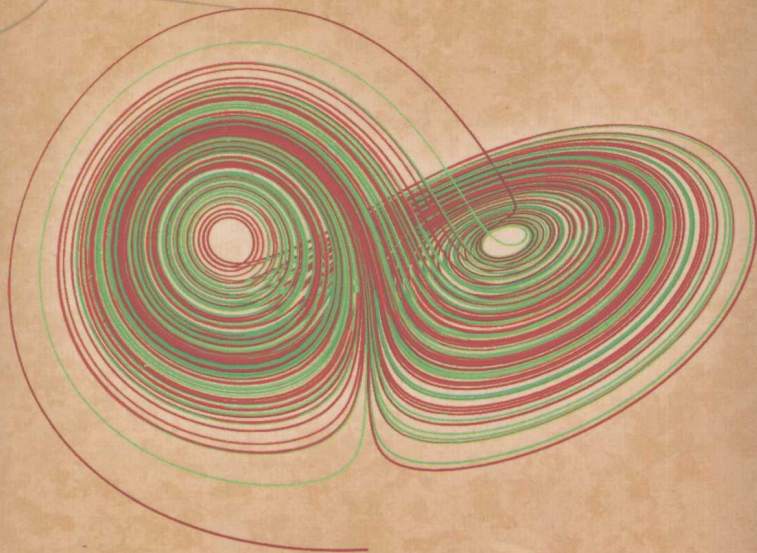


TURING

图灵数学·统计学丛书 19

ELSEVIER
爱思唯尔



Differential Equations, Dynamical
Systems, and an Introduction to Chaos

微分方程、动力系统与混沌导论

(第2版)

Morris W. Hirsch

[美] Stephen Smale 著

Robert L. Devaney

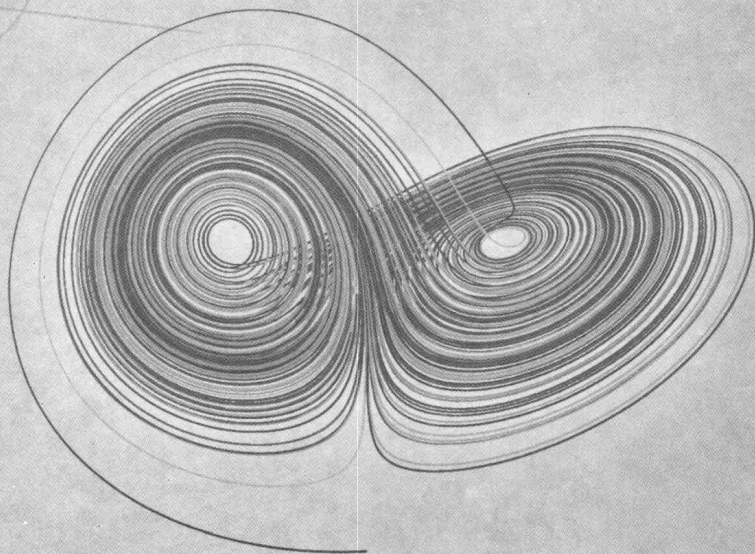
甘少波 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

图灵数学·统计学丛书 19



Differential Equations, Dynamical
Systems, and an Introduction to Chaos

微分方程、动力系统与混沌导论

(第2版)

Morris W. Hirsch

[美] Stephen Smale 著

Robert L. Devaney

甘少波 译

人民邮电出版社
北京

图书在版编目 (CIP) 数据

微分方程、动力系统与混沌导论: 第 2 版 / (美) 赫希 (Hirsch, M. W.), (美) 斯梅尔 (Smale, S.), (美) 德瓦尼 (Devaney, R. L.) 著; 甘少波译. —北京: 人民邮电出版社, 2008.4

(图灵数学·统计学丛书)

ISBN 978-7-115-17218-1

I. 微… II. ①赫…②斯…③德…④甘… III. ①微分方程—高等学校—教材②动力系统(数学)—高等学校—教材③混沌学—高等学校—教材 IV. O175 O415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 180218 号

内 容 提 要

本书主要介绍了线性系统、非线性系统、平面系统、洛伦茨系统、离散动力系统等, 还分别介绍了这些知识在生物学、电路理论、力学等方面的应用. 本书是介绍动力系统最值得推荐的一本经典教材, 它从整体的、动态系统的观点介绍 ODE 的理论. 每章后面都附有颇具参考价值的习题, 可以帮助学生巩固所学知识.

本书适合作为高等院校数学专业以及其他理工科专业高年级学生学习动力系统的教材或参考书.

图灵数学·统计学丛书

微分方程、动力系统与混沌导论(第 2 版)

◆ 著 [美] Morris W. Hirsch Stephen Smale Robert L. Devaney
译 甘少波
责任编辑 明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
北京铭成印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本: 700×1000 1/16
印张: 21.75
字数: 439 千字 2008 年 4 月第 1 版
印数: 1—4 000 册 2008 年 4 月北京第 1 次印刷

· 著作权合同登记号 图字: 01-2007-1483 号

ISBN 978-7-115-17218-1/O1

定价: 59.00 元

· 读者服务热线: (010)88593802 印装质量热线: (010)67129223

反盗版热线: (010)67171154

前 言

自本书第 1 版出版 30 年以来, 动力系统这一数学领域发生了巨大的变化. 在 20 世纪 70 年代早期, 我们很少有机会接触到高速计算机和计算机图形学. 在数学中也从来没有使用过“混沌”一词, 而且只有很少的数学家对微分方程和动力系统感兴趣.

这 30 年来情况发生了极大的变化. 计算机现在到处都是, 人们可以广泛地使用各种软件包来近似计算微分方程的解并将结果用图形显示出来. 如此一来, 分析非线性微分方程系统就变得比以往任何时候都更加容易. 诸如马蹄映射、同宿混沌和洛伦茨系统等复杂动力系统的发现以及数学上对它们的分析使得科学家们相信, 像平衡点或周期解这种简单的稳定运动不再总是微分方程解的最重要行为. 这些漂亮且触手可得的混沌现象促使许多学科的科学家和工程师们更加仔细地考察他们各自领域中的重要微分方程. 在许多情形下, 他们也在这些系统中发现了混沌行为. 如今, 几乎每个学科领域都出现了动力系统现象: 从化学中的振荡 Belousov-Zhabotinsky 反应到电子工程中的混沌 Chua 电路, 从天体力学中的复杂运动到生态学中的分岔.

这样一来, 比起 20 世纪 70 年代, 微分方程和动力系统教材的读者就变得相当庞杂. 在这个版本中我们相应地做了几处结构调整, 这些变化包括:

(1) 线性代数的处理降低了难度. 我们删除了涉及抽象向量空间和赋范线性空间的一般理论, 并且不再完整地证明所有 $n \times n$ 矩阵都可以约化成标准形. 我们将主要处理大小不超过 4×4 的矩阵;

(2) 仔细地讨论了洛伦茨吸引子、Shil'nikov 系统以及双螺线吸引子中的混沌行为;

(3) 添加了许多新的应用, 同时对以前的应用也作了相应的更新;

(4) 专门用几章来讨论离散动力系统;

(5) 主要讨论 C^∞ 系统, 这样就简化了许多定理的假设.

本书由 3 个主要部分构成. 第一部分讨论线性微分方程系统和一些一阶非线性方程. 第二部分是该书的主要部分, 这里我们集中讨论非线性系统特别是二维系统, 以及这些系统在各种领域中的应用. 第三部分讨论高维系统, 这里, 我们着重研究平面系统所不具备的混沌行为, 并介绍研究这种行为的主要手段——约化到一个离散动力系统.

为背景大不相同的读者来写一本书是一个很大的挑战. 我们认为本书可以作为微分方程后续课程的教材, 它的对象不仅仅是数学专业的学生, 而且还包括其他理工科学生, 本书将有助于他们培养出足够多的数学技巧来分析他们各自领域

中的各种微分方程. 使用本书的很多读者可能具有很强的线性代数和实分析背景, 而也有读者可能缺乏这些知识的训练. 为了使本书同时适合这两类读者, 我们开始先介绍了一些简单的低维微分方程系统. 对于有较强微分方程背景的读者来说, 这里大部分内容只不过是复习而已. 为了这些读者, 我们将一些新课题分散在本书的第一部分.

例如, 第 1 章讨论一阶方程. 在这一章的开始, 我们先讨论线性微分方程以及合理生物总量模型 (logistic population model), 只要了解微分方程的读者都应该熟悉这些课题. 复习完这些之后, 我们讨论带收割的合理模型 (logistic model), 这里既有常值收割也有周期收割. 这使得我们可以很快地引入分岔, 以及描述庞加莱映射和周期解. 这些课题通常不会出现在初等微分方程课程中, 但只要学过多元微积分就能很容易地理解这些内容. 当然, 背景有限的读者可以不妨跳过这些专门的课题, 而将注意力集中到更初等一些的内容.

第 2 章到第 6 章讨论线性微分方程系统. 同样地, 开始时很缓慢, 整个第 2 章和第 3 章都只是讨论平面微分方程系统和二维线性代数. 第 5 章和第 6 章介绍了高维线性系统, 然而我们的重点仍然只是三维和四维系统, 而不是最一般的 n 维系统, 虽然我们所描述的许多技巧都可以很容易地推广到更高维情形.

第二部分是本书的核心. 这里我们转而讨论非线性系统. 与线性系统不同, 讨论非线性系统会出现一些理论上的困难, 这些困难包括解的存在性和唯一性, 解对初始条件和参数的连续依赖性, 等等. 我们并不立刻就陷入这些困难的理论问题, 因为讨论这些问题要求相当坚实的实分析基础. 在第 7 章我们只是简单地陈述一些重要结果, 同时通过一些例子来解释这些定理说了些 (和没有说) 什么. 所有这些结果的证明都放在本书的最后一章.

在本书非线性部分开始的几章, 我们介绍了一些重要技巧, 这些技巧包括平衡点附近的线性化、零点集分析 (nullcline analysis)、稳定性、极限集以及分岔理论. 在这一部分的后面几章, 我们将这些想法运用到生物学、电子工程、力学等许多领域中产生的各种系统.

许多章的最后一节都是“探索”. 这些节由一系列的问题和数值研究组成, 它们都是用来讨论与前面内容有关的一个特定课题或应用. 在每个探索中, 我们都简要地介绍了即将要做的课题, 并且提供了进一步了解这一课题的参考文献. 但是, 我们让读者利用前面所学的内容自己去讨论所得出的系统的行为. 我们常常为读者准备一系列的基础问题并经常提示如何去解决, 但是, 在许多情况下, 完全地分析这个系统可能会变成一个大的研究项目. 对于这些问题, 你不可能找到“书后附附的答案”, 在许多情形下, 没有人知道完整答案. (当然, 你本人除外!)

本书的最后一部分专门讨论高维系统的复杂非线性行为, 即所谓的混沌行为. 我们通过著名的洛伦茨微分方程系统来引入这些思想. 在三维和更高维的情形, 我

们常常将理解微分方程复杂行为的问题约化成对一个离散动力系统或迭代映射的理解. 因而我们需要暂时转入离散系统的领域, 同时讨论怎样用符号动力学来完全描述某些混沌系统. 然后我们再回到非线性微分方程, 并将这些技巧运用到其他混沌系统, 其中包括出现同宿轨的系统.

我们有一个网站 <http://www.math.bu.edu/hsd> 专门用来发布与本书有关的消息. 在这里你可以找到本书的勘误表, 或给出你对本书的建议, 这里还有微分方程的教师和学生感兴趣的一些其他课题. 我们欢迎读者在这个站点上踊跃发表意见.

很高兴地感谢 Bard Ermentrout, John Guckenheimer, Tasso Kaper, Jerrold Marsden 和 Gareth Roberts 对本书第 1 版给出的许多好建议. 特别感谢 Daniel Look 和 Richard Moeckel, 他们仔细阅读了整个手稿. 本书中许多相平面图形的绘制都使用了优秀的 Mathematica 宏包 DynPac, 这是 Al Clark 为 Mathematica 写的一个动力系统宏包. 请浏览 <http://www.me.rochester.edu/~clark/dynpac.html>. 而且, 我的小狗 Killer Devaney 又啃光了所有手稿, 残留下来的所有错误都怨它!

致 谢

我们要感谢下面的审稿人：

明尼苏达大学的 Bruce Peckham

匹兹堡大学的 Bard Ermentrout

明尼苏达大学的 Richard Moeckel

加州理工学院的 Jerry Marsden

康奈尔大学的 John Guckenheimer

Holy Cross 学院的 Gareth Roberts

明尼苏达大学的 Rick Moeckel

加州大学圣迭戈分校的 Hans Lindblad

Gustavus Adolphus 学院的 Tom LoFaro

波士顿大学的 Daniel M. Look

目 录

第 1 章 一阶方程	1	5.5 重特征值	75
1.1 最简单的例子	1	5.6 通有性	81
1.2 合理的物种总量模型	3	习题	84
1.3 常值收割与分岔	6	第 6 章 高维线性系统	87
1.4 周期收割与周期解	8	6.1 不同特征值	87
1.5 计算庞加莱映射	10	6.2 调和振子	93
1.6 探索: 一个双参数族	12	6.3 重特征值	98
习题	13	6.4 矩阵指数	100
第 2 章 平面线性系统	16	6.5 非自治线性系统	106
2.1 二阶微分方程	17	习题	111
2.2 平面系统	18	第 7 章 非线性系统	114
2.3 代数预备知识	20	7.1 动力系统	114
2.4 平面线性系统	22	7.2 存在唯一性定理	116
2.5 特征值和特征向量	23	7.3 解的连续依赖性	120
2.6 求解线性系统	25	7.4 变分方程	122
2.7 线性叠加原理	28	7.5 探索: 数值方法	125
习题	28	习题	127
第 3 章 平面系统的相图	31	第 8 章 非线性系统的平衡点	129
3.1 不同实特征值	31	8.1 一些用作说明的例子	129
3.2 复特征值	35	8.2 非线性的汇点和源点	134
3.3 重特征值	38	8.3 鞍点	136
3.4 坐标变换	39	8.4 稳定性	142
习题	45	8.5 分岔	143
第 4 章 平面系统的分类	49	8.6 探索: 复向量场	149
4.1 迹-行列式平面	49	习题	150
4.2 动力学分类	51	第 9 章 大范围的非线性技巧	153
4.3 探索: 一个 3D 参数空间	57	9.1 零点集	153
习题	57	9.2 平衡点的稳定性	157
第 5 章 高维线性代数	59	9.3 梯度系统	165
5.1 线性代数预备知识	59	9.4 哈密顿系统	168
5.2 特征值和特征向量	66	9.5 探索: 具有常值外力的单摆	170
5.3 复特征值	68	习题	171
5.4 基和子空间	71	第 10 章 闭轨和极限集	174
		10.1 极限集	174

10.2	局部截面和流盒	176	14.2	洛伦茨系统的初等性质	246
10.3	庞加莱映射	178	14.3	洛伦茨吸引子	249
10.4	平面动力系统中的单调序列	180	14.4	洛伦茨吸引子的一个模型	252
10.5	庞加莱-本迪克逊定理	182	14.5	混沌吸引子	257
10.6	庞加莱-本迪克逊定理的应用	184	14.6	探索: Rössler 吸引子	261
10.7	探索: 振荡的化学反应	186	习题		262
	习题	187	第 15 章 离散动力系统		264
第 11 章 生物学中的应用		190	15.1	离散动力系统介绍	264
11.1	传染病	190	15.2	分岔	268
11.2	捕食者/猎物系统	193	15.3	离散的合理模型	270
11.3	竞争物种	198	15.4	混沌	273
11.4	探索: 竞争与收割	204	15.5	符号动力学	276
	习题	205	15.6	移位映射	280
第 12 章 电路理论中的应用		208	15.7	三分康托集	282
12.1	RLC 电路	208	15.8	探索: 立方混沌	285
12.2	里纳德方程	211	15.9	探索: 轨道图	285
12.3	范德波方程	212	习题		286
12.4	一个霍普夫分岔	218	第 16 章 同宿现象		290
12.5	探索: 神经动力学	219	16.1	Shil'nikov 系统	290
	习题	220	16.2	马蹄映射	295
第 13 章 力学中的应用		223	16.3	双螺线吸引子	301
13.1	牛顿第二定律	223	16.4	同宿分岔	303
13.2	保守系统	225	16.5	探索: Chua 电路	306
13.3	中心力场	226	习题		307
13.4	牛顿中心力系统	229	第 17 章 再论存在唯一性		309
13.5	开普勒第一定律	233	17.1	存在唯一性定理	309
13.6	二体问题	235	17.2	存在唯一性的证明	310
13.7	吹胀奇点	236	17.3	对初始条件的连续依赖性	316
13.8	探索: 其他中心力问题	240	17.4	延伸解	318
13.9	探索: 量子力学系统的经典 极限	240	17.5	非自治系统	321
	习题	241	17.6	流的可微性	323
第 14 章 洛伦茨系统		244	习题		326
14.1	洛伦茨系统介绍	244	参考文献		329
			索引		332

第1章 一阶方程

本章的目的是提供一些初等但重要的一阶微分方程的例子,同时用这些例子在尽可能简单的情况下去解释常微分方程理论中的一些基本思想.

学过微分方程初级课程的读者应该熟悉本章的前几个例子,后几个例子,如带收割的合理模型,将使得读者对某些特定课题(分岔、周期解和庞加莱映射)有些感性认识.在本书中,我们将经常讨论这些课题;在后面几章,我们将更加系统地讨论这些课题.

1.1 最简单的例子

学过微积分的学生都知道如下的微分方程

$$\frac{dx}{dt} = ax,$$

它是最简单的微分方程,同时也是最重要的微分方程之一.首先,这个方程的含义是什么呢?这里, $x = x(t)$ 是实变量 t 的实值未知函数, dx/dt 是它的导数(以后也用 x' 或 $x'(t)$ 表示导数).另外, a 是一个参数,当 a 取不同的值时,就得到不同的微分方程.方程告诉我们,对于 t 的任一取值,下面的关系成立:

$$x'(t) = ax(t).$$

该方程的解可由微积分得到.设 k 为任一给定的实数,则函数 $x(t) = ke^{at}$ 就是一个解,这是因为

$$x'(t) = ake^{at} = ax(t).$$

并且,这个方程没有其他解.为看清这一点,设 $u(t)$ 为方程的任一解,计算 $u(t)e^{-at}$ 的导数:

$$\frac{d}{dt} (u(t)e^{-at}) = u'(t)e^{-at} + u(t)(-ae^{-at}) = au(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} = 0.$$

从而, $u(t)e^{-at}$ 为一常数 k , 于是 $u(t) = ke^{at}$. 这就证明了我们的断言.于是就找到了这个微分方程的所有可能解.我们把一个微分方程的所有解的全体称为这个方程的**通解**.

当解在一个点 t_0 处的取值 u_0 确定后, 出现在解中的常数 k 就完全确定. 假设满足这个微分方程的函数 $x(t)$ 还要求满足 $x(t_0) = u_0$, 于是我们就必有 $ke^{at_0} = u_0$, 从而 $k = u_0e^{-at_0}$. 这样我们就确定了 k 的取值, 从而这个方程在满足特定**初始条件** $x(t_0) = u_0$ 时有唯一解. 为简单起见, 我们常取 $t_0 = 0$, 此时 $k = u_0$. 在上面取 $t_0 = 0$ 并不失一般性, 因为如果 $u(t)$ 是满足 $u(0) = u_0$ 的解, 则函数 $v(t) = u(t - t_0)$ 就是满足 $v(t_0) = u_0$ 的解.

通常将上面的问题写成**初值问题**的形式:

$$x' = ax, \quad x(0) = u_0.$$

初值问题的一个解 $x(t)$ 不仅要满足微分方程, 而且还要在 $t = 0$ 处取特定的初值 u_0 .

注意这个微分方程在 $k = 0$ 时有一个特别的解, 即常值解 $x(t) \equiv 0$. 像这样的常值解称为该方程的**平衡解**或**平衡点**. 平衡解通常都是微分方程最重要的解.

在方程 $x' = ax$ 中, 常数 a 可以看成是一个参数, 当 a 变化时, 方程就变了, 当然解也要随之变化. 我们能否定性地描述解的变化呢? 这里 a 的符号将是关键:

(1) 如果 $a > 0$, 当 $k > 0$ 时, 极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at}$ 等于 ∞ , 当 $k < 0$ 时, 该极限等于 $-\infty$;

(2) 如果 $a = 0$, ke^{at} 是常数;

(3) 如果 $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = 0$.

通过作解的简图可以形象地描述解的定性行为. 注意当 a 取正值和负值时, 解的行为相当不同. 当 $a > 0$ 时 (见图 1.1), 所有的非零解随着 t 增加都远离平衡点 (在 0 点), 而当 $a < 0$ 时 (见图 1.2), 所有的非零解随着 t 增加都趋于平衡点. 当平衡点附近的解都远离它时, 我们称该平衡点是一个**源点**; 而当附近的解都趋于它时, 该平衡点就称为一个**汇点**.

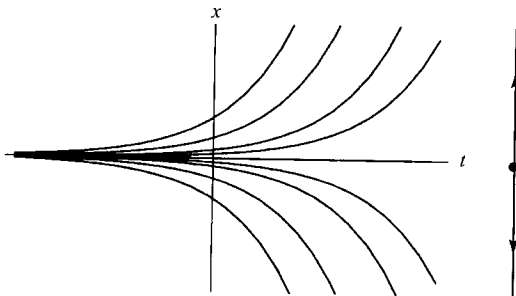


图 1.1 方程 $x' = ax$ 在 $a > 0$ 时解的图像和相线, 其中每一个函数图像都表示一个解

我们还可以将解画在相线(phase line)上来描述解. 因为解 $x(t)$ 为时间的函数, 我们可以将 $x(t)$ 看成一个沿实直线运动的质点. 在平衡点处, 质点保持不动(用一实心圆点表示), 而其他解则沿 x 轴上下运动, 在图 1.1 中用箭头表示.

在某种意义上, 当 $a \neq 0$ 时, 方程 $x' = ax$ 是稳定的. 精确地说, 当 a 用一个与之同号的 b 替换时, 解的定性行为不发生改变. 但当 $a = 0$ 时, a 的微小改变都将根本地改变解的行为. 于是, 我们说单参数微分方程族 $x' = ax$ 在 $a = 0$ 处出现了一个分岔.

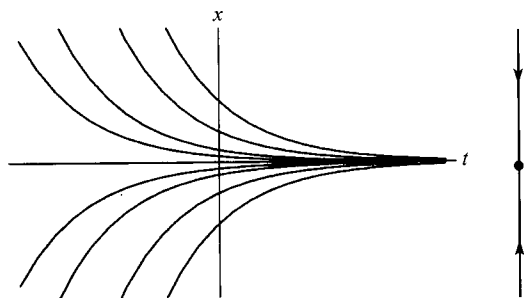


图 1.2 方程 $x' = ax$ 在 $a < 0$ 时解的图像和相线

1.2 合理的物种总量模型

前面的微分方程 $x' = ax (a > 0)$ 可以看成简单的物种总量增长模型. 变量 $x(t)$ 代表某个物种在时刻 t 的总量. 当我们假设总量的增长率(即 dx/dt)与总量成正比时, 就得到该微分方程. 当然, 这一简单的假设忽略了许多影响总量增长的因素, 例如, 实际的总量不可能无限制地增长.

为了在物种总量模型中将这种限制考虑进来, 我们进一步假设:

- (1) 当总量较小时, 总量增长率几乎与总量成正比;
- (2) 但当总量增长到很大时, 增长率就变成负的.

合理总量增长模型就是满足这些假设的一个微分方程, 其方程为

$$x' = ax \left(1 - \frac{x}{N}\right).$$

这里 a 和 N 为正参数: a 为 x 较小时的总量增长率, 而 N 则代表一种“理想”总量或“承载量”. 注意, 当 x 较小时, 该微分方程本质上就是 $x' = ax$ [因为 $1 - (x/N) \approx 1$], 但当 $x > N$ 时, 则有 $x' < 0$. 从而这一简单方程满足上述的假设. 必须说明的是, 有许多其他的微分方程也满足上述假设, 而我们只是选取了差不多最简单的一个.

不失一般性, 我们假设 $N = 1$, 也即选取单位使得承载量正好是 1 单位的总量, 而 $x(t)$ 则代表在 t 时刻的总量占理想总量的比例. 这样合理方程就简化成

$$x' = f_a(x) = ax(1-x).$$

这是一个一阶、自治、非线性微分方程的例子. 之所以称为一阶是因为在方程中只出现了 x 的一阶导数; 称为自治是因为方程的右端只与 x 有关, 而与时间 t 无关; 称为非线性是因为 $f_a(x)$ 是 x 的非线性函数. 前一个例子 $x' = ax$ 则是一阶、自治、线性微分方程.

合理微分方程的解可以很容易地用分离变量得到, 先分离变量再积分就有:

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int a \, dt.$$

然后将左端的被积函数写成部分分式:

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx.$$

分别对等式两端积分, 再求 x 就可以得到

$$x(t) = \frac{Ke^{at}}{1 + Ke^{at}},$$

其中 K 是积分时产生的任意常数. 将 $t = 0$ 代入上式可解得

$$K = \frac{x(0)}{1 - x(0)}.$$

利用这个式子, 可以将解重写为

$$\frac{x(0)e^{at}}{1 - x(0) + x(0)e^{at}}.$$

于是, 上述解的表达式对任意的初始总量 $x(0)$ 都成立. 当 $x(0) = 1$ 时, 因为解为 $x(t) \equiv 1$, 我们得到一个平衡解. 类似地, $x(t) \equiv 0$ 也是一个平衡解.

于是, 我们就有了合理微分方程解的存在性. 但暂时我们还无法保证这就是方程的全部解, 当在第 7 章讨论微分方程解的存在唯一性问题时, 我们会继续研究这一问题.

为了对解的行为有一些定性认识, 我们画出该方程的斜率场. 方程的右端确定了图像的在每一时刻 t 的斜率. 如图 1.3, 在 tx 平面上作一些很短的斜线, 这些短斜线在 (t, x) 点处的斜率为 $ax(1-x)$. 解的图像必须与这个斜率场处处相切. 从图上易见, 所有对应于初值 $x(0) > 0$ 的解都趋向于理想总量 $x(t) \equiv 1$, 这正好与

我们的假设吻合. 当初值 $x(0) < 0$ 时, 解将趋于 $-\infty$. 当然这些解在总量模型中是没有意义的.

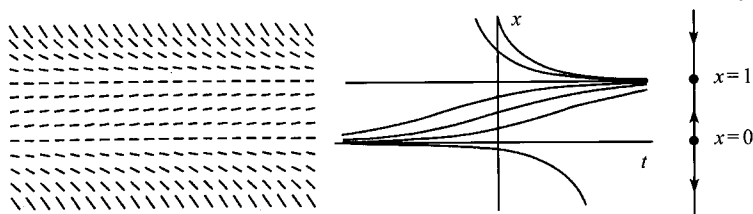


图 1.3 方程 $x' = ax(1-x)$ 的斜率场、解的图像和相线

注意, 我们还可以从函数 $f_a(x) = ax(1-x)$ 的图像上认识这些行为. 该函数图像 (见图 1.4) 与 x 轴交于 $x=0$ 和 $x=1$ 两个点, 这正对应于两个平衡点. 当 $0 < x < 1$ 时, $f_a(x) > 0$, 从而在任何满足 $0 < x < 1$ 的 (t, x) 点处, 斜率为正数, 从而解在这个区域将增加. 而在 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f_a(x) < 0$, 故解将减小, 正如图 1.3 的解的图像和相线所示.

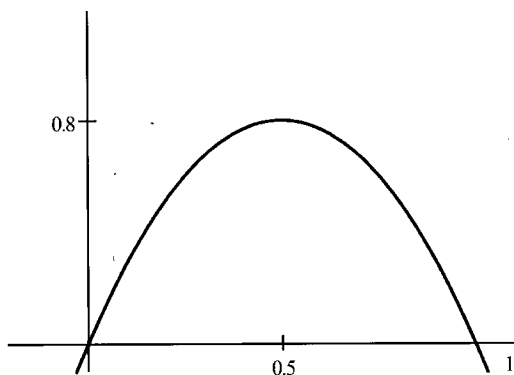


图 1.4 当 $a = 3.2$ 时, 函数 $f_a(x) = ax(1-x)$ 的图像

同样, 我们还可以从 f_a 的图像上看出: $x=0$ 是一源点而 $x=1$ 是一汇点. 在 $x=0$ 附近, 当 $x > 0$ 时, $f_a(x) > 0$, 斜率为正, 解增加; 但当 $x < 0$ 时, $f_a(x) < 0$, 斜率为负, 解减小. 这意味着附近的解都要远离 0, 即 0 为源点. 同样, 1 为汇点.

此外, 我们还可以通过分析得到这些信息. 由于 $f'_a(x) = a - 2ax$, 从而有 $f'_a(0) = a > 0$ 而 $f'_a(1) = -a < 0$. 由于 $f'_a(0) > 0$, 当 x 通过 0 时, 斜率将单调增加, 于是在 $x=0$ 的下方, 斜率取负值, 而在 $x=0$ 的上方, 斜率取正值. 因而, 解要远离 $x=0$. 同样, $f'_a(1) < 0$ 将使得解趋于 $x=1$, 从而使得这个平衡点成为一汇点. 在今后, 我们会遇到很多这样通过计算导数来确定平衡点附近解的定性行为的例子.

例 为了进一步解释这种定性分析的思想,我们来考虑微分方程

$$x' = g(x) = x - x^3.$$

该方程有 3 个平衡点, $x = 0, \pm 1$. 由于 $g'(x) = 1 - 3x^2$, 所以 $g'(0) = 1$, 从而平衡点 0 为一源点. 同样, $g'(\pm 1) = -2$, 所以在 ± 1 处的平衡点为汇点. 在这些平衡点之间的斜率场非零. 利用这些信息, 我们可以立刻作出方程的相线 (见图 1.5). ■

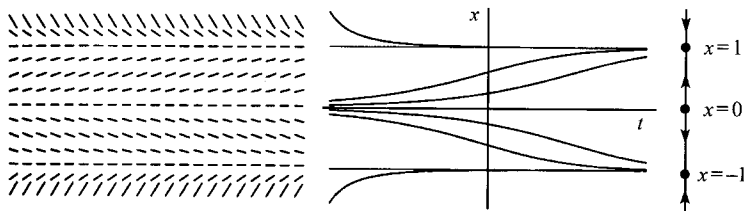


图 1.5 方程 $x' = x - x^3$ 的斜率场、解的图像和相线

1.3 常值收割与分岔

现在将物种的收割考虑进来以修改合理模型. 假设物种遵循参数 $a = 1$ 时的合理假设, 但它们同时以常速率 h 被收割. 此时, 微分方程为

$$x' = x(1 - x) - h,$$

其中 $h \geq 0$ 为一新参数.

下面我们不解方程 (该方程可以解出, 见本章的习题 6) 而直接利用函数

$$f_h(x) = x(1 - x) - h$$

的图像来“读出”解的定性行为. 在 $0 < h < 1/4$, $h = 1/4$ 及 $h > 1/4$ 三种不同的情况下, 图 1.6 作出 f_h 的图像. 直接计算可得: 当 $0 \leq h < 1/4$ 时, f_h 有两个根; 当 $h = 1/4$ 时有一个根; 而当 $h > 1/4$ 时, 没有根 (如图所示). 从而, 在 $0 < h < 1/4$ 时, 该微分方程有两个平衡点 x_l 和 x_r , $0 \leq x_l < x_r$. 容易验证 $f'_h(x_l) > 0$, 于是 x_l 是一源点, 而 $f'_h(x_r) < 0$, 于是 x_r 是一汇点.

当 h 通过 $h = 1/4$ 时, 另一种分岔现象发生了: 当 h 单调增加通过 $1/4$ 时, 两个平衡点 x_l 和 x_r 重合, 而当 $h > 1/4$ 时, 平衡点消失. 事实上, 当 $h > 1/4$ 时, 对所有的 x , 总有 $f_h(x) < 0$. 数学上, 这意味着在将来微分方程的解都要递减到 $-\infty$.

我们用分岔图来形象地记录这些变化. 在该图中, 我们用 h 代表横坐标, 而对应于每一个 h 值, 画出相应的相线. 图中的曲线代表每个 h 值所对应的平衡点. 这

让我们从另一角度看到, 当 h 通过 $1/4$ 时, 源点和汇点融合成一个平衡点, 然后消失 (见图 1.7).

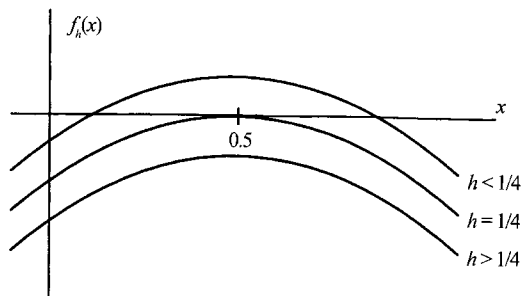


图 1.6 函数 $f_h(x) = x(1-x) - h$ 的图像

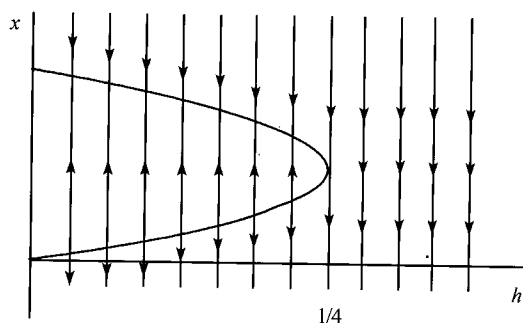


图 1.7 $f_h(x) = x(1-x) - h$ 的分岔图

在生态学上, 这种分岔对应于所研究物种的灾难. 当收割率为 $1/4$ 或更低时, 只要初始总量充分大 ($x(0) \geq x_l$), 总量就能保持. 当 $h = 1/4$ 时, 收割率的微小变化都将导致物种命运的大变化, 例如, 只要收割率 $h > 1/4$, 该物种就要灭绝.

上述现象突出地说明了在微分方程族中觉察到分岔是多么地重要, 在后续章节中, 我们还会经常遇到这种情况. 必须说明的是, 上面的物种总量模型虽然简单, 但它预测收割率微小变化所导致的物种灾难性变化已经在现实中被多次观察到.

例 我们来看另外一种分岔现象. 为此, 我们考虑微分方程族

$$x' = g_a(x) = x^2 - ax = x(x - a),$$

这里 a 为参数. 该方程的平衡点为 $x = 0$ 和 $x = a$. 计算可得 $g'_a(0) = -a$, 从而当 $a > 0$ 时, 0 是一汇点, 而当 $a < 0$ 时, 0 是一源点. 同样, $g'_a(a) = a$, 从而当 $a < 0$ 时, $x = a$ 为汇点, 而当 $a > 0$ 时为源点. 在 $a = 0$ 时出现了分岔, 因为此时, 方程只有一个平衡点. 进一步, 当 a 增加地通过 0 时, 在 $x = 0$ 处的平衡点从源点变为汇点; 与此同时, 在 $x = a$ 处的平衡点从汇点变为源点. 这一分岔图如图 1.8 所示. ■

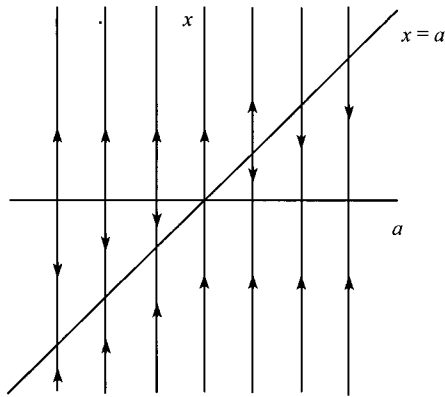


图 1.8 $x' = x^2 - ax$ 的分岔图

1.4 周期收割与周期解

现在不再假设在合理模型中的收割率为常数. 例如, 许多种类鱼群在温暖季节的收割率比在寒冷月份的收割率要高. 于是, 假设物种的收割率是周期变化的.

$$x' = f(t, x) = ax(1 - x) - h(1 + \sin(2\pi t))$$

就是这样的一个模型, 其中 a 和 h 都是正参数 (见图 1.9). 收割率在时刻 $t = \frac{1}{4} + n$ (n 代表年份, n 为整数) 时达到最大值 $-2h$; 而正好在半年后, 即 $t = \frac{3}{4} + n$ 时达到最小值 0 . 注意该微分方程显式地依赖于时间, 从而这是一个非自治的微分方程的例子. 如同在自治情形一样, 该方程的一个解 $x(t)$ 必须对所有的 t 都满足 $x'(t) = f(t, x(t))$. 此外, 该方程不再是可分离变量的, 我们无法用通常微积分的方法求出解的解析表达式, 这迫使我们去采用更加定性化的方法.

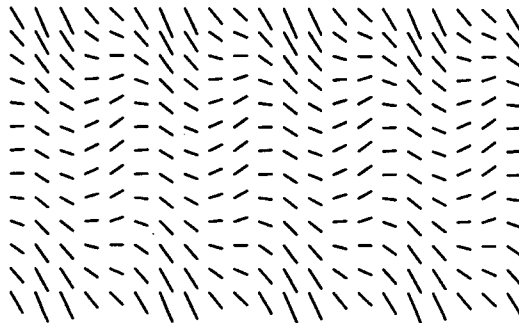


图 1.9 $x' = x(1 - x) - h(1 + \sin(2\pi t))$ 的斜率场