,记为 $f(x),g(x),h(x)\cdots$

2. 多项式的次数

在多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

中，若 $a_n \neq 0$，则称 a_nx^n 为多项式 $f(x)$ 的最高次项（或首项），a_n 称为最高次项系数，n 称为多项式 $f(x)$ 的次数，记为 $\deg(f(x))$. 系数全为 0 的多项式称为零多项式，记为 $\mathbf{0}$. 零多项式是唯一不定义次数的多项式. 最高次项是零次项的多项式（即非零常数）称为零次多项式.

3. 两个多项式相等的定义

定义 3 若数域 F 上的两个一元多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有完全相同的项，或者只相差一些系数为 0 的项，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记为 $f(x) = g(x)$.

4. 多项式的加法与乘法运算

设 $f(x),g(x)$ 是数域 P 上的两个多项式，

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,$$

$$g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j,$$

不妨设 $m \leqslant n$，令 $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0$，

加法：$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i$；

乘法：$f(x)g(x) = a_nb_mx^{n+m} + (a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1} + \cdots + (a_1b_0 + a_0b_1)x + a_0b_0$，其中 k 次项的系数是 $a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_1b_{k-1} + a_0b_k = \sum\limits_{i+j=k} a_ib_j$，即 $f(x)g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+m}(\sum\limits_{i+j=k} a_ib_j)x^k$.

5. 运算律

(1) 加法结合律：$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$；

(2) 加法交换律：$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$；

(3) 乘法结合律：$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$；

(4) 乘法交换律：$f(x)g(x) = g(x)f(x)$；

(5) 乘法对加法的分配律：$f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x)$.

(6) 乘法消去律：若 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$，且 $f(x) \neq 0$，则 $g(x) = h(x)$.

6. 和与积的次数

设 $f(x),g(x)$ 都是数域 P 上的多项式，且 $f(x)g(x) \neq 0$，

(1) 当 $f(x) + g(x) \neq 0$ 时，$\deg(f(x) + g(x)) \leqslant \max(\deg(f(x)),\deg(g(x)))$；

(2) $\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$.

（五）知识点解析

1. 关于一元多项式的定义

(1) 基础数集

对于一元多项式，不同的教科书定义的基础数集不同，有的是在数环上定义多项式，有的是在数域上定义多项式. 就一元多项式的加法、减法和乘法运算而言，可以在