

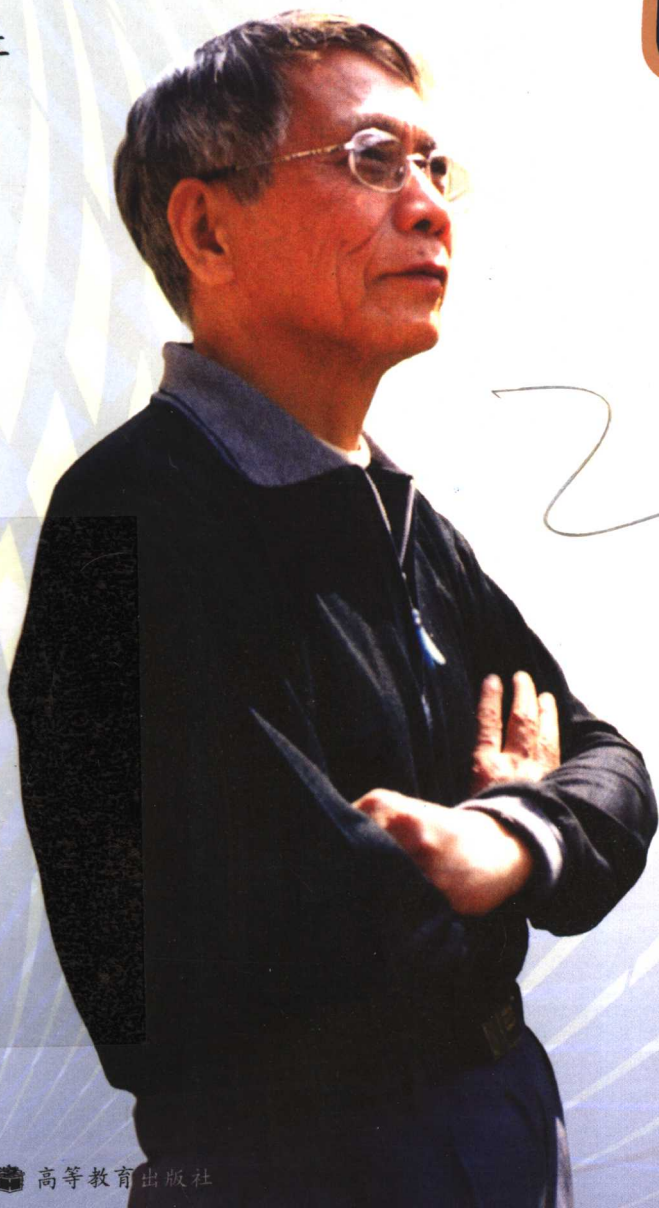
t h e m a t i c s

曹之江 著

谈

名师谈
数学

数学及其优教



01/29

2007

名师谈数学

谈数学及其优教

曹之江 著

高等教育出版社

内容提要

曹之江教授是首届高等学校教学名师奖获得者,本书是他历年来关于数学教育的论述文集,是他近二十余年来工作与思想的结晶,对高等学校数学教育改革开拓了新的认识视野。曹之江教授自1982年起至2000年,一直连续担任教育部数学力学天文学教材编审委员会、数学力学教学指导委员会委员,并均在其中任理科数学组组长。在这期间,他对全国多所高校的数学教学进行深入的调研,进行了广泛的交流,并开创了许多具有建设性意义的工作。在这些实践中,曹之江教授也逐步形成了比较明确而系统的教学思想,并撰写了很多论文和教材,可以说这些成果是高等学校数学教育改革的见证,对今天的教学实践具有积极指导意义。纵观全书,内容充实,观点鲜明、新颖,有很好的现实针对性,具有较高的理论和实践价值。

图书在版编目(CIP)数据

谈数学及其优教/曹之江著. —北京:高等教育出版社,
2007.7

ISBN 978-7-04-021220-4

I. 谈… II. 曹… III. 数学-教学研究-高等学校
IV. O1-42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 071195 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京中科印刷有限公司		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	850×1168 1/32	版 次	2007年7月第1版
印 张	5.125	印 次	2007年7月第1次印刷
字 数	130 000	定 价	7.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 21220-00

写在书前的话

数学,特别是现代形态的数学,是一种很空洞抽象的东西,它是极不易学好的,自然也是极不易教好的。这事我虽然从小就明白,但也许在我的脾性中,有一种专门要与难事周旋的劲,因此在我年轻的时候,竟贸然的定下了以数学教学作为自己一生的事业追求,希望由自己来证明数学并不是注定教不好的。

当然在我刚开始从事教学的时候,只能够凭着自己在中学、大学里学习的经验,和对数学的一点粗浅了解,把课文中的数学逻辑尽量分解得细致些,讲课的语言尽量用得简明平易,以此来求得好一点的教学效果。到了后来,随着知识和经验的积累,才逐渐明白,一个人要真正教好数学,他至少应该明白两件事:

A. 数学究竟是一种什么学问?人们都说数学是一种科学,为什么它是“科学”?谈起科学,我们就会想起生物学、化学、物理学等。譬如生物学,那是研究各类动植物生长发育规律的学问;譬如化学,那是研究各类物质结构及其相互作用的学问;譬如物理学,那更是研究宇宙万物运动形态及其本质的大学问,它们所讨论的,都是世上现实的、具体的物质对象及其运动形态,其研究的目的也是不言而喻的。然而数学的对象却是什么呢?它不是任何实在的物质,而只是一堆用字母表示的符号在推来演去,看上去更像是在一定游戏规则支配着的一盘棋。数学这种东西,它是怎么产生出来的?又是如何演化发展的?它的现实的价值和意义何在?当然一个人若对于这一切并无概念,那么他在学、教数学时自然就不会有自觉性,更遑论发挥什么主观能动性了。

B. 我们应当如何去学习数学,或者说如何才能学好它或教好它?现在学术界普遍有一种观念,即认为数学既是一门科学,也

是一门艺术。对于数学的教学，我们这里也可以说，它既是一种科学，又是一种艺术。说它是一种科学，这是因为数学，如前所云，是一门特殊类型的科学，对于这种特殊的科学，人的大脑在接受它们时，其认知也就不是寻常的那种观察、实验、归纳、检验的程序，而呈现出了特殊的规律性。数学的这种特殊的认知规律性，就意味着数学教学的科学性，一个教师的教学行为，若不遵从数学的认知规律，则这也许是他教学不成功的主因。我们提倡科学的数学教学，就是要大家承认并注重数学的特殊认知规律。承认数学教学的科学性，其标志就是使我们讲授的数学逻辑，变得合乎情理而又明白。我们说数学教学是一种艺术，这是说数学教学还要求教学者有热情和能动的创造性，而这种创造精神，乃是固有的数学艺术美所赋予的，它的标志就是激发人的兴趣和智慧。

回想起来，自己早年时期对于数学教学的认识，委实是十分肤浅的。数学教学如此大面积和长时期的效果不佳，难道仅仅是个人教学技术问题吗？幸运的是我有了一个好的机遇，自20世纪80年代初至90年代末的近二十年内，我有幸参加了教育部的数学力学教学指导委员会（在80年代称为教材编审委员会）工作，有很多机会到国内各高校访问并与高等教育出版社和教育界许多同仁们切磋，这使我大长见识，受到了很多启悟，并逐渐形成了若干系统的认识，我后来就将这些感悟到的道理，逐一记述写成文字，这也就是本书的最初来源。承高等教育出版社的关切，本书今天得以正式出版，这使我感到非常高兴，因为这就使我能够直接与全国的读者同仁进行切磋。据我所知，这是国内出版的第一本专门系统论述数学教学的书，也是第一本以新的观点来审视数学教学的书。现代的教学，站在人类理性主义文化的顶峰，从来是人类现代文明的标志，从某种意义上讲，它也是当代人的一种文化层次的标识。今天，我们地球上几乎每一个受过教育的人，都要在不同层次上接受数学的教育，因此，数学教学乃是当今一个有着十

分现实针对性的问题。几十年来我们天天都在倡导改革,但是对于数学的教学,我们可以说些什么呢?我们为什么不能用一种新的思维方式,即以一种科学的视野,而不仅仅是技术的角度去审视数学的教学呢?

作者

2007年5月10日

目 录

■ 绪言——我的数学教学观	1
■ 现代数学教学的原理和实践(一)	5
■ 现代数学教学的原理和实践(二)	10
■ 漫谈如何教数学	14
■ 什么是实数?(上)	21
■ 什么是实数?(下)	28
■ 数学的个性与数学认知	36
■ 漫谈数学科学的教学研究	43
■ 一项大胆的教育创新工程	47
■ 数学的基础教学要返璞归真	53
■ 微积分学的公理化	56
■ 数学的认知与数学的教学	58
■ 知识与智慧	65
■ 大学数学教育与新世纪人才培养	72
■ 文科教育与数学文化	79
■ 当前高校理科改革刍议	85
■ 论优秀教学及其实现	94
■ 《常微分方程简明教程》序言	98
■ 实数和微积分学	101
■ 代数数与超越数	109
■ 关于学,教和学教	122
■ 附录 1 良工不示人以璞	141
■ 附录 2 曲公“复课闹革命”	147

绪言——我的数学教学观

记得自己年少时，学习是颇为糟糕的。老师讲过的东西，多半是不知所云。平日间只是靠着强记硬背勉强混一点分数，每学期都在升留级线上挣扎。后来学校里来了一位姓高的老师，教我们《三S平面几何》，据云这是一门很难的课，大家不免心怀畏怯。然而这位高老师，却是一个很平和的人，他说话朴实平易，还带点趣味，人们感觉不到他是一个什么人物。他上课条理清晰，思路明白，并常用一些日常事例和小故事来喻说数学，把许多人们感到玄迷的东西讲得入情入理。这样过了半个学期，有一天我脑中突然有了一个闪念：数学原来就是这么回事！从此后学习没有了神秘和畏怯感，成绩也就直升了上去。奇怪的是在不到一年的时间内，其他课程的成绩，竟也跟了上去。后来我自己也在大学里当了数学老师，常听同事们抱怨，花了很大辛苦，学生还是不得要领，学生们也总抱怨数学怎么这么难懂，这就不免使我常常回想起自己学数学的经历，并思索一些问题。

在当今的大学里，数学几乎已经进入了一切专业的课堂，其作为基础课程的地位，日重一日。然而数学在教学上的困难，却并不因为其重要性和地位的加重而有所改善。几十年来，不少有志的同仁在实践上做出了许多改革尝试，企图改变现状，但均收效甚微。看来数学教学所呈现的，并不只是技术和方法上的问题，而有其深刻的科学和文化上的渊源，需要我们去作认真地思索与解析。

一、所谓学习，从心理学上来看，乃是人的大脑的一种认知活动。因而说数学难学，就意味着在数学认知上有不同寻常的难度。为什么会有这个难度？为了探究其缘故，并寻求克服的途径，我们需要考察一下这个认知过程中的客体——数学。现代抽象数

学的任何分支,其内容是完全形式化的,这就是说其符号与语言,没有任何现实的物质含义,这就使得数学呈现出一种“超现实”的品格。而就是这个“超现实性”,使得人们弄不清数学是从哪里来的?有什么用?它究竟是一种什么“学问”?当这些疑问得不到明白的解答,人们在心理上就会形成一种很大的阻抗,阻滞数学知识的灌注和吸收。这一切说明做一名数学教师,不是仅仅照本宣科去讲清楚数学推理就够了,他需要自己先去弄明白上面的道理,去给学生疏通数学认知的通道。

现再回过头看数学的“超现实性”。数学不是从天上掉下来的,它的任何分支都是更初级的内容演化发展的结果,追本溯源,它们都是自现实发端的有源之水,因此数学不可能是真正“超现实”的。它之所以具有“超现实”的形式,事实上,这是由于它的极端的抽象性,即它对物质的无限高度的概括性,这就造成了它失去了一切物质属性。一名数学教师,应当认识并探索数学的哲学内蕴,这是一种既与数学相关又在数学之外的学问,我们应当把这种学问与数学课程内容有机地调和在一起,才可以使数学课变得有生气和可理解。

二、现在来考虑数学认知过程的另一方面,即人的大脑——认知过程中的主体,在接受数学这种特殊的知识时的表现。显然这个过程是不同寻常、非常复杂的,然而却仍然遵循着严格的规律性,这里称之为数学的认知规律。我们的教学行为,若符合这种规律性,就会有效果,若不符合这种规律性,就会事倍功半。在实践中,我们看到有的人,在讲授抽象数学时,自如而游刃有余,可说是把握了数学教学的“门道”,这事实上也是表明他们是自觉或不自觉地掌握了数学的认知规律。因此,认识并掌握数学的认知规律,是提倡并实施科学的数学教学的基础,也是摆脱数学难教难学这一困惑的正确途径。那么,我们怎样去学习掌握数学的认知规律呢?数学的认知,虽然是一个非常现实且有实践价值的课题,但是它同时涉及现代数学和现代心理学两门大学问,因此据笔者所知,

迄今尚未见有人对之进行过系统而有成效的研究,这是很遗憾的。另一方面,认知规律属于精神的或认识领域中的问题,与我们所熟悉的物质运动规律是完全迥异的,它的现象间的因果联系十分复杂而多元,更不能量化,因此不可能指望它能够像物质的机械运动那样,写出几条定律公式来。上面所述说明了,要把握它,主要还须靠我们自己在实践中去思索、揣摩和总结,至少在当前是如此。

三、数学教学,除了要研究它的认知过程,以实施科学的数学教学这个问题之外,尚有一个教学的主导思想,即主要学什么和怎么学的问题,这是一个教学的核心问题,每一位从教的教师,不管他是否自觉到,都必然具有并用以指导自己的教学行为的思想。这个思想,对于数学这样一门抽象的理论学科,尤显突出。当今的数学,已是一个庞大无边的理论体系,它是人类千百年来智慧的结晶,是今天人们汲取知识与智慧的无尽源泉。数学就似一座宝山,一个人有幸进入这个宝山,立刻就会产生一个问题,他应当捡取些什么,才是最有价值的?当然他倘使不识宝,就可能“入宝山而空返”。由于数学的内容,都是一些空泛玄虚的符号,完全不是实物,因此,它们究竟是什么“宝”?价值是什么?这种鉴别力,即前面所提到的“主导思想”,就不是一件简单的事情。

一般认为,教学就是知识的传输,因此数学教学,就是数学知识的传输。然而“数学知识”是一个很大的范畴,现在有的人却把它理解得十分狭窄,认为它们只是指一些“有用”的公式、实例之类,如微积分中的计算体积面积的公式等。这种理解就把数学课变成了一种物算的“雕虫小技”。数学本来就是一种理性的学问,它的丰富的思想、方法是不是应该算为“数学知识”传输给学生?现代的教育学,更视教学不仅是知识的传输,而且也是能力(实验、理性思维等)的培养,而能力的方面甚至比知识方面更重要。若是按这种标准看问题,那么对数学教学而言,这“能力”又是指的什么呢?现在数学界中很多人有一个共识:学习数学,死的公式、教条是无关宏旨的,重要的是要学会从现实中抽象出数学的能力;发展

并完善数学的理论体系的能力；和将数学作用于实际的能力，而为了达到这个目的，我们就需要在教学中坚持严格的数学逻辑演绎思维的训练。我们可以见到有一些教数学的人，让学生背了一堆名词术语而一无所能，可谓入数学的宝山而空返。看来，数学教学中的价值观问题，也是一种不寻常的学问，它涉及的不仅仅是数学功底本身，还关联到自然科学的知识水平和哲学见地。

四、谈到数学教学，我们就不能不提到数学的美学内蕴。不少人把数学看成为枯燥乏味的代名词，避之唯恐不及，这是极大的误解！这有点像中国古代一位楚王，把和氏璧当成顽石的故事。和氏璧看去是一块顽石，但经过解剖、雕琢以后，就成为天下美玉中的极品。数学，作为人类文明与智慧的标识，从它产生之日起，就以其固有的品格——结构的无比严密精巧、论理的美妙绝伦以及内容上惊人的统一性等，令人叹为观止。许多大家把数学直称为一种艺术。人们或许会问，数学是一种没有形体的东西，它的“美”又是什么呢？数学的美，是一种不同寻常的、另一种性质的形态感受，是一种理性主义的结构美。它并不是天赋的自然造型，不是人人能够鉴赏的。数学的美学内蕴，也许是数学教学所涉及的最深层次、最本质的一个问题了。一个从事数学教学的人，不仅要认识到数学的哲学内蕴，也应认识到数学的美学内蕴，这是他得以实施数学优教的重要基础。一个数学教师，不仅要从认识上讲清数学的源流，而且要能从感情上将自己对数学的美学感受，随时传注给学生。

综上所述我们分析了数学教学的四个方面的问题：数学的超现实性；数学的认知规律；数学教学的主导思想；数学的美学内蕴等。由上简述可见，数学的教学，本身就是一宗具有相当深刻性的学术，并具有一定的综合性，更重要的是它有很强的现实针对性和兴趣。本书的宗旨就是希望与广大的读者来共同探索这些问题。由于作者学识所限，所谈不免是肤浅的，更不一定正确，但若能引发起读者们的关注，来共同投入探讨，就遂了作者撰写本书的初衷了。

现代数学教学的原理和实践(一)*

——论数学教学的完全性

(一)

数学,特别是大学里的数学,一向被认为是不好学和不好教的,其授业情况历来不佳。这种状况,尤因为数学在现代科学技术中的日益广阔的应用而更显得问题突出。为了改变这种状况,长期以来,改革数学教学的呼声与浪潮在高校层出不穷,但迄今未见大效,有的甚至愈改愈糟。由于我国教育事业的迅速发展,使得学习数学的需求日高一日,这就进一步促使了各类数学庸教应运而生,并在高校课堂里大行其道,它们以异化了的伪劣数学和虚假成绩,误导学生与社会,粉饰太平。事实上已形成了我国高等理工教育中的大面积的隐伤。

也许有不少的人,并没认识到数学教学本身就是一种涉及认知的心智活动的科学,他们认为,教学不过是知识和能力的简单传输,照本宣科而已,这种看法是肤浅的。我们看到在现实的物质世界的机械运动里,质量与能量的传输就遵循着严格的物理学规律,同样可以想见,在理性世界里,数学的知识与思维能力的传输也遵循着更为高级和复杂的心理学规律。对于前者,我们甚至可以作出精确的定量描述,对于后者虽然我们做不到这点,但它同样是一种不可逾越的冥律。我们的教学行为,只有当它们(自觉或不自觉地)符合这种心理学规律(数学的认知规律)时,它们才能成功,否则它们就注定要失败。因此,从教学的方式方法上来看,数学的教

* 原文刊载于《高等理科教育》2006年第1期。

学可以是一种科学的行为,它也可能是一种不科学的甚至是反科学的行为。今天我们提倡优秀的数学教学,抵制数学庸教,就首先需要思索一下教学的科学性,辨明什么样的数学教学是科学的,什么样的不科学和反科学的。鉴于任何教学过程总包含着内容与方法两个方面,因此下文讨论分别按这两个方面进行。

(二)

大学里任何一门基础性的数学课程,其主体内容不外乎下列三个层次方面:

(A) 符号演算 例如在微积分学(数学分析)课程中的极限演算,导数和各种积分演算等,这部分内容在课程中常占着较大的比例,但却是形式的部分,从而也是比较简单的部分,一般只需将演算规则交代清楚,再辅以若干例题,学生就都不难接受。

(B) 逻辑结构 “结构”一词,在现代科技中多少带着一些神妙的色彩,比如以简单的机械而论,一种机械在装配前,只是一堆死的零部件,若加以精密的装配,就是赋予一种结构,于是这堆零件就会变成为钟表、计算机、电视机、汽车等等,产生出各种奇妙的功能,因此结构是各种机械的灵魂,这里姑不论演变出生命的各种高级物质结构了。我们在大学里攻读的现代数学,它正是一种具有严密的理性结构的文化形态。说到“理性结构”,也许人们会感到很抽象,这是一种思维的组织形态。事实上,任何一种数学,都有很精密而系统的建构性,它的任何章节,所有概念和定理,无不都是由严密的逻辑因果网编织联结在一起的。任何一种数学无不都是在一定公理平台基础上用逻辑构筑起来的一座理性的大厦,理性的结构,虽然不等同于物质的结构,但是它们所产生神妙的构造性功能,却是可以类比的。我们可以说,数学的逻辑结构,乃是数学科学的本质与灵魂,是它的原理与精神的所在,因此在教学上它是绝不容削弱的。

(C) 数学与现实 从形式上看,数学乃是由无物质内容的形

式符号按一定的“游戏规则”所组成的推演系统,它远离人的直接经验,是一种超现实性的东西^[1]。完全纯粹的数学,对于常人来说,无疑是一部“天书”,但这部“天书”却在当今的科学、技术与社会生活中,都有着不可缺少的应用。数学既然是“超现实性”的,它为什么在现实中又是一个不可缺少的角色?作为一种数学的基础课程,它必须要能说明白数学与现实的关系,包括数学是怎样生成发展的?它的价值是什么?它又是如何实现自己价值的?等。这些问题涉及对数学宏观的本质性的认识,它常常不属于照本宣科的材料,而是需要教师的自由发挥。一般来说,数学的内容愈抽象,就愈需要做这方面的补充论述,因此本部分内容与(B)是紧密相关的,它对教师提出了较高的要求。

如上我们分析了一个数学课程,在内容层次上的三个方面。这三个方面在教学中不是孤立的、隔离的,而是有机地组合在一起的,好似一个生命个体,它们的任何身体组成要素,都是不能割裂或缺损一样,作为数学课程中三个有机组成部分,也不能割裂缺损的。然而在实际的数学教学中,这常是不易办到的。由于(A)所述的内容,只涉及机械的符号演算规则,不过是一种形式技术,即使不明了其背景或原理,也是能够照学的,而且它占有了课程主要篇幅,因此它常被人当作数学课程教学内容的主体或全部。至于(B)所述内容,属于数学课程中理性原理部分,不易理解弄懂,它的逻辑论证多涉及演绎思维,更是不好掌握的,因此这部分核心内容被有的人视为数学教学中的畏途,在教学中有意无意地避开不讲或略讲。有的人更是借着“改革”的名义,将它们进行阉割,致使有些基础的数学教材,逻辑结构残缺,有的人还理直气壮地宣称,数学中的逻辑推理和证明,在实际应用中都是“没有用”的,革掉它们是理所当然。发表这种意见的人,他们对数学理解如何,姑且不论,但至少对于数学应用的见解,是大可商榷的。一个应用问题,并不就是去简单地代一个公式或做一道习题演算,而常常需要调动你的广泛的知识,运用你的分析能力,对问题作综合的调查分析

判断,再据此提出解决方案或模型,最后还要经过实践的检验。因此所谓数学的应用,是意味着数学作为一个知识和思维方法的整体综合性运用,就好似一个钟表,它的运作是整个机械结构的整体运作,不能说只有指针是“有用的”,它装在里面看不见的东西都是可以舍弃的,但钟表里的动力装置若舍弃了,钟立即就会停止运转,人们即时就能发现。但是在一门基础性的数学课程中,若数学的核心内容被阉割了,它所造成的隐伤后果,人们是不好发现的。这种把核心内容(B)避开或抛弃了的做法,把正常的数学教学异化为一种“工具箱”和公式的背诵,学生学到的只是一些照猫画虎的小技,毫无真才实学,这种教学是数学教学中地地道道的假冒伪劣产品。一个人若学了这种“数学”,不仅不能去作任何应用,并且对于自己的后继学习,也是有害无益的。这种数学教学乃是当今数学庸教的主要表现形式。

说到数学庸教,我们这里尚需指出另一类型的这种教学,这类教学较多地出现在数学专业的课堂上,它的特征是并不排斥(B)的内容,但却排斥(C)的内容。教师在课堂上只是照本宣科地照讲课文上干巴的定义、定理、证明,对于难懂的抽象演绎论证,并不回避,只是一味照搬,却完全不讲概念的背景、演化与应用,是一种典型的“只讲推理不讲道理”的教学。在这种教学下,学生完全不知其所云,天天“坐飞机”,不堪其苦。然而有的教师却全然不顾,他们认为学数学“本来就是这样的”,不足为怪,学生们“以后慢慢自会懂的”,这样的教学使得数学变成了枯燥乏味的代名词,造成许多人对数学的极大误解与厌恶。如上所说的数学教学,也是一种地地道道的数学庸教,它因为对教师来讲很省力,因此也流毒很广。它与前面提到的在庸俗的“工具主义”思想指导下的庸教,虽然表现形式不同,但它们对我国教育的危害却是异曲同工的,都是应该予以抵制的,综上所述可知,正规的数学教学,必须是兼具(A)、(B)、(C)三种内容层次的完全性教学,因此我们所提倡的优秀的数学教学,它首先在内容上必须是一种完全性的

数学教学。

参 考 文 献

[1] 曹之江. 数学的个性与数学认知(一). 高等理科教育, 2004(4):1~2

[2] 曹之江. 数学的个性与数学认知(二). 高等理科教育, 2004(6):26~28

[3] 曹之江. 漫谈数学科学的教学研究. 大学数学, 2004(4), 20(5):13~14

现代数学教学的原理和实践(二)*

——论数学教学的科学性

(三)

下文我们从教学方法的角度,来探索一下数学优教的原理。一个教学过程,从宏观上来看乃是知识和能力的传输,是一种认知的心智活动过程,而所谓教学方法,乃是为了保证这种认知过程得以实现所采取的教学行为,以及实施这些教学行为的方式和程序。因此一种教学采取什么方法,需要依照认知过程中的主体(受知者)及客体(知识、条件等)的情况来决定,这说明了教学方法具有科学性。我们提倡科学的数学教学,是指教学过程中要采用符合数学认知规律的教学方法。一种教学的认知过程,大体上可区分为两个阶段。第一是对新知识和新概念的认识理解阶段,认识它们的来源、意义和价值,在思想上理解接受,并懂得为什么要学习它们。第二是知识的巩固和掌握运用阶段,这常常需要有更长的时间。对于一般的科学技术课程而言,其认知过程的第一阶段不会有理解上的很大的障碍,譬如动植物的生长发育、天体的运行、分子的结构、汽车的制造等等,虽然都属于复杂的大学问,但是它们所研究的都是现实的物质对象,对此我们只需把问题交代明白,把观察、实验、归纳、分析等过程阐述清楚,人们自然不会感到难以理解,至于在认知的第二阶段,只需主客观条件没有改变,一切也是顺理成章的事情。这说明从教学方法上而言,并不存在复杂的障碍。然而对于数学的学习而言,事情就不完全是这样了。首先数

* 原文刊载于《高等理科教育》2006年第3期。