

杨咸启 李晓玲 编著



高等学校研究生教材

现代有限元 理论与技术与工程应用



北京航空航天大学出版社

0241.82
682
1-

高等学校研究生教材

现代有限元理论与工程应用

杨咸启 李晓玲 编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书主要介绍了一般的有限元基本理论和有限元计算技术,以及在弹性力学、结构动力学、流体运动、传质与传热等问题中的有限元分析方法和典型应用;介绍了非线性有限元分析方法,包括材料非线性、接触非线性、大变形大应变和结构非线性等方面的有限元理论内容;还介绍了其他一些与有限元方法相关的现代数值计算方法。另外,书中突出了有限元方法的计算技术,如在 MATLAB 下的编程方法;介绍了多种工程应用的实例和研究结果。

本书内容精练,以工程中的问题类型为脉络介绍有限元的应用,以机械工程、土木工程等工科相关专业本科生、研究生为读者对象,亦可供从事数值分析的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代有限元理论与工程应用/杨咸启,李晓玲编

著. —北京:北京航空航天大学出版社,2007.8

ISBN 978-7-81124-032-0

I. 现… II. ①杨…②李… III. 有限元分析 IV. 0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 038056 号

现代有限元理论与工程应用

杨咸启 李晓玲 编著

责任编辑 韩文礼

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

<http://www.buaapress.com.cn> E-mail: bhpresse@263.net

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:18.75 字数:480 千字

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷 印数:4 000 册

ISBN 978-7-81124-032-0 定价:35.00 元

前 言

近代科学技术的发展,特别是计算机技术的发展,大大促进了数值计算理论和技术的发展和应用。有限元方法就是其中最具有代表性的,它已成为各类工程问题分析计算经常采用的方法。

多年来,作者在从事有限元方法教学和研究工作中,深感有限元方法的理论和技术的重要和不易掌握,有限元的理论背景深厚,工程应用广泛,而有限元计算技术也比较复杂。目前市面上已有多种有限元商业软件,很多学生都会使用,但对其理论基础却不一定说得清楚,更无法自己编程。本书希望通过简洁的理论介绍、典型应用实例的讲解,使读者了解和掌握有限元方法的基本理论和编程技术。

本书的主要内容有:有限元法基础理论,有限元法计算技术(有限单元离散技术、协调单元的插值、刚度矩阵计算、边界条件的处理方法、有限元法的程序设计),弹性结构静、动力学有限元分析方法,传质与传热学有限元分析方法,非线性有限元法(弹塑性问题有限元分析、接触问题有限元分析、橡胶大变形有限元分析、岩土工程问题的有限元分析)等。

本书在编写过程中突出以下几个方面:

① 理论叙述简练并适当证明重要的结论,采用统一的数学理论工具推导各类问题的有限元模型;

② 从计算技术角度体现有限元方法的独特性;

③ 书中内容包括了固体、流体、传质与传热等方面的有限元解法,也包括了其他数值分析方法;

④ 在结构体系安排上,先介绍统一的基础理论和技术,再分章介绍工程中的典型问题和有限元计算结果,采用图文和表格对比的形式,强化知识;

⑤ 增加现代新理论的介绍。

本书是编者在多年教学、研究工作的基础上,结合国内外有限元方法的发展编写而成,在内容体系安排上做了新的尝试,由浅入深地介绍了有限元的基础理论、计算技术、计算机程序等内容,介绍了多种工程实例、新理论和作者的研究成果。

本书可作为机械工程、土木工程等专业研究生、本科生的教学参考用书,也可供相关专业科技工作者参考。

本书编写得到中国海洋大学和出版社的大力支持。研究生孙杰、李照成、马艳杰等在书稿成稿过程中提供了很多帮助。书中参考了书后文献中的有关资料,在此一并表示感谢。由于水平所限,书中存在的缺点和错误敬请读者批评指正。

编 者

2007年3月

目 录

第 1 章 概 述	1
1.1 工程问题的数值分析意义	1
1.2 力学问题的矩阵分析方法	1
1.3 有限元法的基本概念	7
1.4 有限元方法的发展	14
1.5 本书的主要内容	15
第 2 章 有限元法的理论基础	16
2.1 边值问题控制方程	16
2.2 泛函变分原理	17
2.3 余量加权惩罚原理	28
2.4 积分方程的解法	31
2.5 有限元子空间理论	40
2.6 有限元解的收敛性理论	43
第 3 章 单元插值与有限元计算技术	45
3.1 有限元插值的一般理论	45
3.2 协调单元的插值函数	47
3.2.1 一维单元的形函数	48
3.2.2 平面三角形单元的形函数	49
3.2.3 平面矩形单元的形函数	53
3.2.4 三维单元的形函数	56
3.3 等参数单元插值	60
3.4 刚度矩阵计算技术	69
3.5 单元函数数值微积分计算	77
3.6 边界条件的处理技术	80
3.7 有限元方程组解法	82
3.8 有限元前后处理技术	84
3.9 有限元法的程序设计	91
第 4 章 弹性力学问题有限元分析	94
4.1 弹性力学基本方程	94
4.2 弹性力学有限元格式	97
4.3 平面问题的有限元分析	98
4.3.1 三角形 3 节点单元有限元格式	99
4.3.2 四边形 4 节点单元有限元格式	106
4.4 轴对称问题的有限元分析	110



4.4.1	轴对称问题的弹性力学方程	110
4.4.2	轴对称问题的有限元格式	111
4.4.3	非轴对称载荷处理	114
4.5	三维问题的有限元分析	117
4.5.1	四面体有限元格式	117
4.5.2	五面体有限元格式	119
4.5.3	六面体有限元格式	120
4.6	其他单元与技术	122
第5章	结构动力学问题有限元分析	131
5.1	弹性结构动力学有限元建模	131
5.2	质量矩阵与惯性力计算	134
5.3	阻尼矩阵与阻尼力计算	137
5.4	动力学有限元方程的直接解法	138
5.5	微分方程组振型叠加解法	145
5.6	动态子结构法	150
5.7	工程问题求解	152
第6章	流体运动的数值分析	160
6.1	流体力学的基本方程	160
6.2	流体有限元建模	166
6.3	特殊流动的有限元分析	171
6.4	稳定层流的有限元分析	177
6.5	黏性流动有限元分析	182
6.6	多孔介质的渗流分析	192
6.7	流体运动分析其他方法	196
第7章	传质与传热数值分析	201
7.1	传质问题的有限元分析	201
7.1.1	扩散的基本方程	201
7.1.2	有限元格式	204
7.1.3	纯扩散问题分析	205
7.1.4	对流与扩散问题分析	205
7.1.5	非线性扩散	210
7.2	热传导问题的有限元分析	211
7.2.1	热传导微分方程	211
7.2.2	热传导有限元格式	212
7.2.3	稳态热传导问题计算	213
7.2.4	瞬态热传导问题解法	214
7.2.5	轴对称热传导问题解法	215
7.3	导热问题的边界元分析	217
7.3.1	边界元格式	217



7.3.2 轴对称问题解	219
7.4 传热问题的有限网络分析	224
7.4.1 有限热流网络原理	224
7.4.2 传热模型	225
7.4.3 热流网络模拟	226
第8章 非线性有限元与工程应用	228
8.1 弹塑性增量有限元方法	228
8.1.1 弹塑性增量理论	228
8.1.2 有限元格式	230
8.1.3 屈服应力修正	231
8.2 接触问题有限元分析	232
8.2.1 增量接触边界条件	232
8.2.2 增量接触有限元方程	233
8.2.3 弹塑性接触问题算例	237
8.2.4 接触问题的其他分析方法	242
8.3 橡胶大变形有限元分析	247
8.3.1 大变形应变与应力理论	247
8.3.2 运动平衡方程	249
8.3.3 大变形有限元方程及解法	250
8.3.4 橡胶材料本构模型	254
8.3.5 橡胶密封圈的接触有限元算例	254
8.4 岩土工程的有限元分析	259
8.4.1 岩体的物理特性与有限元处理方法	259
8.4.2 岩体的应力应变关系	259
8.4.3 岩体的强度条件	260
8.4.4 斜层状岩体的平面变形的弹性矩阵	262
8.4.5 节理单元的处理方法	263
附录A 平面有限元网格自动划分程序	267
附录B 弹性力学有限元程序	275
附录C 流体层流有限元程序	284
参考文献	291

第 1 章 概 述

1.1 工程问题的数值分析意义

在工程实际中常常遇到的问题的特征是：在一个已知的区域中，根据基本的物理定理，建立起控制区域的微分方程，它描述的多是物理量的变化率满足的规律；针对具体的问题，有确定的边界和专门的边界条件；分析的任务是需要决定这些物理量的变化规律。这几方面就构成了一种专门的工程分析问题。数值分析是针对某种具体的工程问题，采用有效的方法，求解出问题确定的数值解答的方法。举例来说，一座桥梁受载荷作用后，要产生位移，求出该位移值就是数值分析的任务。再如，水流冲刷河堤、带走泥沙，分析河水的流动规律也只能采用数值分析的方法。在各类有效的数值分析方法中，有限元方法已成为主流方法。

工程问题的数值分析具有重要意义：它可以用来分析设计的合理性，提高产品性能寿命，降低造价；也可以用来确定结构破坏的原因和可能性，提高结构的可靠性。因此，掌握有限元分析方法很有必要。

1.2 力学问题的矩阵分析方法

为了说明力学有限元法的基本思想与解题过程，下面通过例子分析来说明。

例 1-1 简支桁架受力如图 1-1 所示，试分析桁架的位移。

解：利用结构力学矩阵运算方法对桁架杆的受力进行分析。拆分桁架为 2 个子桁架杆，每个桁架杆作为一个受力杆单元，杆单元的受力如图 1-2 所示。这里，假定杆中的弯矩为零。在杆单元局部坐标系中，力学量有：

① 杆端点力， $\{N_1, T_1\}$ 、 $\{N_2, T_2\}$ 分别为杆端点 1、2 的轴向力和切向力，也称为节点力，对二力杆情况，切向力为零。下标表示端点号。

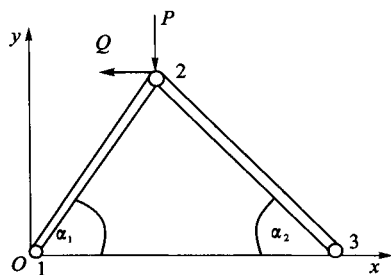


图 1-1 简支桁架

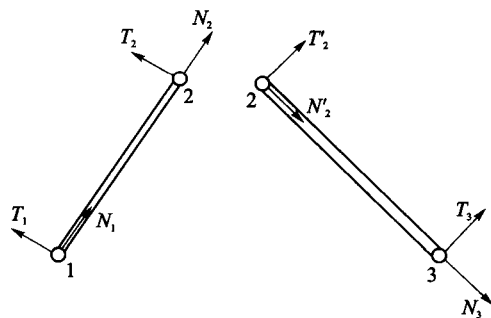


图 1-2 桁架单元受力图

② 杆端点位移, $\{u_1, v_1\}$ 、 $\{u_2, v_2\}$ 分别为端点 1、2 沿杆轴向位移和切向位移, 也称为节点位移。在杆的自身轴线坐标系中, 直杆的轴向力与位移应变的本构关系由胡克定律 $\sigma = E\epsilon$ 确定, 即

$$\sigma = \frac{N}{A} = E\epsilon = E \frac{\Delta u}{L} \quad (1-1)$$

式中, σ 为正应力; ϵ 为正应变; Δu 为杆的变形; A 为杆的横截面积; L 为杆长; E 为杨氏弹性模量。

具体到 1 号杆, 在其局部坐标系中, 杆端轴向力与位移又可表示为

$$\begin{cases} \frac{N_1}{A} = E \frac{u_1 - u_2}{L} \\ \frac{N_2}{A} = E \frac{u_2 - u_1}{L} \end{cases} \quad (1-2)$$

杆在自身坐标系内的平衡方程为

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = 0 \\ T_1 + T_2 = 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

下面以列向量式表示完整杆的各物理量。

$$\text{杆端节点力为} \quad \{F\}_1 = \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_2 \\ T_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{与力对应的杆端点位移为} \quad \{U\}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

前面各关系可写为如下矩阵方程形式:

杆平衡方程为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_2 \\ T_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-4)$$

节点力-位移关系为

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_2 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = [K]_1 \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

式中, $[K]_1$ 为第 1 杆的刚度矩阵 (4×4 方阵); A_1 、 L_1 为第 1 杆的横截面积和杆长。

上式也称为杆单元矩阵方程。

同理, 对第 2 杆, 在其局部坐标系中, 平衡方程为



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N'_2 \\ T'_2 \\ N_3 \\ T_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-6)$$

节点力-位移关系为

$$\begin{Bmatrix} N'_2 \\ T'_2 \\ N_3 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [K]_2 \begin{Bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (1-7)$$

式中, $[K]_2$ 为第 2 杆的刚度矩阵; A_2, L_2 为第 2 杆的截面积和杆长。

再从桁架系统整体上分析, 有下列条件:

- ① 节点力平衡: 在第 2 节点上 $N_2, N'_2, T_2, T'_2, P, Q$ 在整体坐标系中是平衡力系;
- ② 节点位移协调: 在第 2 节点处 u_2, u'_2, v_2, v'_2 位移在整体坐标系中是相协调的。

这些条件必须以整体坐标系中的物理量来表示, 因此, 需要对局部坐标系中的物理量进行转化。

建立整体坐标系 Oxy , 如图 1-1 所示, 局部坐标中的力与整体坐标中的力的投影关系为

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_2 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} \quad (1-8)$$

式中, $\{F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}\}^T$ 为第 1 杆的节点力在整体坐标系中的分量。

令

$$[H]_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \text{ 为其坐标转换阵} \quad (1-9)$$

则

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_2 \\ T_2 \end{Bmatrix} = [H]_1 \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

同样, 第 2 杆节点力的转换关系为

$$\begin{Bmatrix} N'_2 \\ T'_2 \\ N_3 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & 0 & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} \quad (1-11)$$

式中, $\{F'_{x2}, F'_{y2}, F_{x3}, F_{y3}\}^T$ 为第 2 杆的节点力在整体坐标系中的分量。

令

$$[H]_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \text{ 为其坐标转换阵} \quad (1-12)$$

则

$$\begin{Bmatrix} N'_2 \\ T'_2 \\ N_3 \\ T_3 \end{Bmatrix} = [H]_2 \begin{Bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} \quad (1-13)$$

同样,整体坐标系中位移与局部坐标系的位移也有相同的转换关系,即

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = [H]_1 \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u'_{x2} \\ v'_{y2} \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [H]_2 \begin{Bmatrix} u'_{x2} \\ u'_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (1-14)$$

式中, u_{x1} 、 u_{y1} 、 u_{x2} 、 u_{y2} 、 u'_{x2} 、 u'_{y2} 、 u_{x3} 、 u_{y3} 为整体坐标系中的位移。

再来考虑杆的力与位移的关系。对于第 1 杆,在其局部坐标系中,由式(1-5)

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_2 \\ T_2 \end{Bmatrix} = [K]_1 \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

转到整体坐标系后,则为

$$[H]_1 \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = [K]_1 [H]_1 \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} \quad (1-15)$$

即

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = [H]_1^T [K]_1 [H]_1 \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = [\bar{K}]_1 \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} \quad (1-16)$$

式中, $[\bar{K}]_1 = [H]_1^T [K]_1 [H]_1$ 为第 1 杆在整体坐标系中的刚度矩阵,是 4×4 的方阵;

$$[H]_1^T = [H]_1^{-1}。$$

同样,对第 2 杆也有

$$\begin{Bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = [\bar{K}]_2 \begin{Bmatrix} u'_{x2} \\ u'_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (1-17)$$

式中, $[\bar{K}]_2 = [H]_2^T [K]_2 [H]_2$; $[H]_2^T = [H]_2^{-1}。$

经过转换后,节点力平衡条件与位移协调条件可表示如下。

第2节点整体外力关系为

$$\begin{cases} F_{x2} + F'_{x2} = -Q \\ F_{y2} + F'_{y2} = -P \end{cases} \quad (1-18)$$

第2节点整体位移的协调条件为

$$\begin{cases} u_{x2} = u'_{x2} \\ u_{y2} = u'_{y2} \end{cases} \quad (1-19)$$

再将单元节点力与节点位移扩展到全部节点力与节点位移,即

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} &= [Z_G]_1 \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = [Z_G]_1 \{U\}, \quad [Z_G]_1^T \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} u'_{x2} \\ u'_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} &= [Z_G]_2 \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u'_{x2} \\ u'_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = [Z_G]_2 \{U\}, \quad [Z_G]_2^T \begin{Bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1-20)$$

式中, $[Z_G]_1$ 、 $[Z_G]_2$ 为单元节点的扩展联系矩阵;

$\{U\} = \{u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ u_{x3} \ u_{y3}\}^T$ 为整体节点位移向量。

将上面各式引入杆单元的力-位移方程,可将单元方程扩展为整体方程,即

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [\tilde{K}]_1 \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = [\tilde{K}]_2 \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u'_{x2} \\ u'_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (1-21)$$

式中, $[\tilde{K}]_1 = [Z_G]_1^T [\bar{K}]_1 [Z_G]_1$; $[\tilde{K}]_2 = [Z_G]_2^T [\bar{K}]_2 [Z_G]_2$;

为杆1、杆2在整体坐标系中的刚度矩阵经过扩展后的矩阵,是 6×6 方阵。

将两个杆的刚度方程联立起来,并引入整体平衡条件和协调条件后可得



$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{x2} + F'_{x2} \\ F_{y2} + F'_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = ([\tilde{K}]_1 + [\tilde{K}]_2) \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = [K_G] \{U\} \quad (1-22)$$

式中, $[K_G] = [\tilde{K}]_1 + [\tilde{K}]_2$ 为整体刚度矩阵; $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{x2} + F'_{x2} = -Q \\ F_{y2} + F'_{y2} = -P \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}$ 为整体节点外力向量。

式(1-22)称为杆系统的矩阵方程。

下面确定这些矩阵的具体内容。为简化计算起见,令 $A_1 = A_2 = A, L_1 = L_2 = L, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, 则

$$[H]_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad [H]_2 = [H]_1^T$$

$$[Z_G]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Z_G]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}]_1 = [H]_1^T [K]_1 [H]_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{K}]_1 = [Z_G]_1^T [\bar{K}]_1 [Z_G]_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & 0 & 0 \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & 0 & 0 \\ -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}]_2 = [H]_2^T [K]_2 [H]_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$



$$[\tilde{K}]_2 = [Z_G]^T [\bar{K}]_2 [Z_G]_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \\ 0 & 0 & -\cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & 0 & \cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

将 $[\tilde{K}]_1$ 、 $[\tilde{K}]_2$ 相加,得整体刚度矩阵为

$$[K_G] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & 0 & 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & 0 & 0 \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & 2\cos^2 \alpha & 0 & -\cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & 0 & 2\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ 0 & 0 & -\cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & 0 & \cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

这样得到系统的整体方程为

$$[K_G]\{U\} = \{F\}$$

最后,考虑边界条件

$$\begin{cases} u_{x1} = u_{y1} = 0 \\ u_{x3} = u_{y3} = 0 \end{cases}$$

在整体方程中引入边界条件,即去掉已知位移对应的方程,原方程可缩减为

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2\cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 2\sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q \\ -P \end{Bmatrix} \quad (1-23)$$

解得

$$\begin{cases} u_{x2} = \frac{-QL}{2EA\cos^2 \alpha} \\ u_{y2} = \frac{-PL}{2EA\sin^2 \alpha} \end{cases} \quad (1-24)$$

再由

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = [\bar{K}]_1 \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} \quad \text{及} \quad \begin{Bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = [\bar{K}]_2 \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix}$$

可求出支座反力 $F_{x1}, F_{y1}, F_{x3}, F_{y3}$ 。由此可再求杆中的应力等。

1.3 有限元法的基本概念

在上面的例子中,引入了“单元”、“节点”等概念,利用“力-位移关系”建立了“单元刚度矩阵”和“单元刚度方程”;再利用“平衡条件”、“协调条件”将它们转换为“整体刚度矩阵”和“整体刚度方程”;引入边界条件最后求出整体未知位移,这是完整的理论解。

例 1-2 设弹性柱受外力 P 及自重 W 作用,如图 1-3 所示,分析柱的变形。柱的横截面



积为 A , 长度为 L 。

解：① 解析分析。取微元体，如图 1-4 所示，在图示坐标系中，其平衡方程（一维）为

$$A[\sigma(x+dx) - \sigma(x)] + g\rho A dx = 0$$

式中， A 为柱的截面积； σ 为正应力； ρ 为材料密度 (W/gAL)； g 为重力加速度。

上式可化简为

$$\frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0 \quad (1-25)$$

这是以应力表示的平衡方程。

另外还有：应变方程 $\epsilon = \frac{du}{dx}$, u 为位移；Hook 定律 $\sigma = E\epsilon$, E 为弹性模量。

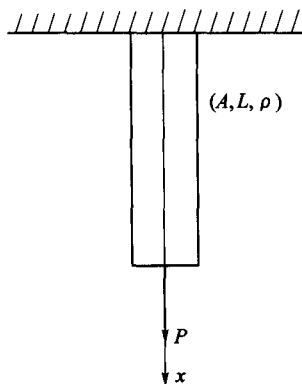


图 1-3 弹性柱

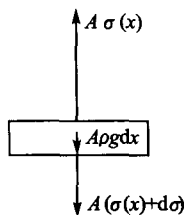


图 1-4 柱的微元体

将 ϵ, σ 两式代入平衡方程 (1-25) 得

$$E \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho g = 0 \quad (1-26)$$

这是以位移表示的微分平衡方程。

本问题的边界条件为

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ \sigma(L) = \frac{P}{A} \end{cases} \quad (1-27)$$

即

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=L} = \frac{P}{AE}$$

式中， L 为杆长。

微分方程与边界条件一起构成了一个定解问题，求解上面的微分方程得

$$u(x) = -\frac{\rho g}{2E} x^2 + \left(\frac{P}{AE} + \frac{\rho g L}{E} \right) x \quad (1-28)$$

这就是问题的解析解。

② 下面利用有限元法分析这个问题的解。

设 $\varphi(x)$ 为满足边界条件的任意的虚位移，即 $\varphi(0) = 0$ 。根据虚位移原理，可建立下面的积分方程

$$\int_0^L A \left(E \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho g \right) \varphi(x) dx = 0 \quad (1-29)$$

再利用分部积分和边界条件得

$$EA \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx - A\rho g \int_0^L \varphi(x) dx + R\varphi(0) - P\varphi(L) = 0 \quad (1-30)$$

式中, R 为支反力。

上式是柱的弹性变形满足的积分方程。求这种积分方程的解通常可采用数值方法。

将柱体划分为 n 个长为 l_i 的单元, 如图 1-5 所示。单元连接处为节点, 坐标为 x_i , $i=1, 2, \dots, n+1$ 。则原积分方程变为

$$EA \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx - A\rho g \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x) dx + R\varphi(0) - P\varphi(L) = 0 \quad (1-31)$$

在 l_i 上, 对 $u(x)$, $\varphi(x)$ 进行线性插值, 则有

$$u(x) \approx \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} u_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} u_{i+1} = \frac{x_{i+1} - x}{l_i} u_i + \frac{x - x_i}{l_i} u_{i+1} \quad (1-32)$$

式中, u_i, u_{i+1} 为节点的位移值, 即

$$u(x_i) = u_i, \quad u(x_{i+1}) = u_{i+1}$$

对 u 求导得

$$\frac{d}{dx} u(x) \approx -\frac{u_i}{l_i} + \frac{u_{i+1}}{l_i} = \frac{1}{l_i} (u_{i+1} - u_i)$$

同样, 取

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\approx \frac{x_{i+1} - x}{l_i} \varphi_i + \frac{x - x_i}{l_i} \varphi_{i+1} \\ \frac{d}{dx} \varphi(x) &\approx \frac{1}{l_i} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \end{aligned} \quad (1-33)$$

将上面各式写成矩阵形式为

$$u(x) = [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (1-34)$$

式中, $[N] = \begin{bmatrix} \frac{x_{i+1} - x}{l_i} & \frac{x - x_i}{l_i} \end{bmatrix}$ 。

$$\frac{d}{dx} u(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_i} & \frac{1}{l_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (1-35)$$

式中, $[B] = \frac{1}{l_i} [-1 \quad 1]$ 。

同理得

$$\varphi(x) = [N] \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{Bmatrix}, \quad \frac{d}{dx} \varphi(x) = [B] \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{Bmatrix}$$

将插值函数代入积分方程中的单元积分得

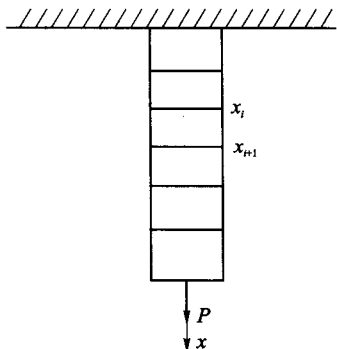


图 1-5 单元划分



$$EA \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = EA \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\varphi_i \quad \varphi_{i+1}\} [B]^T [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} dx =$$

$$\frac{EA}{l_i} \{\varphi_i \quad \varphi_{i+1}\} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} = \{\varphi_i \quad \varphi_{i+1}\} [K]_e \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (1-36)$$

式中, $[K]_e = \frac{EA}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 为单元刚度矩阵 (4×4 阶)。

$$A\rho g \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x) dx = A\rho g \int_{x_i}^{x_{i+1}} [N] \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{Bmatrix} dx =$$

$$A\rho g \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \frac{x_{i+1}-x}{l_i} & \frac{x-x_i}{l_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{Bmatrix} dx = [f_i \quad f_{i+1}] \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (1-37)$$

式中, $[f_i \quad f_{i+1}] = A\rho g \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \frac{x_{i+1}-x}{l_i} & \frac{x-x_i}{l_i} \end{bmatrix} dx$ 。

但是, 在第 1 个单元中, 令 $[f_1 \quad f_2] \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = A\rho g \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx - R\varphi(0)$

则

$$[f_1 \quad f_2] = A\rho g \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} \frac{x_2-x}{l_1} & \frac{x-x_1}{l_1} \end{bmatrix} dx - [R \quad 0] \quad (1-38)$$

在第 n 个单元中, 令

$$[f_n \quad f_{n+1}] \begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{Bmatrix} = A\rho g \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi(x) dx + P\varphi(L)$$

则

$$[f_n \quad f_{n+1}] = A\rho g \int_{x_n}^{x_{n+1}} \begin{bmatrix} \frac{x_{n+1}-x}{l_n} & \frac{x-x_n}{l_n} \end{bmatrix} dx + [0 \quad P] \quad (1-39)$$

将上面各式代入积分方程得

$$\sum_{i=1}^n \{\varphi_i \quad \varphi_{i+1}\} [K]_e \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^n \{\varphi_i \quad \varphi_{i+1}\} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1-40)$$

上式是以整个系统的节点位移与力表示的虚功方程。

现将各单元的节点量合并为整体列向量, 即

$$\{U\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$$

$$\{\Phi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}^T$$

则

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} = [Z_G]_e \{U\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{Bmatrix} = [Z_G]_e \{\Phi\} \quad (1-41)$$

式中, $[Z_G]_e$ 为位移联系矩阵, 它随单元及节点位置而变化。

将上式代入虚功方程得

$$\{\Phi\}^T \left(\sum_{e=1}^n [Z_G]_e^T [K]_e [Z_G]_e \right) \{U\} - \{\Phi\}^T \left(\sum_{i=1}^n [Z_G]_i^T \begin{Bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad (1-42)$$