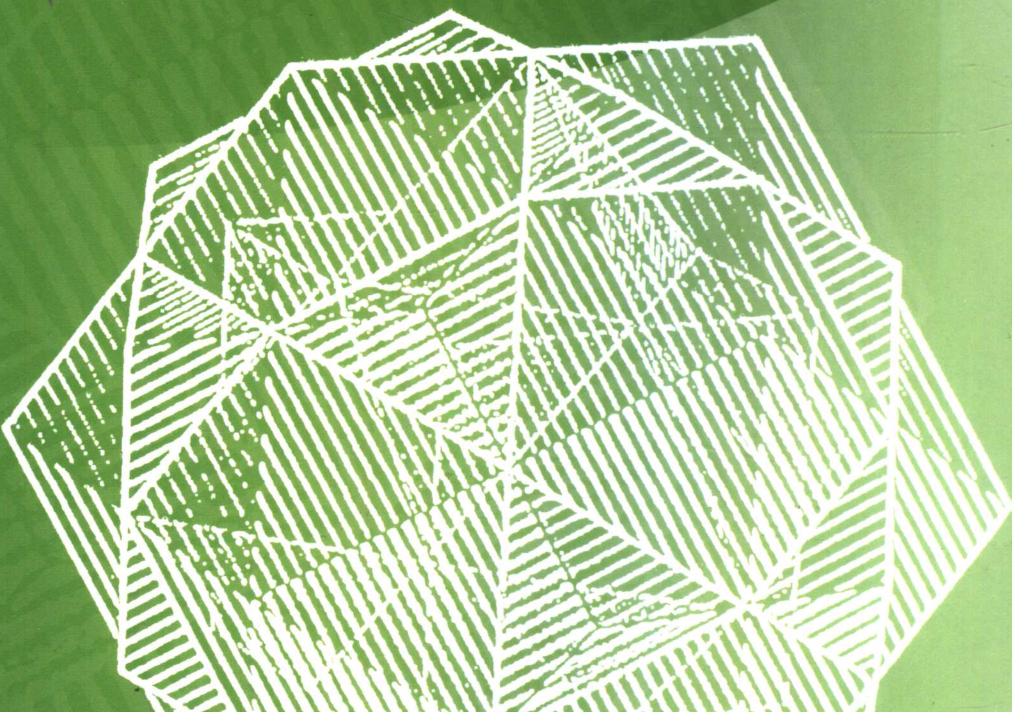
大学数学系列教材

主编 辛小龙 刘新平

概率论与数理统计

贺瑞缠 杨开春 朱科科 查淑玲



高等教育出版社

大 学 数 学 系 列 教 材

主编　辛小龙　刘新平

概率论与数理统计

贺瑞缠　杨开春　朱科科　查淑玲

高等教育出版社

内容提要

本书是由西北大学、陕西师范大学等8所院校联合编写的大学数学系列教材之一，该系列教材共包括《高等数学》(上、下)、《线性代数》及《概率论与数理统计》4册，本书为《概率论与数理统计》，内容包括随机事件及其概率、一元随机变量及其分布、多元随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、样本与抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析、随机过程简介等。

本书是结合多位资深教师丰富的教学经验，根据高等院校理工及师范类专业本科数学基础课程教学要求编写而成。书中内容的陈述力求以“可读性”和“现实性”为目标，将随机变量、分布函数、密度函数等抽象的基础概念，用通俗到位的文字及大家熟悉的实例给予阐述，为其他内容的学习奠定好基础，有利于培养学生抽象思维和逻辑思维的能力、综合运用所学知识分析问题解决问题的能力和自主学习的能力。

本书适合高等院校理工类及师范类专业学生作为教材使用，也可供有关工程技术人员作为参考书使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 辛小龙，刘新平主编. —北京：高等教育出版社，2007.8

ISBN 978-7-04-021940-1

Ⅰ.概… Ⅱ.①辛…②刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第106612号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 郝 林
版式设计 余 杨 **责任校对** 殷 然 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京宏伟双华印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2007年8月第1版
印 张	17.5	**印 次**	2007年8月第1次印刷
字 数	320 000	**定 价**	18.60元

物料号 21940-00

前　言

数学在研究客观世界数量关系与空间形式的过程中，形成了异于其他任何学科的庞大的科学体系，并以其高度的抽象性，逻辑的严谨性及应用的广泛性著称。数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化。能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志。数学教育在培养高素质科学技术人才中具有独特的不可替代的作用。

随着我国改革开放和经济社会的发展，我国高等教育事业也有了长足发展。特别是大学扩招，变原来的“精英教育”为大众教育，引起了生源的变化。所有这些对大学数学教学改革和教材建设提出了新的要求。

多年来，我国也出现了许多优秀的大学数学教材。然而，现有的大多数教材比较适合工科院校的学生。面对扩招以后大学生源的变化，特别相对于综合类、师范类院校的学生，这些教材都有明显的局限性，不适合这类院校学生的学习。因而，编写一套以理工综合类及师范类学生为主要对象的大学数学教材是非常必要的。我们编写的这套系列教材，力争能适合理工综合类及师范类本科生的教育现状，有利于实现该类专业的数学教育目标，适合新世纪人才培养的要求。我们努力在这套系列教材中反映数学教学改革新思路、新方法，期望能成为一套具有自己特色的大学数学教材。

本教材是按照高等理工综合类及师范类本科专业学习本课程都应达到的合理要求编写的，其中带 * 的条目是为某些相关专业选用的，也是对选用专业学生的基本要求。各院校根据自身情况，在达到基本要求的基础上还可以提出一些较高的或特殊的要求。

本套系列教材分《高等数学(上)》、《高等数学(下)》、《线性代数》及《概率论与数理统计》4 本书出版，是西北大学、陕西师范大学、延安大学、陕西理工学院、西安文理学院、宝鸡文理学院、渭南师范学院、咸阳师范学院等 8 所院校的多位资深的数学教师多年来数学教育、教学经验的结晶，其内容选裁、编写体例、阐述方式、习题难度和习题量的安排，都充分考虑了高等理工综合类及师范类本科专业学生学习的需要，并与该类专业相应课程的教学计划相适应。

本系列教材的总主编由西北大学辛小龙教授和陕西师范大学刘新平教授担任。教材封面上的第一署名作者为该本教材的统稿人。教材编写工作的具体分

工如下：

《高等数学(上)》：第一章，陈斯养；第二章，张永锋；第三、四章，薛利敏；第五章，马保国；第六章，阎恩让。

《高等数学(下)》：第七章，曹吉利；第八章，荔炜；第九章，陈斯养；第十章，辛小龙；第十一章，薛西峰。

《线性代数》：邓方安，石超峰，杨闻起，舒尚奇。

《概率论与数理统计》：第一章，朱科科；第二章，冉凯；第三章，杨开春；第四章，查淑玲；第五章，王丰效；第六、八章，刘新平；第七章，张运良；第九、十章及附录，贺瑞缠。

关于教材的编写我们进行了充分的准备工作，由西北大学数学系和高等教育出版社组织以上参编单位的专家教授召开了数次教材编写研讨会，多遍讨论确定了教材编写大纲、教材主要内容和教材编写特色，使得教材的编写工作有分工有合作，有条不紊地进行。

本系列教材的问世，是教育改革的产物。我们感谢西北大学、陕西师范大学等所有参编院校及高等教育出版社，感谢他们在本系列教材组稿、编写和出版全过程中的鼎力支持，他们的诸多辛勤劳动对本书的问世功不可没。他们的指导和帮助使本书能顺利地与读者见面。

新世纪大学数学的教学改革是一项重要而艰巨的大工程。我们力争能贡献得尽可能多。我们虽然已经尽力想把这套教材编写好，但由于水平有限及各方面的诸多原因，书中的缺点、错误乃至问题一定在所难免，恳望同行不吝赐教，诚请读者批评指正。

编　者

2007 年 4 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

自然现象包罗万象，变化无穷，其中某些自然现象的发生有不确定性，比如地震、海啸、飞机失事，摸彩中奖等.对这些现象传统数学研究方法显得力不从心.概率论就是研究这些不确定现象的一种数学方法.

概率论大致起源于17世纪，开始研究的对象是赌博问题，荷兰数学家惠更斯(C. Huygens，1629—1695)发表的《论赌博中的计算》被认为是最早的概率论著作.三百年来，概率论无论是理论还是实际应用都发生了非常大的变化.在理论上由于公理化概率定义的产生使现代概率论有了一系列理论的突破.在实际应用上由于新方法的产生使概率论解决了各个方面的许多实际问题.因而也产生了许多新的分支，如运筹学、控制论，等等.

现在无论是经济生活、社会发展、信息技术还是生物工程，无处不有概率论的身影.计算机的产生和普及更使概率论与数理统计的应用如虎添翼，许多因数据庞大而令人生畏的问题有了解决的可能，使复杂的计算迎刃而解.这就进一步促进了概率论的发展和应用.许多概率与统计软件也应运而生，这些为我们应用概率统计技术提供了极大的方便.在科学技术飞速发展的今天，学习概率统计知识是十分必要的.

§1.1　随机事件

一、随机试验、随机事件及样本空间

在自然科学和社会经济现象的研究中，我们经常遇到这样一种现象：在一定的条件下，它有几种可能的结果，但事先不能确定哪一种结果发生，而事后是明确的.这一类现象我们称为随机现象.例如足球比赛用掷一枚硬币来决定谁先发球.硬币的哪面向上，事先不能确定，因而哪个队先发球也不能确定，但掷后是确定的；用一种新药对一组病人治疗，有疗效的人数事先不能确定，它有好多种可能的结果，但事后有疗效人数是明确的；购买某种股票，明天它的涨跌不能确定，但第二天便见分晓.

随机现象在一次观察中其结果不能确定，但在相同条件下大量重复观察或

试验时，每一种可能结果的出现都有一定的统计规律性.概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

二、随机试验

为了研究随机现象在相同条件下大量重复观察时所呈现出来的这种规律性，我们规定具有如下特点的观察或试验为随机试验.

（1）在相同条件下可以重复进行；

（2）每次试验的结果事先不能确定，但事后是明确的；

（3）事先知道试验可能出现的不同结果（未必有限）.

例如，在福利彩票的抽奖中，从标号0—35的36个乒乓球中随意抽取一个，则抽一次有36种可能结果，事先不能确定抽出哪一个，事后是明确的.在相同条件下，重复抽7次，产生了中奖号码.

又如，电话程控交换机在早上8:00—9:00接到的信号次数，每天都可在相同条件下重复观察，事先不知道有多少信号，但事后明确.

随机试验简称试验，用字母E或E_1，E_2等表示.

三、随机事件

对随机试验的每一个观察结果称为一个随机事件，简称事件，一般用$A,B,C,\cdots$表示，也可以用语言描述加花括号来表示.

随机事件又可以分为基本事件和复合事件，基本事件指不能再分解的事件，复合事件是指由若干基本事件组成的事件.例如，掷一枚骰子，“数字1出现”是基本事件，“偶数出现”是复合事件，因为它可以分解为“数字2出现”和“数字4出现”以及“数字6出现”三个基本事件.

在每一次试验中都必然发生的事件称为必然事件，记成Ω，在每次试验中都不发生的事件称为不可能事件，记成$\varnothing$.

例如：“在常温常压下，水在100℃会沸腾”是必然事件，“人在地球上会飞”是不可能事件.

在福利彩票摇奖时，“数字$i(i=0,1,2,\cdots,35)$出现”是随机事件，我们记成$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_{35}$，$A_i$是基本事件.但研究彩票中奖时，我们关心是否中奖，则把彩票分为中奖彩票和不中奖彩票，这时，“中奖彩票”是基本事件.

程控交换机收到的信号数1，2，3，…是随机事件，“收到第K个信号”是基本事件.这时基本事件数的上限不能确定.

四、样本空间

一个随机试验E所产生的基本事件构成的集合称为样本空间，记为Ω，Ω中

的点即基本事件,称为样本点,记成 ω.

例如,从标号 0,1,2,…,9 的球中任取一个,令基本事件 $\omega_i=\{$取得 i 号球$\}$, $i=0,1,2,\cdots,9$,则 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_9\}$.

程控交换机接到的信号数字 1,2,…. 令 $\omega_i=\{$收到信号为 i 次$\}$, $i=1,2,\cdots$, 则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

测量某地的水温,令 $t=\{$测得的水温为 t℃$\}$. 则 $\Omega=[0,100]$.

随机事件是由基本事件组合而成的复合事件,所以随机事件可以表示为样本空间的子集,随机事件的特征就可以通过样本空间的子集来刻画.

五、事件之间的关系和运算

概率论的任务之一是研究随机事件的规律性,我们希望通过对较简单的随机事件的研究去了解更复杂随机事件的规律,这就需要研究随机事件之间的关系和随机事件之间的运算.

1. 事件的包含和相等

设 A、B 为两事件,若事件 A 发生必导致事件 B 发生,即 A 中每个事件必在 B 中,则称事件 A 包含于事件 B,或称事件 B 包含事件 A,记成 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例如,掷一枚骰子,事件 i 表示 i 向上. 则 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,若 $A=\{2\}$, $B=\{$偶数$\}$,则 $A\subset B$.

若事件 A 包含于事件 B 并且事件 B 包含于事件 A,则称事件 A 与 B 相等,记成 $A=B$.

2. 事件的和(并)

设 A、B 为两事件,"事件 A 或 B 至少一个发生"是一个事件,称这个事件为事件 A 与 B 的和(并)事件,记成 $A\cup B$. 需要说明的是事件 A 与 B 的和包括有 A 发生或 B 发生,或 A、B 同时发生.

例如,从标号为 1,2,3,…,10 的球中任取一个, $A=\{$球的标号为偶数$\}$, $B=\{$球的标号$\leqslant 3\}$,则 $A\cup B=\{$球的标号为 1,2,3,4,6,8,10$\}$.

一般地, n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少发生一个的事件,称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记成 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,我们用 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少发生一个.

3. 事件的积(交)

设 A、B 是两事件,事件 A 与 B 同时发生的事件,称为事件 A 与 B 的积(交),记成 $A\cap B$(简记为 AB).

例如,从标号 1,2,…,10 的乒乓球中任取一个, $A=\{$取到偶数号球$\}$, $B=\{$取到球的号数小于等于 3$\}$,则 $A=\{2,4,6,8,10\}$, $B=\{1,2,3\}$, $A\cap B=\{2\}$.

一般地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生，称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积（交），记成 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，对于无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots$的情况，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$同时发生.

4. 互不相容事件

设 A,B 是两事件，若 A 和 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容事件或互斥事件，例如以上的取乒乓球试验，$A=\{$取得偶数号球$\}$，$B=\{$取得 1 号球$\}$，$AB=\varnothing$，则 A 与 B 互不相容. 事件 A 与 B 互不相容时，A 与 B 的和记成 $A+B$，同样 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，即这 n 个事件中任意两个事件都互不相容. 即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$，$n$ 个互不相容事件的和记成 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

5. 对立事件（互逆事件）

设 A、B 为两事件，Ω 是样本空间，事件 A 与 B 的和是必然事件，且 A 与 B 的积是不可能事件，则称事件 A 是事件 B 的对立事件（或 B 是 A 的对立事件），记成 $A=\overline{B}(B=\overline{A})$.

例如掷一枚硬币，$A=\{$正面向上$\}$，$B=\{$反面向上$\}$，则 A 与 B 至少一个发生，但 A 与 B 不能同时发生，所以 A 是 B 的对立事件.

注意 A 与 B 对立，就有 $AB=\varnothing$，这时必有 A 与 B 互斥，但 A 与 B 互斥未必 A 与 B 对立，因为这时未必有 $A\cup B=\Omega$，例如从标号 $1,2,\cdots,10$ 的乒乓球中任意取一个，$A=\{$取到 2 号球$\}$，$B=\{$取到 3 号球$\}$，则 $AB=\varnothing$，A 与 B 互斥. 但 $A\cup B\neq\Omega$，所以 B 不是 A 的对立事件.

6. 事件的差

设 A、B 为二事件，事件 A 发生而 B 不发生是一个事件，称为事件 A 和 B 的差事件，记成 $A-B$，例如从标号 $1,2,\cdots,10$ 的球中任取一个，$A=\{$取得偶数号球$\}$，$B=\{$取得标号小于 5 的球$\}$，则 $A-B=\{$取得标号 6,8,10 的球$\}$.

利用差事件，A 的对立事件 $\overline{A}$ 可以表示为 $\overline{A}=\Omega-A$.

六、事件运算的性质

我们注意到事件的运算和集合的运算有类似之处，样本空间理解为全集，基本事件理解为集合的元素，则事件的和、积、差运算等同于集合的并、交、差运算，对立事件理解为集合的补集. 互斥事件理解为集合的交是空集. 为便于对照，现把集合所得有关结论和事件的运算对应列成下表：

表 1.1

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间,必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega \in \Omega$	ω 是 Ω 中的元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A \subset \Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 A 包含于集合 B	事件 A 包含于事件 B
$A = B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A \cup B$	集合 A 与 B 之并	事件 A 与 B 至少发生一个
$A \cap B$	集合 A 与 B 之交	事件 A 与 B 同时发生
$\overline{A}$	集合 A 的补集	事件 A 的逆事件
$A - B$	集合 A 与 B 之差	事件 A 发生而 B 不发生
$A \cap B = \varnothing$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互斥

我们可以用平面上的几何图形来表示集合的运算,因此,也可以用几何图形表示事件的运算,如图 1.1

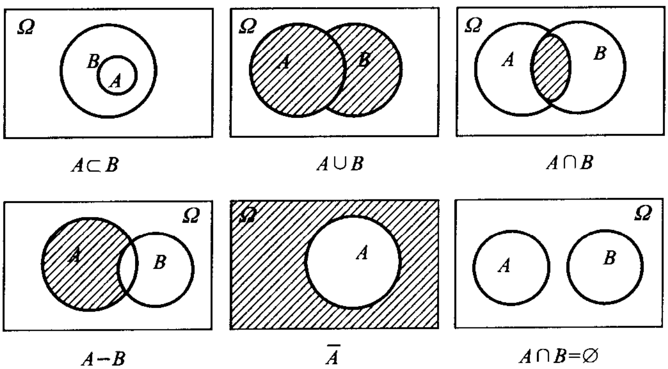


图 1.1

事件的运算和集合的运算类似,则集合运算的某些性质事件运算也应具有,主要有以下法则:

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$;

(2) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $(AB)C = A(BC)$;

(3) 分配律: $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$, $A \cup (BC) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

（4）对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}\right)$.

这里仅证明$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

设 $\omega\in\overline{A\cup B}$，即 $\omega\notin A\cup B$，即 ω 不属于 A 也不属于 B，即 $\omega\in\overline{A}\,\overline{B}$，所以 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\,\overline{B}$，反之 $\omega\in\overline{A}\,\overline{B}$，即 $\omega\in\overline{A}$ 且 $\omega\in\overline{B}$，即 $\omega\notin A$ 且 $\omega\notin B$，即 ω 不属于 A、B 中任一个，即 $\omega\notin A\cup B$，即 $\omega\in\overline{A\cup B}$，所以，$\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\,\overline{B}$，综合即得$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

我们用集合论的语言证明了$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，对于其余各式可以类似证明.

将一个事件分解成若干事件之和或积的方法在概率论中经常应用. 另外事件互不相容概念在应用中经常出现，读者应对这些概念认真体会、准确把握. 以下一些等式在实际中是经常用到的.

$$A\cup A=A,A\cup\Omega=\Omega,A\cup\varnothing=A,$$

$$AA=A,\ A\Omega=A,\ A\varnothing=\varnothing,$$

$$A-B=A-AB=A\overline{B},\ A\cup B=A+B\overline{A}.$$

例 1　设 A、B、C 是三个事件，$A-(B-C)=(A-B)\cup C$，证明 C 是 A 的子事件.

证明　因为

$$\begin{aligned}A-(B-C)&=A-(B\overline{C})=A(\overline{B\overline{C}})=A(\overline{B}\cup\overline{\overline{C}})\\&=A(\overline{B}\cup C)=A\overline{B}\cup AC,\end{aligned}$$

又因为
$$(A-B)\cup C=(A\overline{B})\cup C,$$

所以 $AC=C$，即 C 是 A 的子事件.

例 2　一批产品中有合格品也有次品，从中有放回的抽取（将产品抽出观察后放回）三件产品，以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 次抽到次品，以事件的运算表示下列情况：

（1）第一次和第二次至少抽到一件次品；

（2）只有第一次抽到次品；

（3）三次都抽到次品；

（4）至少有一次抽到次品；

（5）只有一次抽到次品；

（6）没有抽到次品.

解 (1) $A_1 \cup A_2$，(2) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. (3) $A_1A_2A_3$. (4) $A_1\cup A_2\cup A_3$.

(5) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$. (6) $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$或$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

§1.2 随机事件的概率

一、频率及其稳定性

对某一随机现象在相同的条件下观察了 n 次，事件 A 发生了 μ_n 次，我们定义事件 A 发生的频率为

$$f(A) = \frac{\text{事件} A \text{发生的次数}}{\text{观察的总次数}} = \frac{\mu_n}{n}, \tag{1-1}$$

而 μ_n 称为事件 A 发生的频数.

频率具有以下性质：

(1) $0 \leqslant f(A) \leqslant 1$；

(2) 必然事件的频率等于1，不可能事件的频率等于0；

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容，则

$$f(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_m) = f(A_1) + f(A_2) + \cdots + f(A_m).$$

现就 $m=2$ 的情形证明(3). 设在 n 次试验中事件 A_1 发生了 μ_1 次，事件 A_2 发生了 μ_2 次，因此 $f(A_1)=\frac{\mu_1}{n}$，$f(A_2)=\frac{\mu_2}{n}$. 因 A_1, A_2 互不相容，因此事件 $A_1\cup A_2$ 发生了 $\mu_1+\mu_2$ 次，故 $A_1\cup A_2$ 发生的频率

$$f(A_1 \cup A_2) = \frac{\mu_1+\mu_2}{n} = \frac{\mu_1}{n} + \frac{\mu_2}{n} = f(A_1) + f(A_2).$$

频率 $f(A)$ 和试验的次数有关，和事件 A 的性质也有关，但是我们发现在试验次数 n 增大时事件 A 发生的频率呈现某种稳定性，即频率趋近于某一常数，例如关于掷硬币的试验，在试验次数越来越大时，正面向上事件 A 发生的频率趋近于$\frac{1}{2}$. 见表1.2，表中 n 表示试验次数，μ_n 表示正面向上的次数，ω 表示正面向上事件 A 的频率 $f(A)$，$\omega=f(A)=\frac{\mu_n}{n}$.

表 1.2

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	μ_n	ω	μ_n	ω	μ_n	ω
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

我们的目的是要得到随机现象各种可能结果发生的可能性大小的一个数量描述．这个数量反映随机现象的本质，它是事件本身所固有的特征，不以人的主观意志而改变，可以在相同条件下通过大量重复观察来识别和检验；这个数量应符合常情，即事件发生的可能性大，这个数量就大，必然事件的值最大，不可能事件的值最小.

我们把这个刻画随机事件发生可能性大小的数量指标叫做事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$. 以上关于频率的讨论中，事件 A 发生的频率 $f(A)$ 的稳定值

$$P(A)=p, \tag{1-2}$$

就是概率的统计定义.

二、等可能性概型（古典概型）

考虑掷一枚骰子，其每个面向上，即 1,2,3,4,5,6 出现是等可能的，其样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 事件 A“偶数出现”包含“2 出现”，“4 出现”，“6 出现”，这些事件是互不相容的，则 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

像这类样本空间中只含有有限个基本事件，而每个基本事件出现的可能性相等的随机试验还有很多，我们把这一类随机试验称为古典概型.

定义 1.1 若随机试验 E 具备以下两个特征：

(1) 所有可能的试验结果(基本事件)只有有限个；

(2) 每个基本事件发生是等可能的，

则称这样的随机试验为古典概型，这时事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}=\frac{m}{n}. \tag{1-3}$$

以上定义称为概率的古典定义.

例 1 有 10 件产品，其中 2 件次品，无放回地取 3 件. 求：

(1) 这三件产品全是正品的概率；

(2) 这三件产品恰有一件次品的概率；

(3) 这三件产品至少一件是次品的概率.

解 设事件 A 表示“全是正品”，B 表示“仅有一件次品”，C 表示“至少一件次品”.

从 10 件产品中无放回的取 3 件，共有 C_{10}^3 种取法，即样本点总数有 C_{10}^3 个.

(1) 取三件全是正品的取法为 C_8^3 种，所以

$$P(A)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}.$$

(2) 取三件产品仅有一件次品即从 8 件正品中取 2 件，再从 2 件次品中取一件，共有 $C_8^2\cdot C_2^1$ 种取法. 所以

$$P(B)=\frac{C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}.$$

(3) 取 3 件产品至少一件是次品，分为仅有一件是次品和仅有 2 件是次品这两类情况，取法共有 $C_8^2C_2^1+C_8^1C_2^2$ 种. 所以

$$P(C)=\frac{C_8^2C_2^1+C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{64}{120}=\frac{8}{15}.$$

例 2 一个袋子中有 a 个白球，b 个黑球，求：

(1) 无放回的抽取，每次一只，第 k 次才取到白球的概率.

(2) 无放回的抽取，每次一只，第 k 次取到白球的概率.

解 (1) 抽取与次序无关，第 k 次才抽出白球，即前面 $k-1$ 次抽出的都是黑球，第 k 次抽的是白球，共 k 步完成的. $k>b$ 时是必然事件，$k\leqslant b$ 时，第一次从总数 $a+b$ 个球中的 b 个黑球中取一个，第二次从总数 $a+b-1$ 个球中的 $b-1$ 个黑球中取一个…第 $k-1$ 次从总数 $a+b-k+2$ 个球中 $b-k+2$ 个黑球中取一