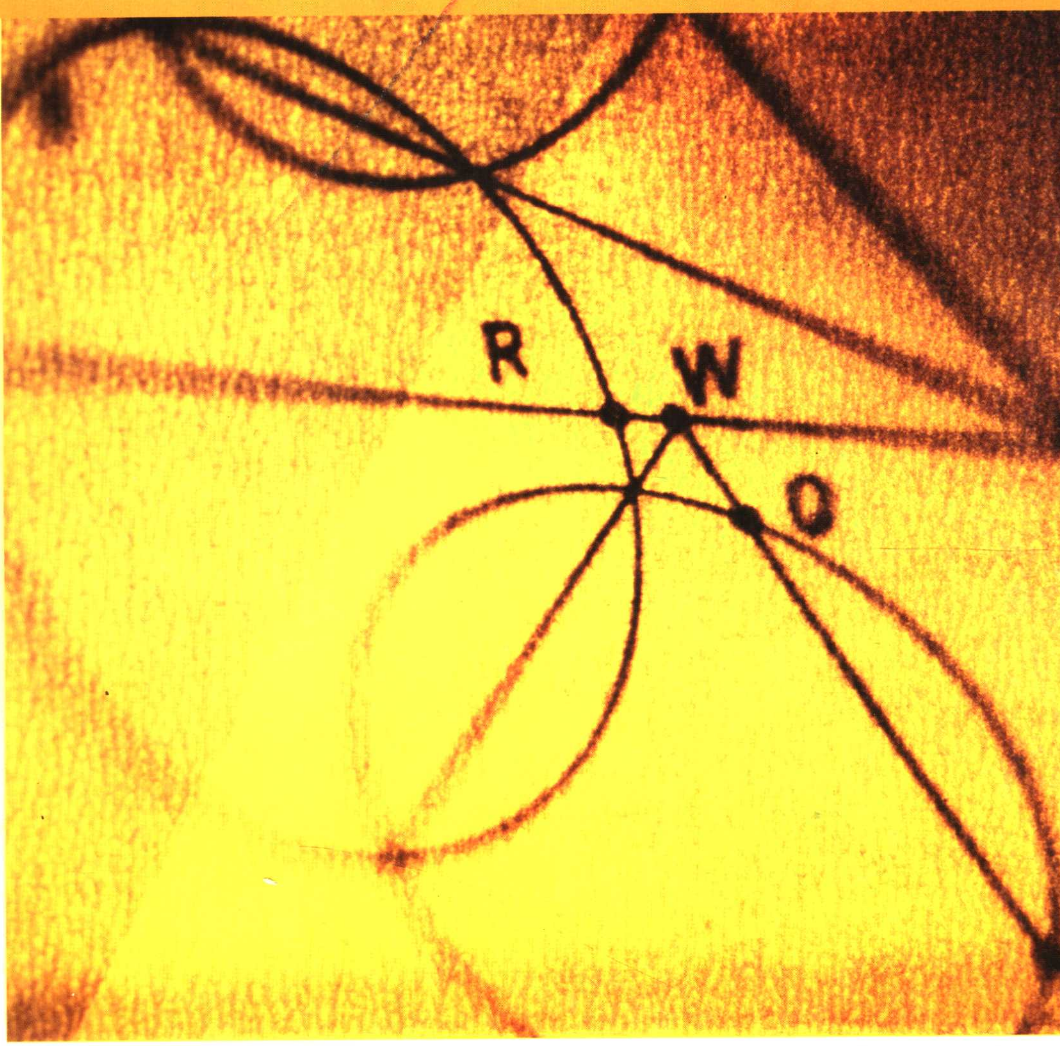
主编：赵　凯

高等数学
学习与考试指导

（含线性代数和概率统计）第二版



地质出版社

高等数学学习与考试指导

（含线性代数和概率统计）
（第二版）

主　编　赵　凯
副主编　（以姓名笔划为序）
戈升波　许　成　孙同森　闫春雷
吴　彦　张丕一　张辉群　周华颖
海进科　郭晓沛

地质出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习与考试指导/赵凯主编．—北京：地质出版社，1999.7（2004.9 第 2 版）
ISBN 7-116-02846-3

Ⅰ.高...　Ⅱ.赵...　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 30340 号

责任编辑：陈军中　江　橙　王永奉
责任校对：郭惠兰
出版发行：地质出版社
社址邮编：北京海淀区学院路 31 号，100083
电　　话：(010) 82324508（邮购部）
网　　址：http://www.gph.com.cn
电子邮箱：zbs@ gph.com.cn
传　　真：(010) 82310759
印　　刷：北京市朝阳区小红门印刷厂
开　　本：787 mm × 1092 mm 1/16
印　　张：21
字　　数：490 千字
印　　数：15000—20000 册
版　　次：1999 年 7 月北京第一版·2004 年 9 月北京第二版·第一次印刷
定　　价：25.00 元
ISBN 7-116-02846-3/O·15

第二版前言

《高等数学学习与考试指导》自1999年出版使用以来，得到了有关方面的肯定，在教学与学生学习过程中起到了很好的作用；在原版书的基础上的教学研究获得了山东省省级教学成果奖。在使用本书的过程中，我们也发现本书的一些不足之处，尤其是随着时代的发展，需要在某些方面加以改进。为此，我们组织部分有经验的数学教师按照教学大纲和考研要求进行修订，编写了第二版。

第二版与第一版在编写上基本遵照了原版的特点，只是在内容上有所删改，保留了合适的例题和练习题，又精选补充了部分例子和练习题；把第三篇和第四篇中的某些章进行了归并重编，使全书共分为十六章，且各章连续编号；在每篇的最后增加了一个综合复习题，以使读者在综合知识方面得到练习；同时把原版最后的附录改编为第五篇的第十六章。

参加第二版编写的教师及具体编写内容是：第一篇的第一章、第二章、第三章、第一篇的综合测试题及分析解答以及相应的练习题、复习题由赵凯编写，第一篇的第四章及练习题由戈升波编写，第二篇的第五章及练习题由闫春雷编写，第二篇的第六章及练习题由郭晓沛和张辉群编写，第二篇的第七章及练习题由周华颖编写，第二篇的第八章及练习题由吴彦编写，第二篇的综合测试题及分析解答及复习题由郭晓沛编写，第三篇的第九章、第十章及练习题和综合复习题三由海进科编写，第三篇的第十一章、综合测试题及分析解答由孙同森编写，第四篇的第十二章、第十三章、第五篇的第十六章及练习题由许成编写，第四篇的第十三章、第十四章、综合测试题及分析解答以及相应的练习题或复习题由张丕一编写。全书由主编赵凯教授统稿、定稿。田志远和纪培胜两位教授审阅了全书；在编写第二版的过程中得到了许多专家、同行的帮助，在此一并表示衷心的感谢；尤其感谢那些对原版提出宝贵意见的读者。

书中错误和不妥之处，敬请读者指正。

编　者

2004年6月

前　言（原版）

高等数学是理工科以及经济类学生的重要基础课。本课程的目的是使学生系统地掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和基本技巧，重点培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力、运算能力和综合运用所学知识进行分析和解决问题的能力，并为后继课程的学习和以后的工作、科研打下坚实的基础。

在高等数学的学习中，学生往往会遇到这样或那样的问题及困难，因此影响本门课程的学习效果，继而影响其他后续课程的学习。

针对学生所遇到的问题和高等数学的特点，我们组织几位多年从事本课程教学且有丰富经验的老师编写了这本教学参考书，目的是使读者在学习高等数学时有较好的学习方法和技巧，以及清晰的解题思路，达到理想的学习效果。同时，本书也针对硕士研究生数学考试大纲，加进了相关的内容和题目，以使准备报考硕士研究生的读者能系统地复习。

本书共分四篇，第一篇和第二篇是高等数学内容，第三篇是线性代数内容，第四篇是概率论与数理统计内容。每一章都给出了学习要求、主要内容、典型例题和练习题，每一篇后都给出了综合测试题及分析解答。考虑到经济类的读者，书中以附录的形式给出了导数在经济中的应用以及差分方程初步的内容。书的最后是练习题的参考答案。

本书由赵凯任主编，副主编有：于乃福、王春杰、许成、孙同森、刘朝杰、宫佩珊、郭晓沛。第一篇的第一章、第二章、第三章和综合测试题及分析解答由赵凯编写；第一篇的第四章以及第二篇的第五章、第八章由刘朝杰编写；第二篇的第六章由于乃福编写；第二篇的第七章、综合测试题及分析解答以及两个附录由许成编写；第三篇的第一章、第二章、第三章和综合测试题及分析解答由王春杰编写；第三篇的第四章、第五章和第六章由孙同森编写；第四篇的第一章、第二章、第三章、第六章、第七章和第八章由郭晓沛编写；第四篇的第四章、第五章和综合测试题及分析解答由宫佩珊编写。全书由赵凯统稿、定稿。

田志远和山其骞两位教授审阅了全书，提出了一些宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

本书的读者对象是大学一、二年级的学生，自学者，报考研究生者以及讲授高等数学的教师和科技工作者。

由于水平所限，难免有错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者
1998 年 10 月

目　　录

第三篇　线性代数

第四篇　概率论与数理统计

第五篇　经济应用

第一篇　高等数学（上）

第一章　函数、极限、连续

学习要求与目的

理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式．了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念．掌握基本初等函数的性质及其图形．理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系．掌握极限的性质及四则运算法则．掌握极限存在的两个准则（夹逼准则和单调有界准则），并会利用它们求极限．掌握利用两个重要极限求极限的方法．理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限．理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型．了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质．

主要内容概述

一、函数的概念及性质

1. 定义

设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数．记作 $y=f(x)$．D 称为定义域，$W=\{y:y=f(x),x\in D\}$ 称为值域．

确定一个函数的主要因素是：定义域和对应法则．

函数的表示法主要有：分析法（公式法），图示法和表格法．

2. 函数的特性

有界性：$\exists M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M,x\in D$．

单调性：区间 I 属于定义域 D，对于 $\forall x_1,x_2\in I$，若当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增；若当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减．

周期性：$\exists T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)$，$\forall x\in D$，则称 $f(x)$ 为周期函数．

奇偶性：设函数的定义域 D 关于原点对称，若恒有 $f(-x)=-f(x)$，$\forall x\in D$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若恒有 $f(-x)=f(x)$，$\forall x\in D$，则称 $f(x)$ 为偶函数．

3. 反函数、复合函数与初等函数

函数 $y=f(x),x\in D$，其反函数 $x=\varphi(y)$，通常记为 $y=\varphi(x)$．$y=f(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的．

设 $y=f(u),u=\varphi(x)$，且前一函数的定义域和后一函数的值域之交非空，则可以构成

复合函数 $y=f(\varphi(x))$.

基本初等函数包括：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数.

初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的可以用一个式子表示的函数称为初等函数.

二、极限

1. 数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 用"ε-N"语言表述是：$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$(自然数)，使当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

如果数列 $\{x_n\}$ 是收敛的，则其极限值是惟一的；收敛数列 $\{x_n\}$ 是有界的；收敛数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列 $\{x_{n_K}\}$ 与 $\{x_n\}$ 有相同的极限.

2. 函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 用"ε-δ"语言表述是：$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 可以表述为：$\forall \varepsilon>0$, $\exists X>0$，使当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

$x\to x_0$ 时函数极限存在的充要条件是左极限和右极限都存在且相等.

极限为零的变量称为无穷小量，极限为无穷大的变量称为无穷大量.

无穷小量的比较. 设 α 和 β 均为无穷小量，则(同一极限过程)：

当 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=1$ 时，称 α 和 β 是等价的无穷小量，记为 $\alpha\sim\beta$；

当 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=0$ 时，称 α 是 β 的高阶无穷小量，记为 $\alpha=o(\beta)$. 此时也称 β 是 α 的低阶无穷小量；

当 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=C$, $C\neq 0$ 时，称 α 和 β 是同阶的无穷小量，记为 $\alpha=O(\beta)$.

3. 极限的运算法则(没有标注极限趋向的为同一极限过程)

(1) $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$.

(2) 有限个无穷小之和还是无穷小.

(3) 有界函数与无穷小之积还是无穷小.

(4) 若 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$(A, B 为常数)，则

$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$; $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$; $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, $(B\neq 0)$.

(5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$.

(6) 若 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

(7) 若 $\lim\alpha=0$, $(\alpha\neq 0)$，则 $\lim\dfrac{1}{\alpha}=\infty$；若 $\lim\alpha=\infty$，则 $\lim\dfrac{1}{\alpha}=0$.

4. 极限存在准则

夹逼定理：若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

单调有界准则：单调有界数列必有极限.

两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

5. 常用极限

几个常用极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-1}{x}=\alpha$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$；$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

几个等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，有

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1;$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2;(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x;a^x-1\sim x\ln a.$$

6. 求极限的常用方法(此时有)

(1) 用定义验证；(2) 利用四则运算(包括无穷小的命题等)；(3) 利用夹逼定理；(4) 利用单调有界准则；(5) 利用重要极限；(6) 利用等价代换.

三、函数的连续性

1. 函数的连续与间断

函数 $f(x)$在 x_0 连续的“$\varepsilon-\delta$”语言表述是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立. 连续即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

函数 $f(x)$在 x_0 连续的三个条件：(1) 函数在 x_0 有定义；(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；(3) 极限值等于函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

函数不连续的点称为间断点.

间断点的分类：第一类间断点，左极限和右极限都存在的间断点；第二类间断点，非第一类的间断点. 可去间断点：第一类中极限存在的间断点.

函数在 x_0 连续的充要条件是：函数在 x_0 左连续也右连续.

基本初等函数在其定义域内是连续的，一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且 $y=f(u)$在 a 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))=f(a)$.

2. 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数的性质：(1)在该区间上一定取得最大值和最小值；(2) 在该区间上一定有界；(3) 函数在该区间上至少取得介于此区间上最大值和最小值之间的任何值各一次. 若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$(零点定理).

典型例题与分析

一、函数的概念与性质

对于函数的概念与性质部分，主要是求函数的定义域和值域，求函数、反函数与复合函数的表示式，特别注意分段定义的函数. 弄清函数的几个特性，利用函数的特性求解一些问题，一般是紧扣定义进行.

例 1 已知 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$，$g(x)=\begin{cases}x, x<0,\\ x^2, x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=\dfrac{g(x)+|g(x)|}{2}=\begin{cases}\dfrac{x+(-x)}{2}, x<0,\\ \dfrac{x^2+x^2}{2}, x\geqslant 0,\end{cases}=\begin{cases}0, x<0\\ x^2, x\geqslant 0\end{cases}$

例 2 函数 $f(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+|x|\operatorname{sgn}x+\dfrac{1}{2}$ 是[ ]

A. 有界函数. B. 单调函数. C. 奇函数. D. 偶函数.

解 选项是(C). 由于定义域显然是 $x\neq 0$，又有

$$f(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+|-x|\operatorname{sgn}(-x)+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}-|x|\operatorname{sgn}x+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{a^x-1+1}{1-a^x}+\frac{1}{2}-|x|\operatorname{sgn}x=-\frac{1}{a^x-1}-|x|\operatorname{sgn}x-\frac{1}{2}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

例 3 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 (a,b) 上严格单调增加，则在区间 (a,b) 上一定严格单调增加的是[ ]

A. $f(x)g(x)$. B. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，此时 $g(x)\neq 0$.

C. $[f(x)]^2$. D. $\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$.

解 选项是(D). 对于(A)有反例 $f(x)=x, g(x)=-\dfrac{1}{x}, x\in(1,2)$；对于(B)有反例 $f(x)=g(x)=x, x\in(1,2)$；对于(C)有反例 $f(x)=-\dfrac{1}{x}, x\in(1,2)$；对于(D)有 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2), g(x_1)<g(x_2)$，从而

$$\min\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant f(x_1)<f(x_2), \min\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant g(x_1)<g(x_2).$$

所以 $\min\{f(x_1),g(x_1)\}<\min\{f(x_2),g(x_2)\}$，即 $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$，故 $\varphi(x)$ 严格单调增加.

例 4 若函数 $y=f(x)$，$(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于两条竖直线 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$ 对称，证明 $f(x)$ 为周期函数.

分析 利用对称性的条件：$f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$.

证 由于函数 $y=f(x)$ 的图形关于 $x=a$ 和 $x=b$ 对称，所以有

$$f(a+x)=f(a-x),\ f(b+x)=f(b-x).$$

从而

$$f(x)=f(a-(a-x))=f(a+(a-x))=f(2a-x)$$
$$=f(b-(b+x-2a))=f(b+(b+x-2a))=f(x+2(b-a))$$

所以 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

二、极限的概念

做这部分的题目，应对极限的几个概念真正清楚，准确理解极限的真正含义. 用定义证明极限时要清楚其每步的意义，推理要严密，逻辑性要强，充分理解和掌握推导中的放大和缩小的技巧. 避免出现逻辑混乱和用法不当的错误，这方面一定要特别注意.

例 5 判断下列结论的正确性:

(1) 当 n 越来越大时, $|x_n - a|$ 越来越小,则数列 $\{x_n\}$ 必以 a 为极限.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,使得当 $n > N$ 时,总有无穷多个 $\{x_n\}$ 满足 $|x_n - a| < \varepsilon$,则数列 $\{x_n\}$ 必以 a 为极限.

(3) $\forall \varepsilon > 0$,数列 $\{x_n\}$ 中仅有有限项不满足 $|x_n - a| < \varepsilon$,则数列 $\{x_n\}$ 必以 a 为极限.

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$,则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

解 (1) 错误.极限的接近程度不是越来越小所能表达的,它是一个充分小的概念,是要多小有多小.例如 $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}, a = 0$,则 $|x_n - a| = 1 + \dfrac{1}{n}$,当 n 越来越大时, $|x_n - a|$ 确实是越来越小,但显然数列 $\{x_n\}$ 不以 $a = 0$ 为极限.

(2) 错误.极限的定义是:对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,使得当 $n > N$ 时的一切 x_n 都有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立,不是有无穷多个 x_n 成立就可以了.例如: $x_n = (-1)^n$,则对于 $a = 1$,所有的偶数指标的项 x_{2n} 都有 $|x_{2n} - a| = 0 < \varepsilon$ 成立,但显然数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在.

(3) 正确.对于 $\forall \varepsilon > 0$,设数列 $\{x_n\}$ 中有限项不满足 $|x_n - a| < \varepsilon$ 的最大指标是 N,则当 $n > N$ 时总有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立,此即满足了极限的定义,故数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限.

(4) 错误.例如 $x_n = (-1)^n + 1, y_n = (-1)^n - 1$,则显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$,但是 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均不收敛.

例 6 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \neq 0$,则下列结论正确的是( ).

A. $\exists \delta > 0$,当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \neq 0$.

B. $\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$.

C. $\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) < 0$.

D. $\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \neq 0$.

解 选项是(D).选项(A)只考虑了极限的保号性,没有考虑极限存在和函数值的定义与否无关;若 $a > 0$ 则(B)正确,若 $a < 0$ 则(C)正确.

例 7 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} = \dfrac{3}{2}$.

分析 这类用极限定义证明极限的题目必须逻辑清楚,推理严谨,格式准确.对于数列的极限,就是对任意给定的 $\varepsilon > 0$,去找一个自然数 N,使得从这一项后(当 $n > N$ 时)的一切 x_n 均有不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立.这个 N 怎样去找呢? 一般来说是解不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$,得到 n 大于一个有关 ε 的式子 $\varphi(\varepsilon)$,则令 $N = [\varphi(\varepsilon)]$(取整)即可.但有时 n 是不易求得的,这需要利用一些技巧,比如求另一放大的不等式 $|y_n| < \varepsilon$ 的解,同时因 $|x_n - a| \leqslant |y_n|$,则当 $|y_n| < \varepsilon$ 成立时,显然有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立.这是一个相当有效的常用方法,一般情况下,有时要对 n 进行一定的限制,如 $n > N_1$,从而在后面假设 N 时必须考虑在内,如设 $N = \max\{[\varphi(\varepsilon)], N_1\}$.在函数的极限中也有类似的方法和技术.就本题而言,因为 $\left|\dfrac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} - \dfrac{3}{2}\right| = \left|\dfrac{2n + 3}{4n^2 - 2}\right| \leqslant \dfrac{6n}{2n^2} = \dfrac{3}{n}$,所以对于 $\forall \varepsilon > 0$,当 $\dfrac{3}{n} < \varepsilon$,即 $n > \dfrac{3}{\varepsilon}$ 时,一定有 $\left|\dfrac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$ 成立.下面写出具体证明步骤.

证明 因为 $\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2n+3}{4n^2-2}\right| \leqslant \frac{6n}{2n^2} = \frac{3}{n}$，所以对于 $\forall \varepsilon > 0$，要使 $\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ 只要 $\frac{3}{n} < \varepsilon$，即 $n > \frac{3}{\varepsilon}$；从而取自然数 $N = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$，则当 $n > N$ 时，恒有不等式 $\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ 成立，满足极限的定义，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}$.

注 一般采用的适当放大的具体方法不是惟一的，只要符合要求即可. 就本例而言，因为 $n\to\infty$，所以可以先限制 $n>2$，则有 $\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2n+3}{4n^2-2}\right| < \frac{3n}{3n^2} = \frac{1}{n}$.
所以对于 $\forall \varepsilon>0$，只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，就有 $\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ 成立，从而取 $N=\max\left\{2,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ 成立，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}$.

例 8 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，其中 $a>1$ 为常数.

证明 由于 $a>1$，且 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a\cdot 1\cdot 1\cdots 1}\leqslant\frac{1}{n}(a+n-1)$，(其中第二个根号下是 a 与 $n-1$ 个 1 相乘)，所以 $|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1\leqslant\frac{1}{n}(a+n-1)-1=\frac{a-1}{n}<\frac{a}{n}$. 因此，对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ 只要 $\frac{a}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{a}{\varepsilon}$. 从而，取自然数 $N=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有不等式 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ 成立，满足极限的定义，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

注 在放大不等式的过程中，此题也可以：设 $\sqrt[n]{a}-1=h>0$，则因

$$a=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots+h^n>nh.$$

所以 $|\sqrt[n]{a}-1|=h<\frac{a}{n}$，其他是相同的.

例 9 用定义证明 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{2}$.

分析 就这类函数的极限而言，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，要找一个与 ε 有关的正数 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. 一般来说都是反过来推，即在假设 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立时，看 x 在 x_0 的某去心邻域内应满足的范围，即从不等式中解出 $|x-x_0|$. 就本题而言，要使 $\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，因为

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x^2-x-1}{2(x+1)}\right| = \left|\frac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)}\right|,$$

所以即要 $\left|\frac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)}\right|<\varepsilon$，此处要解的是 $|x-1|$ 因子，而怎样去估计 $\left|\frac{2x+1}{2(x+1)}\right|$ 呢？这时一般采用先对 x 进行一定的限制，因为 $x\to1$，所以考虑限制 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，即 $|x-1|<\frac{1}{2}$，则 $\left|\frac{2x+1}{2(x+1)}\right| < \frac{3+1}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3}$，从而只要 $\frac{4}{3}|x-1|<\varepsilon$，即 $|x-1|<\frac{3\varepsilon}{4}$，则就有 $\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)}\right| < \varepsilon$ 成立.

证明 因为 $\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{(2x+1)}{2(x+1)}\right|\cdot|x-1|$，限制 $|x-1|<\frac{1}{2}$，则对于 $\forall\varepsilon>0$，要使

$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，则只要$|x-1|<\frac{3\varepsilon}{4}$，从而取$\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{3\varepsilon}{4}\right\}$，当$x$满足$0<|x-1|<\delta$时，必有$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$成立，符合极限的定义，因此$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{2}$.

例 10 用定义证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x+3}{x}=\infty$.

分析 要证明极限为无穷大，就是要对$\forall M>0$，找一个与M有关的正数δ，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，有不等式$|f(x)|>M$成立．这时可能会解另一个缩小后的易解的不等式$|\varphi(x)|>M$，$|f(x)|>|\varphi(x)|$.

证明 因为当$x\neq0$时，有$\left|\frac{2x+3}{x}\right|\geqslant\left|\frac{3}{x}\right|-2$，所以对于$\forall M>0$，要使$\left|\frac{2x+3}{x}\right|>M$，只要$\left|\frac{3}{x}\right|-2>M$，即$0<|x|<\frac{3}{M+2}$；从而取$\delta=\frac{3}{M+2}$，则当$0<|x|<\delta$时，就有$\left|\frac{2x+3}{x}\right|>M$成立，满足定义的条件，因此$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x+3}{x}=\infty$.

注 用定义证明极限，必须弄清各种极限的“ε-N”“ε-δ”“ε-X”“M-δ”等语言的定义；弄清证明的过程和每步格式的含义．解不等式找到的N，δ等一般是与所给的ε或M等有关．解不等式时可采用适当放大或适当缩小的方法，一般情况下当证明极限值为有限值时用放大，而当极限为无穷大时用缩小．这部分用定义证明的题目对一般的非数学专业的学生不作太高的要求，弄清概念是主要的．

三、极限的运算

求极限要熟悉各种运算法则，要注意运算法则所适用的范围(极限必须存在等)；充分利用两个判定极限收敛的准则(夹逼定理和单调有界准则)和两个重要极限，注重各种运算技巧，常用极限的值；利用等价无穷小求极限时一定要注意等价代换的可能性和可行性，熟悉等价函数类．

例 11 下列运算是否正确．

(1)若$x_1=1$，$x_n=1-x_{n-1}$，$n=2,3,4,\cdots\cdots$设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有$a=1-a$，从而$a=\frac{1}{2}$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sin x=0.\ \lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0.$

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^3-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{2-\frac{1}{x^3}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}.$

解 (1)错误．在求由递推公式确定的数列极限时，一般先用单调有界准则判定极限的存在性，才能设极限值存在，从而利用等式解出极限值．实际上，本题中$x_n=\frac{1}{2}(1-(-1)^n)$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在．

(2)错误．极限的四则运算是在每一部分极限存在的条件下而建立起来的结论，此处极限$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$不存在，故不能利用四则运算．正确的解法是：由于$x\to\infty$时，$\frac{1}{x}$是无穷小，又$\sin x$