本书用哲学的观点解读了美国著名数学教育家波利亚的数学解题思想，它将教会你智慧的思维……

哲学的思维与智慧的策略

——数学解题策略与技法导读

李再湘/著

ZHEXUE DE SIWEI YU
ZHIHUI DE CELUE

SHUXUE JIETI CELUE
YU JIFA DAODU

◎这是一本数学教师不可不读的好书
◎这是一本不可多得的学生思维训练读物
◎这是一本并不多见的初高中衔接辅助教材
◎这是数学奥林匹克爱好者必备的参考资料

哲学是望远镜
数学是显微镜

教育科学出版社

哲学的思维与智慧的策略

——数学解题策略与技法导读

李再湘/著

教育科学出版社
·北京·

责任编辑　樊慧英
版式设计　贾艳凤
责任校对　徐　虹
责任印制　曲凤玲

图书在版编目（CIP）数据

哲学的思维与智慧的策略：数学解题策略与技法导读／李冉湘著．—北京：教育科学出版社，2007.5
ISBN 978－7－5041－3745－6

Ⅰ．哲…　Ⅱ．李…　Ⅲ．数学课－中学－课外读物
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 062196 号

出版发行	教育科学出版社		
社　　址	北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号	市场部电话	010－64989009
邮　　编	100101	编辑部电话	010－64989449
传　　真	010－64891796	网　　址	http://www.esph.com.cn
经　　销	各地新华书店		
印　　刷	保定市中画美凯印刷有限公司		
开　　本	880 毫米×1230 毫米　1/32		
印　　张	6.25	版　　次	2007 年 5 月第 1 版
字　　数	160 千	印　　次	2007 年 5 月第 1 次印制
定　　价	9.80 元	印　　数	1—5 000 册

如有印装质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

作者简介

李再湘，男，1963年出生于湖南宁乡，1984年湖南师范大学数学系毕业，1999年毕业于湖南师范大学教育硕士课程班。现为全国著名特级教师、长沙市教科院副院长、长沙市数学学会副理事长，曾荣获第六届“苏步青数学教育奖”，获“长沙市社科优秀人才”称号。先后在全国性刊物发表论文400余篇，主编教学参考书100余部，出版《方法导引与解题技巧》《中学理科教师科研论文导写》《奥林匹克热点问题》等专著。2000年撰写的高等数学论文《数学分析学中凸函数等价条件的探索》荣获世界学术贡献奖。

在书法、文学上另有建树。现为中国书法美术家协会理事，湖南省书法家协会欧阳询书法研究委员会秘书长。其作品曾荣获1993年国际“正大杯”书法篆刻大奖赛特等奖，“兴娄杯”硬笔书法大赛特等奖，毛笔书法2003年荣获纪念毛泽东诞辰110周年中华书画艺术展金奖。著有多部书法专著，其作品刻于山园碑林、炎黄帝碑林，藏于国家博物馆、亚细亚博物馆等。报告文学曾荣获“’94中国鲁迅奖”，其事迹被录入《中国当代教育名人辞典》等20余部辞书。

编者的话

哲学是望远镜，数学是显微镜。本书从宏观和微观两个层面运用哲学的观点，解读了美国著名数学教育家波利亚的数学解题思想，以生动的笔触和崭新的视角展示数学的美，给人以启迪和智慧，从多角度、全方位的思维领域教给读者以智慧的思维方法。

本书以问题为中心，以数学解题思想与策略为主线，选题精当，择例典型，既着眼于新课程背景下的初高中衔接，又关注了学生数学思维训练，同时还特别注重哲学思想的渗透。教会读者从多角度、全方位的思维领域审视问题、解决问题，也为数学奥林匹克竞赛作了正确的导向。全书共五章。第一章作者从感悟经典数学思想的角度，解读了美国著名数学教育家波利亚的“怎样解题”表，并对典型的范例进行了剖析与挖掘，渗透了作者本人智慧的思想和方法，读来耐人寻味。第二章主要从变换思维角度入手，阐述数学思想与解题策略。第三章着重介绍常见而经典的配方法、换元法、待定系数法、构造法、转化法、观察法、反证法、判别式法等多种数学解题方法。第四章从初中数学的一些经典的数学问题着手，探索典型范例的解题技巧与方法，关注过程与方法的教学目标，注重其思想性和趣味性。第五章则为学有余力的学生提供了一个研究性学习的园地，为奥林匹克数学竞赛正确导向。值得一提的是，本章

介绍了一些在同类奥林匹克辅导书中很少见的解题思维方法，如增量方法、斯特温法以及牛顿恒等式等新颖的方法与内容，将有效地扩大学生的知识视野，提高其逻辑思维能力。

本书在编写出版过程中得到了数学界同仁的热情帮助和关心，特别是教育科学出版社的领导和编辑们对本书给予了特别的关爱和支持。由于编写时间仓促，编者水平所限，书中疏漏之处在所难免，希望广大读者批评指正。

李再湘于长沙市教育科学研究院

2007 年 5 月

目　　录

感 悟 篇

策 略 篇

方法篇

技巧篇

应用篇

感 悟 篇

第一章　感悟经典的数学解题思维

——从美国数学教育家波利亚的
“怎样解题”表谈起

一、波利亚的“怎样解题”表

学习数学，离不开解题. 那么，什么叫解题呢？事实上，解题就是从已知到未知的转化. 解题的关键在于解题程序的设计，如何寻找解题思路呢？怎样才算完整地解决了一个问题呢？数学家 G. 波利亚曾设计出一张著名的“怎样解题”表.

“怎样解题”表

弄清问题

第一，你必须弄清问题.	（1）未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知数，条件是否充分？或者是否是多余的？是否是矛盾的？ （2）画一张图，引入适当的符号. （3）把条件的各个部分分开，你能否把它们写下来？

拟订计划

第二，找出已知数	（1）你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？

与未知数之间的联系.

(2) 你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

(3) 看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题.

(4) 这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题. 你能否利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？

如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题.

(5) 你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？

(6) 回到定义去.

(7) 如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题. 你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？或者你能否解决这个问题的一部分？如果仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出一些有用的东西？你能不能想出适合于确定未知数的其他数据？如果需要，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？

你应该最终得出一个求解的计划.

(8) 你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了全部条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

实现计划

第三，实行你的计划.

(1) 实现你的求解计划，检验每一个步骤.

(2) 你能否清楚地看出这些步骤是不是正确的？你能否证明这些步骤是正确的？

回 顾

第四，验算所得到的解.	（1）你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能不能一下子看出它来？ （2）你能不能把这结果或方法用于其他的问题？

这张表看似平淡，实质上内容丰富，值得细细体会，能理解背诵则更好. 下面对解题的各个步骤作简要的具体分析.

（一）认真审题，理解题意

题目给出来以后，在求解之前我们应当仔细读题，认真分析，理解题意，把握问题的条件和要求.

例1 若 $a^2+a=1$，求 a^4-3a^2+2 的值.

【分析】当我们读完这个题目后，我们不难看出本题由以下两部分组成：已知条件和要求.

① 已知条件：未知数 a 满足方程 $a^2+a=1$；

② 题目的要求：求 a^4-3a^2+2 的值.

已知条件可以作以下变形：

① $1=a^2+a$,

② $a^2=1-a$,

③ $1-a^2=a$.

为了解决问题，从问题的条件开始分析，但应始终盯住问题的要求. 必须始终围绕着问题要求来进行，换句话说，分析问题应该始终朝着问题的要求这个方向进行. 条件的变形完成之后，下一步的关键是怎样将问题的要求转化为分解的条件. 于是有：

解法1 原式 $=(a^4-2a^2+1)+(1-a^2)$

$=(1-a^2)^2+(1-a^2)$

$=a^2+a=1.$

解法2 原式 $=(a^2)^2-3a^2+2$

$$=(1-a)^2-3a^2+2$$
$$=1-2a+a^2-3a^2+2$$
$$=3-2(a+a^2)=3-2=1.$$

解法3 原式 $=a^4-3a^2+2(a^2+a)$

$$=a^4-a^2+2a$$
$$=a^4+a^3-a^3-a^2+2a$$
$$=a^2(a^2+a)-a(a^2+a)+2a$$
$$=a^2-a+2a=a^2+a$$
$$=1.$$

【评注】 纵观上述三种解决方法，灵活地运用三个变形的条件，方法灵活，思路自然流畅．很显然，如果不具备认真审题．分析探索的良好习惯，是很难获得优解的．优解的发掘产生有赖于认真的审题．

（二）思索解法，拟订计划

拟订计划，就是探索解题途径，是解题表的第二阶段即酝酿阶段，也是解题的关键环节．在这个阶段，解题者的主要任务，就是在审题的基础上，考虑并解决：

① 所面临的问题能否归结为某种已经熟悉其解法的类型？

② 根据问题的特点，应向哪种类型靠拢？

③ 直接归结为某种类型有困难时，如何变化问题形式，促使其实现转化？

④ 转化过程中，遇到障碍如何处理？

一个正确的解题途径的形成过程是比较复杂的．它涉及解题者的知识因素、解题能力因素和解题经验因素，但就思维方式而言，却只有两种：一种是由因导果；一种是执果索因．

例2 已知 $a^2+c^2=2b^2$，求证：$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{c+a}$.

【分析】 本题如从条件出发，由因导果，困难较大．于是，可

以考虑用执果索因的思维形式来拟订解题的计划.

证明： $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{c+a}\Leftrightarrow\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}=\frac{2}{c+a}$

$$\Leftrightarrow 2(a+b)(b+c)=(c+a)(a+2b+c)$$

$$\Leftrightarrow 2(ab+b^2+ac+bc)=ac+2bc+c^2+a^2+2ab+ac$$

$$\Leftrightarrow 2b^2=a^2+c^2$$

因上述各步都可逆，从而原命题成立.

【评注】 再进一步地想一想：为什么本题由因导果的方法比执果索因要困难得多呢？这是因为本题采用“执果索因”的方式符合“由繁到简”的原则.

（三）实现计划，叙述解法

实现解题计划，即解题的第三阶段. 在这个阶段中，解题者根据所探索的解题思路，制订出具体方案，对每一步进行严格的推导和计算，考虑问题的所有条件（包括隐含条件），步步有理有据地、简洁明了地、层次分明地、规范地把解决问题的全过程完整地表达出来. 表达方式的选择也很重要，我们经常要利用数学语言、图形语言等来表达，表述要自然流畅，准确清晰，简洁明快.

例 3　已知三个数 89、12、3. 现进行如下运算：取其中任意两个数，求其和再除以$\sqrt{2}$，同时，求其差再除以$\sqrt{2}$. 试问：能否经过若干次上述运算，得到三个数 90、10、14？并证明你的结论.

【分析】 对于这个问题要表述清楚实非易事，“经过若干次”是无法直接表述的. 所以，我们要抓住问题的本质特征，选择恰当的表达方式.

解：设 a、b、c 为任意三数，则经过题设的一次运算之后得到的三个数为：$\frac{a+b}{\sqrt{2}}$、$\frac{a-b}{\sqrt{2}}$、c，显然有：

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2=a^2+b^2+c^2.$$

这就是说，每进行一次运算，这三个数的平方和保持不变．因此不论经过多少次题设的运算，所得三个数的平方和都不变，永远是：$89^2+12^2+3^2=8\ 074$．

而 $90^2+10^2+14^2=8\ 396\neq 8\ 074$．

所以，经过题设运算不可能得到90，10，14．

【评注】由此可见，本题的表述紧紧地扣住“三个数的平方和不变”这一重要特征．从而，使要表述的问题清晰明了，通俗易懂，便于理解掌握．

（四）回顾检查，反思探索

回顾检查，即解题的第四阶段，解题者要对解题过程进行如下两方面的工作：

① 检查解题过程，及时发现和纠正错误，使解答正确完整．检查解题思路上是否有逻辑错误？问题的解法是否能推广为一般方法？

② 总结解题经验，扩大解题成果，一题多解，推广问题等．

例4　有1 024名乒乓球运动员进行淘汰赛争夺单打冠军，问一共需要进行多少场比赛？

【分析】我们一般可以拟订两种解题计划：

解法1　每两人比赛一场，则：

第一轮有 $\frac{1\ 024}{2}=512$ 场，

第二轮有 $\frac{512}{2}=256$ 场，

第三轮有 $\frac{256}{2}=128$ 场，

…

最后冠亚军决赛一场，所以共进行了 $512+256+128+\cdots 4+2+1=1\ 023$ 场比赛．