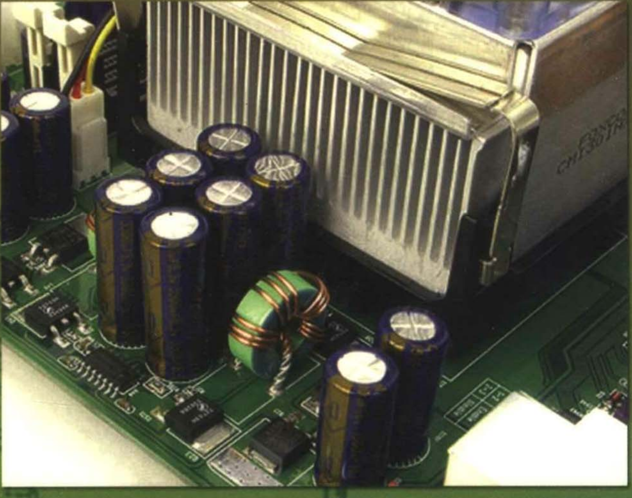
测试信号处理

胡长岭　李长星　高　理　编著



911.7
30

机械工业出版社
HINA MACHINE PRESS

测试信号处理

胡长岭　李长星　高　理　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书系统地介绍测试信号处理的基本概念、基本理论、分析方法、实现方法和应用领域。全书共9章，内容包括信号与系统的理论基础及数字信号处理的各种变换、离散傅里叶变换和快速傅里叶变换及应用、数字滤波器的实现原理和设计方法、离散随机信号的特征描述及估计、功率谱估计、维纳滤波器和卡尔曼滤波器、自适应滤波器、小波变换以及现代测试技术。本书十分重视与先修课程内容的结合，注意重要概念的引入，语言简明，逻辑性强。

本书可作为高等学校通信工程、测控计量技术及仪器、电子信息类、自动化、计算机应用等相关专业的教材，亦可作为信号处理领域的相关教师、研究生和科技人员的教学、自学或科研参考书。

图书在版编目（CIP）数据

测试信号处理/胡长岭，李长星，高理编著．—北京：机械工业出版社，2007.1

ISBN 978-7-111-20800-6

Ⅰ．测…　Ⅱ．①胡…　②李…　③高…　Ⅲ．①测试—信号分析②测试—信号处理　Ⅳ．TM930．1

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第011451号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：于苏华　版式设计：霍永明　责任校对：申春香
封面设计：鞠　杨　责任印制：李　妍
保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2007年4月第1版第1次印刷
184mm×260mm·14.75印张·353千字
标准书号：ISBN 978-7-111-20800-6
定价：22.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639　88379641　88379643
编辑热线电话：（010）88379711
封面无防伪标均为盗版

前　　言

测试信号处理是通信工程、电子信息工程等相关专业本科生和研究生的专业基础课程。本课程可使学生掌握数字信号处理的基本概念、基本理论、分析方法和实现方法。本书详尽阐述现代信号处理领域中的基本理论、基本概念和基本分析方法。

全书包括9章。第1章是信号与系统的理论基础，使读者在头脑中建立一个数字信号处理的完整概念，介绍时域离散信号和时域离散系统、序列傅里叶变换及z变换、离散时间信号与系统的时域分析方法等内容，它是现代信号处理的理论基础。第2章介绍离散傅里叶变换和快速傅里叶变换及其应用。第3章是数字滤波器的实现原理和设计方法，较全面地论述滤波器设计的基本方法，对各种设计方法都给出较为清晰的设计步骤或设计思路。第4章简要介绍离散随机信号的特征描述及估计。第5章介绍功率谱估计，对经典谱估计方法和现代谱估计方法都作了简单介绍，重点介绍AR模型谱估计。第6章介绍维纳滤波器和卡尔曼滤波器。第7章介绍自适应滤波器。第8章介绍小波变换。第9章介绍现代测试技术。本书前3章可作为本科生学习内容，其余几章可作为研究生学习内容。

本书由胡长岭主编。第1章和第2章由高理执笔，第3章～第7章由胡长岭执笔，第8章和第9章由李长星执笔。

本书由北京交通大学赵守国审阅，他提出了许多宝贵意见，在此对他表示衷心的感谢。

限于水平，书中难免有错误与不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章 测试信号处理的理论基础

1.1 引言

信号通常可以分为时域连续信号（模拟信号）、时域离散信号和数字信号，因为信号经常是时间的函数，信号的幅度和时间可以取连续值也可以取离散值。当信号幅度取连续值，时间也取连续值时，信号称为模拟信号或时域连续信号；当信号幅度取连续值而时间取离散值时，信号称为时域离散信号或离散时间信号；当信号幅度和时间均取离散值时，信号称为数字信号。

常见的一些信号，例如语音信号、图像信号等是模拟信号，如果按照规定的时间间隔对其采样，得到的采样信号是时域离散信号，如果再将采样信号的幅度用二进制编码表示，这种用二进制编码表示的信号称为数字信号。把时域离散信号的幅度用二进制编码表示称为量化，数字信号就是幅度量化的时域离散信号。对模拟信号进行采样、二进制编码及量化是由 A/D（Analog/Digital）转换器完成的。

根据系统的输入/输出是哪一类信号，系统也有模拟系统、时域离散系统和数字系统之分。当然也存在模拟网络和数字网络构成的混合系统。本书主要讨论时域离散信号和系统。

在模拟系统中，对信号和系统的描述与分析有微分方程、傅里叶变换和拉普拉斯变换；在数字信号处理中则有差分方程、序列傅里叶变换及 Z 变换。作为数字信号与系统理论分析基础，本章将重点讨论这两种数学变换，并利用它们对信号及系统进行频域分析。

本章作为全书的基础，主要学习时域离散信号的表示方法和典型信号，线性时不变系统的因果性和稳定性、系统的输入/输出描述法、序列傅里叶变换及 Z 变换，并利用它们对信号及系统进行频域分析。

1.2 时域离散信号与时域离散系统

1.2.1 时域离散信号

对模拟信号进行等间隔采样，采样间隔为 T，得到信号

$$x_a(t)\Big|_{t=nT} = x_a(nT) \qquad -\infty < n < \infty \tag{1-1}$$

将 n 的取值代入$x_a(nT)$，得到一串有序的数字序列：$\cdots x_a(-2T)$、$x_a(-T)$、$x_a(0)$、$x_a(T)$、$x_a(2T)$、$\cdots$，这样一个有序的数字序列就是时域离散信号。实际信号处理中，这些数字序列值要按顺序存放在存储器中，此时 nT 不仅代表采样时刻，更主要的是代表前后顺序，所以为了简化，可以将 T 去掉，记为$x(n)$，称为序列。对于具体信号，$x(n)$表示第

n 个序列值。这里需要说明的是，n 只能取整数，对于非整数，序列无定义。如果序列 $x(n)$ 是由模拟信号 $x_a(t)$ 采样得到的，在数值上 $x(n)$ 与模拟信号 $x_a(t)$ 的关系为

$$x(n) = x_a(nT) \tag{1-2}$$

序列的变化规律可用公式表示，也可用图形表示，图 1-1 表示了一个具体的时域离散信号——序列。

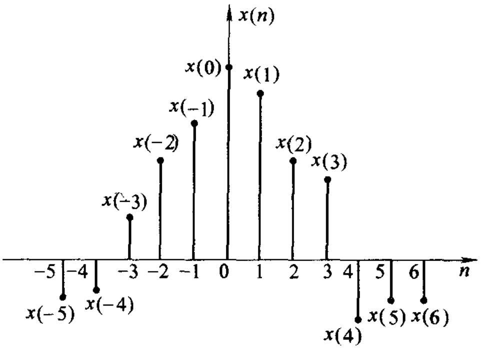


图 1-1 时域离散信号的表示

1.2.1.1 常用的典型序列

1. 单位脉冲序列 $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

单位脉冲序列只有在 $n=0$ 时取确定值 1，其他均为 0。$\delta(n)$ 是数字信号处理中重要序列之一。单位脉冲序列也称为单位采样序列，与模拟系统中单位冲激函数 $\delta(t)$ 类似，不同的是 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时取值为无穷大，$t\neq 0$ 时取值为 0，对时间 t 的积分为 1。单位脉冲序列和单位冲激函数如图 1-2 所示。

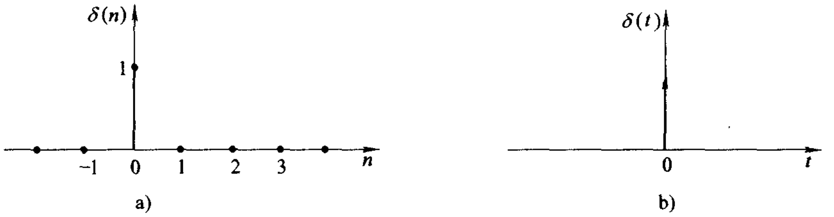


图 1-2 单位脉冲序列和单位冲激函数

a）单位脉冲序列 b）单位冲激函数

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{1-4}$$

单位阶跃序列如图 1-3 所示，它类似于模拟系统中的单位阶跃函数 $u(t)$。单位脉冲序列与单位阶跃序列之间的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \tag{1-5}$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \tag{1-6}$$

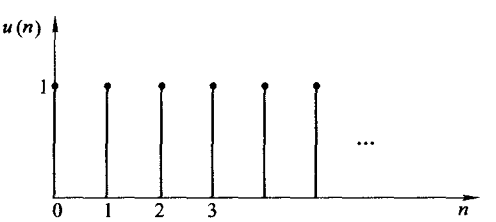


图 1-3 单位阶跃序列

3. 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{1-7}$$

矩形序列在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 时取值为 1，其他为 0。N 称为矩形序列的长度，例如 $R_7(n)$ 表示长度为 7。矩形序列可用单位阶跃序列表示为

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \tag{1-8}$$

4. 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n) \qquad a \text{ 为实数}$$

如果 $|a|<1$，$x(n)$的幅度随 n 增大而逐渐减小，称为收敛序列；如果 $|a|>1$，$x(n)$随 n 增大而增大，称为发散序列。其波形如图 1-4 所示。

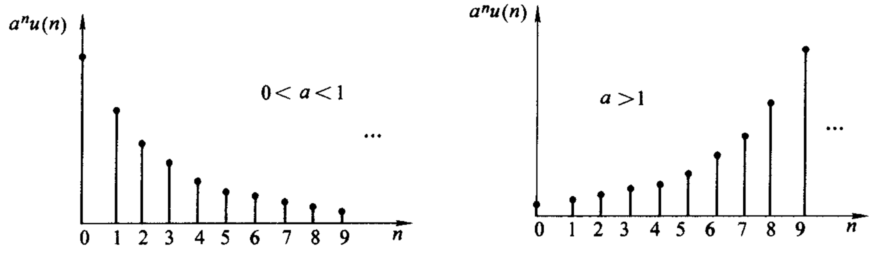


图 1-4　实指数序列

5. 正弦序列

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

式中，ω 称为正弦序列的数字域频率，单位是弧度（rad），它表示序列变化的速率，即两个相邻序列值之间变化的弧度。

如果正弦序列是由模拟序列$x_a(t)=\sin\Omega t$ 采样得到，那么时域离散信号$x(n)$可以表示为

$$x(n) = x_a(nT) = \sin(\Omega nT)$$

又因为在数值上，序列值与采样信号值相等，所以有

$$\omega = \Omega T \tag{1-9}$$

即由模拟信号采样得到的序列，其数字频率 ω 与模拟信号的模拟角频率 Ω 成线性关系。因为采样频率 f_s 与采样周期 T 互为倒数，所以又有

$$\omega = \frac{\Omega}{f_s} \tag{1-10}$$

式（1-10）表示数字频率是模拟角频率对采样频率的归一化频率。以下均用 ω 表示数字频率，Ω 或 f 表示模拟角频率或模拟频率。

6. 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma+j\omega_0)n}$$

式中，ω_0 为数字域频率。

复指数序列也可以用其实部、虚部或者极坐标表示为

$$x(n) = e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n) + je^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

$$x(n) = e^{\sigma n}e^{j\omega_0 n}$$

如果 $\sigma=0$，$x(n)=e^{j\omega_0 n}$，由于 n 取整数，下式成立

$$e^{j(\omega_0+2\pi M)n} = e^{j\omega_0 n} \qquad M = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

这表示当$\sigma=0$ 时，复指数序列的频率具有以 2π 为周期的周期性，所以在以后的研究中只考虑一个周期就可以了。

1.2.1.2 序列的周期性

对于序列$x(n)$，如果对所有 n 存在一个最小的正整数N，满足

$$x(n)=x(n+N) \qquad -\infty<n<\infty \tag{1-11}$$

则称序列$x(n)$是周期性序列，周期为 N，N 为整数。例如

$$x(n)=\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)=\sin\left[\frac{\pi}{4}(n+8)\right]$$

表示$\sin(\pi n/4)$是周期为 8 的周期序列，如图 1-5 所示。

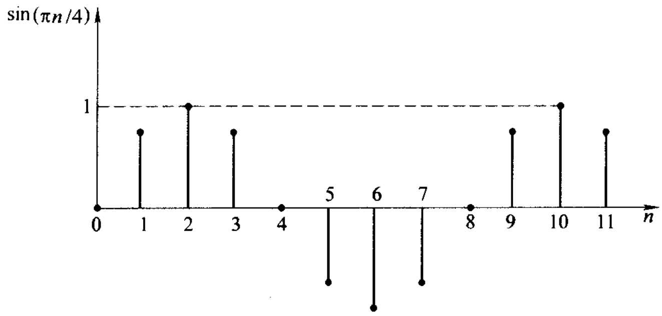


图 1-5 周期为 8 的正弦序列$\sin(\pi n/4)$

下面讨论一般正弦序列的周期性：

设$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$，则

$$x(n+N)=A\sin[\omega_0(n+N)+\varphi]=A\sin(\omega_0 n+\omega_0 N+\varphi)$$

如果$x(n+N)=x(n)$成立，则要求 $\omega_0 N=2\pi k$，式中 k 与 N 均取整数，且 k 的取值要保证 N 是最小的正整数，满足这些条件，正弦序列才是以 N 为周期的周期序列，其周期$N=(2\pi/\omega_0)k$ 。以下分为几种情况讨论：

(1) 当 $2\pi/\omega_0$ 为整数时，只要 $k=1$，$N=2\pi/\omega_0$ 就是最小正整数，所以正弦序列是以 $2\pi/\omega_0$ 为周期的周期序列。例如$\sin(\pi/8)n$ ，$\omega_0=\pi/8$ ，$2\pi/\omega_0=16$，该正弦序列的周期为 16。

(2) $2\pi/\omega_0$ 不是整数，而是一个有理数时，可以表示为分数，设 $2\pi/\omega_0=P/Q$，式中 P、Q 为互质的整数，取 $k=Q$，那么 $N=P$，则$(2\pi/\omega_0)k=(P/Q)k=(N/k)k=N$ ，此时正弦序列是以 $N=P$ 为周期的周期序列。例如$\sin(4/5)\pi n$ ，$\omega_0=(4/5)\pi$ ，$2\pi/\omega_0=5/2$ ，$k=2$，该正弦序列是以 5 为周期的周期序列。

(3) $2\pi/\omega_0$ 是无理数时，则任何整数 k 都不能使 N 为正整数，因此，此时的序列不是周期序列。例如，$\omega_0=1/4$ (rad)，$\sin(\omega_0 n)$不是周期序列。

同样，指数为纯虚数的复指数序列$e^{j\omega_0 n}$的周期性与正弦序列的情况相同。

1.2.1.3 用单位脉冲序列表示任意序列

以上介绍了几种常用的典型序列及周期序列。任意序列常用下面公式表示

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \tag{1-12}$$

其中

$$\delta(n-m)=\begin{cases}1, & n=m\\0, & n\neq m\end{cases}$$

即任意序列都可以用单位脉冲序列的移位加权和来表示。

1.2.1.4 序列的运算

在数字信号处理中，需要对序列进行运算，其基本运算有：

（1）乘法和加法。序列之间的乘法和加法，是指它的同序号的序列值逐项对应相乘和相加。

（2）移位、翻转及尺度变换。设序列$x(n)$如图 1-6a 所示，其移位序列$x(n-n_0)$(当 $n_0=2$ 时）用图 1-6b 表示；当 $n_0>0$ 时称为$x(n)$的延时序列；当 $n_0<0$ 时，称为$x(n)$的超前序列。$x(-n)$则是$x(n)$的翻转序列，如图 1-6c 所示。$x(mn)$是序列每隔 m 点取一点形成的，相当于时间轴 n 压缩了 m 倍。此时，其波形如图 1-6d 所示。

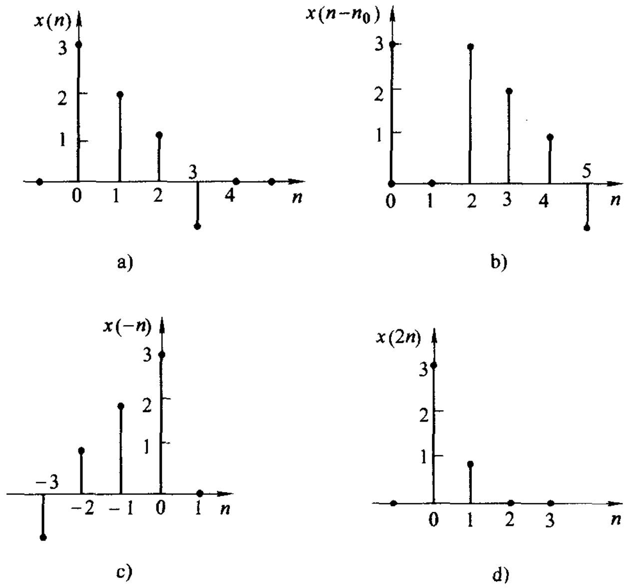


图 1-6　序列的移位、翻转和尺度变换

1.2.2 时域离散系统

设时域离散系统的输入为$x(n)$，经过规定的运算，系统输出序列用$y(n)$表示。设运算关系用$T[\bullet]$表示，输出与输入之间的关系可以表示为

$$y(n)=T[x(n)]$$

如图 1-7 所示。

在时域离散系统中，最常用的是线性时不变系统。很多物理过程都可用线性时不变系统表征，且便于分析。本书所要研究的是线性时不变的离散时间系统。

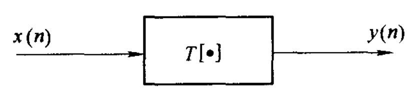


图 1-7　时域离散系统

1.2.2.1 线性系统

设$x_1(n)$和$x_2(n)$分别作为系统的输入序列，其对应的输出分别用$y_1(n)$和$y_2(n)$表示，即

$$y_1(n)=T[x_1(n)]$$

$$y_2(n)=T[x_2(n)]$$

当且仅当

$$T[x_1(n)+x_2(n)]=y_1(n)+y_2(n) \tag{1-13}$$

$$T[ax_1(n)]=ay_1(n) \tag{1-14}$$

时，该系统称为线性系统。以上两式可以合并为

$$\begin{aligned} y(n) &= T[ax_1(n) + bx_2(n)] \\ &= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned} \tag{1-15}$$

式中，a、b 为任意常数。

满足式（1-13）称为线性系统的可加性；满足式（1-14）称为线性系统的比例性或齐次性。

叠加原理包含可加性和齐次性两个性质。如果系统是线性的，则一定满足叠加原理，且满足叠加原理的系统称为线性系统。

例 1-1 证明下面的系统是非线性系统：$y(n)=ax(n)+b$，a 和 b 是常数。

解：

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = ax_1(n) + b$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = ax_2(n) + b$$

$$y(n) = T[x_1(n) + x_2(n)] = ax_1(n) + ax_2(n) + 2b$$

$$y(n) \neq y_1(n) + y_2(n)$$

故不是线性系统。

可见，系统的方程是一个线性方程，但它不一定是线性系统。实际上这个系统的输出可以表示成一个线性系统 $ax(n)$ 的输出与反映该系统初始储能的零输入响应信号之和。很多系统的总输出可以由一个线性系统的响应与一个零输入响应的叠加来构成，这种系统可称为增量线性系统；这类系统的响应对输入中的变化部分是呈线性关系的，即对增量线性系统，任意两个输入的响应的差是两个输入差的线性函数（满足可加性和齐次性）。例如

$$y_1(n) = 4x_1(n) + 3$$

$$y_2(n) = 4x_2(n) + 3$$

则 $$y_1(n) - y_2(n) = 4x_1(n) + 3 - [4x_2(n) + 3] = 4[x_1(n) - x_2(n)]$$

因此该系统是增量线性系统，但不是线性系统。用同样的方法可以证明

$$y(n) = x(n)\sin\left(\frac{2\pi}{5}n + \frac{\pi}{7}\right)$$

是线性系统。

1.2.2.2 时不变系统

如果系统响应与激励加于系统的时刻无关，这种系统称为时不变系统。设系统的输出序列 $y(n)=T[x(n)]$，对于输入移位 n_0 的序列 $x(n-n_0)$，如果是时不变系统，满足下面关系式

$$y(n - n_0) = T[x(n - n_0)] \qquad n_0 \text{ 为任意整数}$$

即输入移动 n_0 位，其输出也移动 n_0 位，而幅值却保持不变。

若系统的输出/输入关系为

$$y(n) = kx(n)$$

如果式中 k 为常数，将 $x(n)$ 移位 n_0，如果是时不变系统，输出 $y_1(n)$ 一定满足下式

$$y_1(n) = kx(n - n_0) = y(n - n_0)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

如果将 k 换成 n，则

$$y(n) = nx(n)$$

$$y_1(n) = T[x(n-n_0)] = nx(n-n_0) \neq y(n-n_0)$$

因此，此系统属于时变系统。

1.2.2.3 线性时不变系统输入/输出的关系

设系统的输入序列 $x(n)=\delta(n)$，系统输出的初始状态为0，定义此时系统输出为系统的单位取样响应 $h(n)$，也就是说，单位取样响应 $h(n)$ 是系统对 $\delta(n)$ 的零状态响应。可表示为

$$h(n) = T[\delta(n)] \tag{1-16}$$

$h(n)$ 和模拟系统中的单位冲激响应 $h(t)$ 一样，都代表系统的时域特征。

设系统输入为一般序列 $x(n)$，依式（1-12）有

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

则系统的输出为

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right]$$

根据线性系统的可加性和比例性

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)]$$

又根据时不变性质

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n) \tag{1-17}$$

式中，“*”代表卷积运算。式（1-17）表示线性时不变系统的输出等于输入序列和该系统的单位取样响应的卷积。

1.2.2.4 系统的因果性与稳定性

系统的因果性是指系统 n 时刻的输出只取决于 n 时刻及 n 时刻以前的输入序列，而与 n 时刻以后的输入序列无关。如果 n 时刻的输出还取决于 n 时刻以后的输入序列，在时间上违背了因果性，系统无法实现，则称为非因果系统，非因果系统是不实际的系统，因此系统的因果性是指系统的可实现性。因果系统也称物理可实现系统，非因果系统也称物理不可实现系统。

线性时不变系统具有因果性的充分必要条件是

$$h(n) = 0 \qquad n < 0 \tag{1-18}$$

这里值得一提的是，模拟非因果系统确实不能实现。对于数字系统，利用系统中数据的存储性能，有些非因果系统可以实现，有些非因果系统可以近似实现，只是系统输出有延迟。

系统的稳定性是指，如果系统的输入有界，则系统输出也是有界的。系统稳定的充分必要条件是系统的单位取样响应绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty \tag{1-19}$$

先证明其充分性：

如果系统的单位取样响应满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=P<\infty$，此时若输入$x(n)$有界，即对于所有 n 都有$|x(n)|\leqslant B$，则

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

$$|y(n)|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)\right|\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)||x(n-k)|$$

因为输入序列$x(n)$有界，即

$$|x(n)|\leqslant B \qquad -\infty<n<\infty, B\text{ 为任意常数}$$

所以

$$|y(n)|\leqslant B\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(n)|=BP<\infty$$

如果系统的单位取样响应$h(n)$满足式（1-19），则输出$y(n)$一定是有界的，即

$$|y(n)|<\infty$$

再证明其必要性（反证法）：

已知系统稳定，如果$h(n)$不满足式（1-19），即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|(h(n)|=\infty$，总可以找到一个或若干个有界的输入使输出无界。例如

$$x(n)=\begin{cases}1, & h(n)\geqslant 0\\ -1, & h(n)<0\end{cases}$$

是有界的输入，$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$，令 $n=0$，则

$$y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\infty$$

说明 $n=0$ 时刻输出为无界，证明了式（1-19）是系统稳定的必要条件。

1.3 序列傅里叶变换

在时域离散信号和系统中，信号用序列表示，其自变量只取整数，取非整数时无定义，系统用差分方程描述，频域分析采用傅里叶变换或 Z 变换作为数学分析工具。其中，傅里叶变换指的是序列的傅里叶变换，和模拟信号的傅里叶变换是不一样的，但有很多类似的性质。这一节介绍序列的傅里叶变换，下一节介绍序列的 Z 变换。

1.3.1 序列傅里叶变换的定义

定义

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{1-20}$$

为序列$x(n)$的傅里叶变换，用 FT（Fourier Transform）表示。FT 成立的充分必要条件是

序列$x(n)$满足绝对可和条件，即满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty \tag{1-21}$$

用$e^{j\omega m}$乘以式（1-20）两边，并在区间$-\pi\sim\pi$内对ω积分，得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}\right]e^{j\omega m}d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(m-n)}d\omega\end{aligned}$$

其中

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(m-n)}d\omega = 2\pi\delta(n-m) \tag{1-22}$$

所以有

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{1-23}$$

式（1-23）是FT的逆变换。式（1-20）和式（1-23）组成一对傅里叶变换公式。

1.3.2 序列傅里叶变换的性质

1.3.2.1 傅里叶变换的周期性

在序列$x(n)$的傅里叶变换中，n取整数，因此下式成立

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\omega+2\pi N)n} \qquad N\text{ 为整数} \tag{1-24}$$

所以序列的傅里叶变换为ω的周期函数，周期是2π。这样$X(e^{j\omega})$可以展开成傅里叶级数，实际上定义式（1-20）已经是傅里叶级数的形式，$x(n)$是傅里叶级数的系数。由于傅里叶变换的周期性，一般只研究$\pm\pi$之间或$0\sim2\pi$之间的傅里叶变换。

1.3.2.2 线性

设$X_1(e^{j\omega})=FT[x_1(n)]$；$X_2(e^{j\omega})=FT[x_2(n)]$，则

$$FT[ax_1(n)+bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega}) \tag{1-25}$$

式中，a、b为常数。

1.3.2.3 时移与频移

设$X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$，则

$$FT[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}) \tag{1-26}$$

$$FT[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \tag{1-27}$$

1.3.2.4 傅里叶变换的对称性

设序列$x_e(n)$满足下式

$$x_e(n) = x_e^*(-n) \tag{1-28}$$

则定义序列$x_e(n)$为共轭对称序列。为了研究共轭对称序列的性质，把$x_e(n)$分成实部与虚部

$$x_e(n) = x_{er}(n)+x_{ei}(n)$$

把上式中的 n 用 $-n$ 代替，并取其共轭，得

$$x_e^*(n) = x_{er}(-n) - jx_{ei}(-n)$$

所以有

$$x_{er}(n) = x_{er}(-n) \tag{1-29}$$

$$x_{ei}(n) = -x_{ei}(-n) \tag{1-30}$$

即共轭对称序列的实部是偶函数，虚部是奇函数。

类似地可以定义满足下式的共轭反对称序列

$$x_o(n) = -x_o^*(-n) \tag{1-31}$$

把$x_o(n)$分成实部与虚部

$$x_o(n) = x_{or}(n) + jx_{oi}(n)$$

有

$$x_{or}(n) = -x_{or}(-n) \tag{1-32}$$

$$x_{oi}(n) = x_{oi}(-n) \tag{1-33}$$

即共轭反对称序列的实部是奇函数，虚部是偶函数。

可以证明一般序列$x(n)$可以由共轭对称分量和共轭反对称分量组成，即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \tag{1-34}$$

式中，$x_e(n)$为共轭对称分量，$x_o(n)$为共轭反对称分量

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \tag{1-35}$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \tag{1-36}$$

对于序列$x(n)$的频域函数$X(e^{j\omega})$也有以上概念和结论，即

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \tag{1-37}$$

式中，$X_e(e^{j\omega})$和$X_o(e^{j\omega})$分别为共轭对称部分和共轭反对称部分，且满足

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \tag{1-38}$$

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}) \tag{1-39}$$

同样满足下面公式

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

下面分两部分讨论傅里叶变换的对称性。

(1) $$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

即将序列$x(n)$分成实部和虚部，对$x(n)$进行傅里叶变换得到

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

其中

$$X_e(e^{j\omega}) = \mathrm{FT}[x_r(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n)e^{-j\omega n}$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \mathrm{FT}[jx_i(n)] = j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i(n)e^{-j\omega n}$$

在上面的式子中，$x_r(n)$和$x_i(n)$都是实数序列。可以证明：$X_e(e^{j\omega})$满足式（1-38），具有共轭对称性，它的实部是偶函数，虚部是奇函数；$X_o(e^{j\omega})$满足式（1-39），具有共轭反对称性，它的实部是奇函数，虚部是偶函数。

综上可得：一般序列中，其实部对应的傅里叶变换具有共轭对称性，其虚部（包括 j）对应的傅里叶变换具有共轭反对称性。

(2)
$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \tag{1-40}$$

即将序列$x(n)$分成共轭对称部分和共轭反对称部分。因为

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

对以上两式分别进行傅里叶变换，得到

$$\mathrm{FT}[x_e(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] = X_R(e^{j\omega})$$

$$\mathrm{FT}[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] = j\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] = jX_I(e^{j\omega})$$

对式（1-40）进行傅里叶变换得

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

上式表示：序列的共轭对称部分$X_e(n)$对应傅里叶变换的实部$X_R(e^{j\omega})$，而序列的共轭反对称部分$x_o(n)$对应傅里叶变换的虚部$jX_I(e^{j\omega})$。

下面利用傅里叶变换的对称性，分析实因果序列$h(n)$的对称性，并推导其偶函数$h_e(n)$和奇函数$h_o(n)$与$h(n)$之间的关系。

因为$h(n)$是实序列，其傅里叶变换只有共轭对称部分$H_e(e^{j\omega})$，共轭反对称部分为零

$$H(e^{j\omega}) = H_e(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

因此实序列的傅里叶变换的实部是偶函数，虚部是奇函数，用公式表示为

$$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega})$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega})$$

其模的二次方$|H(e^{j\omega})|^2 = H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})$是偶函数，相位函数$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg\tan[H_I(e^{j\omega})/H_R(e^{j\omega})]$是奇函数，这和实模拟信号的傅里叶变换有同样的结论。

由式（1-35）和式（1-36）得到

$$h(n) = h_e(n) + h_o(n)$$

$$h_e(n) = \frac{1}{2}[h(n) + h(-n)]$$

$$h_o(n) = \frac{1}{2}[h(n) - h(-n)]$$

因为$h(n)$是实因果序列，$h_e(n)$和$h_o(n)$可以表示为

$$h_e(n)=\begin{cases}h(n), n=0\\ \frac{1}{2}h(n), n>0\\ \frac{1}{2}h(-n), n<0\end{cases} \tag{1-41}$$

$$h_o(n)=\begin{cases}h(n), n=0\\ \frac{1}{2}h(n), n>0\\ -\frac{1}{2}h(-n), n<0\end{cases} \tag{1-42}$$

因此实因果序列$h(n)$可以分别用$h_e(n)$和$h_o(n)$表示为

$$h(n)=h_e(n)u_+(n) \tag{1-43}$$

$$h(n)=h_o(n)u_+(n)+h(0)\delta(n) \tag{1-44}$$

其中

$$u+(n)=\begin{cases}2, n>0\\ 1, n=0\\ 0, n<0\end{cases} \tag{1-45}$$

1.3.2.5 时域卷积定理

设
$$y(n)=x(n)*h(n)$$
则
$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega}) \tag{1-46}$$

证明：
$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

$$Y(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[y(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)\right]e^{-j\omega n}$$

令$k=n-m$，则

$$\begin{aligned}Y(e^{j\omega})&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(k)x(m)e^{-j\omega k}e^{-j\omega m}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{-j\omega m}\\&=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})\end{aligned}$$

该定理说明，两个序列卷积的傅里叶变换满足相乘的关系。对于线性时不变系统，输出的傅里叶变换等于输入信号的傅里叶变换乘以单位脉冲响应的傅里叶变换。因此，在求系统的输出信号时，可以在时域用卷积公式计算，也可以在频域相乘，求出输出的傅里叶变换，再求傅里叶逆变换，得到输出信号。

1.3.2.6 频域卷积定理

设
$$y(n)=x(n)\cdot h(n)$$
则
$$\begin{aligned}Y(e^{j\omega})&=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*H(e^{j\omega})\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta\end{aligned} \tag{1-47}$$

证明：
$$Y(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)h(n)e^{-j\omega n}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com