21 世纪高等院校教材

微积分(一)

邹玉仁　何　明　万建香　编著

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

微积分(一)

邹玉仁　何　明　万建香　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据教育部颁布的经济、管理本科专业《经济数学》教学大纲，针对经济数学教学改革的需要，以培养“厚基础、宽口径、高素质”人才为宗旨，系统地介绍了函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及导数的应用、多元函数微分学等内容，在附录部分还安排了 Mathematica 软件在微积分中的应用，以方便学生学习数学实验. 每节后附有练习题，供课后巩固知识使用，每章后附有综合性的习题，供综合训练使用. 本书注重基本知识、基本技能、基本方法的训练以及实际应用能力的培养. 例题和习题选用基础、适中和综合提高三类题目，既照顾一般程度水平的学生要求，也兼顾准备参加硕士研究生入学考试读者的需求.

本书适合经济、管理类等专业的高等院校学生、成人教育学生、参加国家自学考试的学生，以及准备参加经济管理类硕士研究生入学考试的有关人士等.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(一)/邹玉仁，何明，万建香编著. —北京：科学出版社，2007
21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-019658-3

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①邹…②何…③万… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材
Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 126795 号

责任编辑：李鹏奇 胡华强 杨 然 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京智力达印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 8 月第一次印刷 印张：15
印数：1—7 000 字数：287 000

定价：18.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新伟〉)

编写说明

本书是根据国家教育委员会颁布的经济、管理本科专业教学大纲——《经济数学》以及经济数学教学改革的实际需要编写的. 在编写过程中,我们遵循大纲的基本原则和指导思想,在内容选取上适当弱化基本性质、定理的理论推导,注重基本知识、基本技能、基本方法的训练以及实际应用能力的培养,力求做到深入浅出、通俗易懂、突出重点、循序渐进.

本书由江西财经大学信息学院部分教师编写. 其中第 2 章、第 3 章由邹玉仁编写,第 1 章、第 4 章由何明编写,第 5 章、附录由万建香编写.

柳键教授、王肇渝教授对本书的编写给予了热情的关心和指导,他们认真阅读了教材全部内容,提出了许多有价值的意见和建议. 另外,余仲弓教授、邹尚荣副教授也为本书的编写提出了许多宝贵的意见. 借此机会,编者向他们表示深深的谢意.

带 * 号者为选作题目,供学有余力的学生选用.

由于编者水平所限,错误与疏漏在所难免,敬请读者批评指正.

目　　录

编写说明
第 1 章　函数 ………………………………………………………… (1)
1.1　函数及其性质 ………………………………………………… (1)
1.2　经济函数介绍 ………………………………………………… (17)
习题一 ………………………………………………………………… (22)
第 2 章　极限与连续 ………………………………………………… (27)
2.1　数列与函数的极限 …………………………………………… (27)
2.2　极限的性质与运算 …………………………………………… (38)
2.3　极限存在准则及两个重要极限 ……………………………… (43)
2.4　函数的连续性 ………………………………………………… (53)
2.5　货币的时间价值 ……………………………………………… (63)
习题二 ………………………………………………………………… (66)
第 3 章　导数与微分 ………………………………………………… (71)
3.1　导数的概念 …………………………………………………… (71)
3.2　求导基本公式与求导运算法则 ……………………………… (79)
3.3　微分 …………………………………………………………… (88)
3.4　高阶导数和高阶微分 ………………………………………… (94)
3.5　边际与弹性 …………………………………………………… (98)
习题三 ………………………………………………………………… (103)
第 4 章　中值定理及导数的应用 …………………………………… (109)
4.1　微分中值定理 ………………………………………………… (109)
4.2　洛必达法则 …………………………………………………… (115)
4.3　用导数研究函数的单调性、极值和最值 …………………… (121)
4.4　函数曲线的凹向及拐点 ……………………………………… (129)
4.5　曲线的渐近线与函数的作图 ………………………………… (131)
4.6　导数在经济分析中的应用 …………………………………… (136)
习题四 ………………………………………………………………… (141)
第 5 章　多元函数微分学 …………………………………………… (148)
5.1　多元函数基本概念 …………………………………………… (148)

5.2　多元函数的偏导数 …… (160)
5.3　多元函数的全微分 …… (166)
5.4　多元复合函数及隐函数求导法则 …… (171)
5.5　多元函数的极值 …… (181)
5.6　多元函数微分法在经济上的应用 …… (192)
习题五 …… (196)
练习与习题参考答案 …… (202)
附录　Mathematica 软件在微积分中的应用 …… (218)

第1章　函　　数

1.1　函数及其性质

1.1.1　区间和邻域

1. 区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$.

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$(或 $a\leqslant x<b$)的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的半开(或半闭)区间，记作 $(a,b]$ 或 $[a,b)$，即

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\},$$

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}.$$

以上三类区间为有限区间. 有限区间的长度为 $b-a$. 除此之外，还有下面几类无限区间：

(4)
$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},$$
$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}.$$

(5)
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\},$$
$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}.$$

(6)
$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\},$$

即全体实数的集合.

2. 邻域

设 x_0,δ 为两个实数，且 $\delta>0$，则满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的全体实数 x 的集合称为点 x_0 的 δ 邻域，x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径. 点 x_0 的 δ 邻域就是以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$(图 1-1). 其中开区间

$(x_0-\delta, x_0)$称为点 x_0 的左邻域,开区间$(x_0, x_0+\delta)$称为点 x_0 的右邻域.

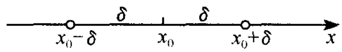

图 1-1

满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切实数 x 的集合,即$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$称为点 x_0 的 δ 空心邻域.

1.1.2　函数的概念

函数是最重要的数学概念之一.微积分学的研究对象就是各类函数(包括初等函数和非初等函数).

我们知道,在同一个自然现象或经济活动中,往往有几个变量同时变化,但是它们的变化不是孤立的,而是按照一定的规律互相联系着,其中一个量的变化会引起另一个量的变化,当前者的值确定时,后者的值按照某种关系随之确定.下面我们要介绍的函数概念,其本质就是变量之间的互相依赖关系.

例 1　某种机器的销售单价为每台 3 万元,销售总收入 R 万元与销售量 x 台的关系是

$$R=3x(x\geqslant 0).$$

当 x 在正整数的范围内任取一个数值时,根据上面的依赖关系,就得到一个确定的 R 值与之对应.

例 2　某城市一年里各月毛线的零售量(单位:百公斤)如下表:

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 s	81	84	45	32	9	5	6	15	94	161	144	123

由上表可以看出,当 t 取$\{1,2,3,\cdots,11,12\}$中的每一个数时,零售量 s 都有一个值与之对应.

上述例子都表达了两个变量之间相互依赖的一种确定关系.这种关系给出了一个对应规则(或法则),根据这一规则,当其中一个变量在某一变化范围内任取一个数值时,另一个变量就有唯一确定的值与之对应,这种两个变量之间的对应规则称为函数关系.

定义 1　已知变量 x 与变量 y,当变量 x 在非空集合 D 内任取一个确定的值时,变量 y 按照一定的对应规则有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$.

其中变量 x 称为自变量,它的取值范围 D 称为函数的定义域;变量 y 称为因变量,它的取值范围称为函数的值域,用 z 表示."f"称为对应规则(或法则).

函数的对应规则 f 和定义域 D 是构成函数的两个基本要素.在给出一个函数时,必须同时具有定义域和对应规则,两者缺一不可,否则就不能构成函数.如果两个函数的定义域和对应规则都相同,则称这两个函数是相同的函数,否则它们为不同的函数.

例 3 判断下列各对函数是否相同:

(1) $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$;　　(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$;

(3) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$;　　(4) $y=x^2$ 与 $s=t^2$.

解 (1) $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$ 是两个不同的函数,因为前者的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,后者的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,两个函数的定义域不同.

(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 是两个不同的函数,因为前者的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,后者的定义域为 $(0,+\infty)$,两个函数的定义域不同.

(3) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是两个不同的函数,因为当 $x<0$ 时,前者的对应规则为 $y=x$,后者的对应规则为 $y=-x$,两者的对应规则并非完全相同.

(4) $y=x^2$ 与 $s=t^2$ 是相同的函数,因为两者的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,且对应规则相同.

1. 函数的定义域的求法

根据要使函数表达式有意义,即

(1) 分式的分母不为零;

(2) 负数不能开偶次方;

(3) 对数的底是非 1 的正数,真数必须大于零;

(4) 对于 $y=\tan x,y=\sec x,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$;对于 $y=\cot x,y=\csc x,x\neq k\pi;k\in\mathbf{Z}$;

(5) 对于反正弦函数 $y=\arcsin x$ 和反余弦函数 $y=\arccos x$,$|x|\leqslant 1$.

按以上要求分别求出自变量 x 的取值范围;若上述几种情况同时出现在同一个函数表达式中,则先分别求出每种情况的自变量取值范围,再取交集即为函数的自然定义域,简称定义域.

例 4 求函数 $f(x)=\frac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$ 的定义域.

解 由题意知

$$\begin{cases}3-x>0,\\ \lg(3-x)\neq 0,\\ 49-x^2\geqslant 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x<3, \\ x\neq 2, \\ -7\leqslant x\leqslant 7. \end{cases}$$

公共部分为

$$-7\leqslant x<2 \text{ 或 } 2<x<3,$$

即定义域为 $D=[-7,2)\cup(2,3)$.

例 5 已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数 $F(x)=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域，其中 $a>0$.

解 由题意知

$$\begin{cases} 0\leqslant x+a\leqslant 1, \\ 0\leqslant x-a\leqslant 1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -a\leqslant x\leqslant 1-a, \\ a\leqslant x\leqslant 1+a. \end{cases}$$

要使不等组有解，即定义域 D 不为空集，注意到题设 $a>0$，则 a 必须满足条件

$$a\leqslant 1-a \quad \text{即} \quad 0<a\leqslant\frac{1}{2},$$

此时，x 的取值范围是

$$a\leqslant x\leqslant 1-a.$$

因此，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$F(x)$ 的定义域为

$$D=[a,1-a];$$

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$F(x)$ 的定义域为 $D=\left\{\frac{1}{2}\right\}$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，定义域为 $D=\Phi$.

通常，书写函数关系时自然定义域可以省去不写. 但如果函数关系是根据实际问题建立的，那么，在求出函数的自然定义域后，还要使实际问题有意义. 根据问题的实际意义确定的定义域不可省略. 如例 1 的收入 R 与销量 x 的函数关系应表达为 $R=3x(x\geqslant 0)$，而不能省略为 $R=3x$.

2. 函数值

当自变量 x 取某一值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 对应的值 $f(x_0)$ 称为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，即 $f(x)|_{x=x_0}=f(x_0)$.

例 6 设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$.

解 因为 $f(x)=\frac{x}{1-x}$,将 $f(x)$中 x 用 $f(x)$代入可得

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}.$$

将 $f(x)$中 x 用 $f[f(x)]$代入得

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}.$$

例 7 已知 $f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x+1}{x+2}$,求 $f(x)$.

解法一 令 $t=\frac{1}{x+1}$,反解得:$x=\frac{1-t}{t}$,将其代入已知条件得

$$f(t)=\frac{\frac{1-t}{t}+1}{\frac{1-t}{t}+2}=\frac{1}{1+t},$$

即

$$f(x)=\frac{1}{1+x}.$$

解法二 因为

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x+1}{x+2}=\frac{1}{\frac{x+1+1}{x+1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{x+1}},$$

所以 $f(t)=\frac{1}{1+t}$,即 $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

3. 函数表示法

常用的函数表示法有以下三种:

(1) 列表法 将一系列自变量的值与对应的函数值列成表,表示自变量与因变量的对应关系,这种表示函数的方法称为函数的列表法.

函数的列表法的优点是可以从表上查到某些自变量的值对应的函数值,给实际应用带来便利.但是,用列表法表示函数不便于作理论研究.

(2) 图示法 用坐标系中的图形表示函数的方法称为函数的图示法.图示法的优点是形象、直观.但是,用图示法表示函数也不便于作理论研究.

(3) 公式法 用数学公式表示函数的方法称为函数的公式法(或解析法).由于公式法便于对函数作理论分析,所以,在微积分学中,表示函数主要用公式法,同

时也用列表法和图示法作为辅助.

在应用公式法表示函数时,函数表达式主要有两种:

(1) 显函数　函数的表达式 $y=f(x)$ 称为函数的显式或显函数. 因为这时很明显,两个相互依赖的变量 x,y 中,因变量 y 在等式的左边,自变量 x 和所有运算符号在等式的右边. 并且在函数定义域内任给一个 x 值,只须经过关于 x 的数学运算,便可得到对应的 y 值. 如 $y=a^{2x}(a>0,a\neq1)$, $y=\lg(x^2+1)$,等等.

(2) 隐函数　关于变量 x 与变量 y 的方程 $F(x,y)=0$,在 x(或 y)的某个取值范围内,任给一个值 x_0(或 y_0),若存在一个或几个 y(或 x)值与之对应,这时 $F(x,y)=0$ 确定了一个函数或几个函数. 所以,方程 $F(x,y)=0$ 也表达了 y 与 x 之间存在函数关系,但是方程并未明确两个变量 y 与 x 中哪一个是因变量,哪一个是自变量. 故称方程 $F(x,y)=0$ 为函数的隐式或隐函数.

本课程以研究显函数为主,适当涉及隐函数.

1.1.3　函数的一些几何特性

1. 函数的奇偶性

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的区间,

(1) 如果对于任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;

(2) 如果对于任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,如 $y=x^2$(图 1-2). 奇函数的图形关于原点对称,如 $y=x^3$(图 1-3).

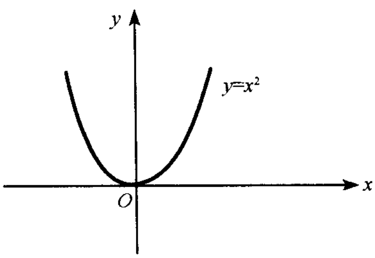

图 1-2

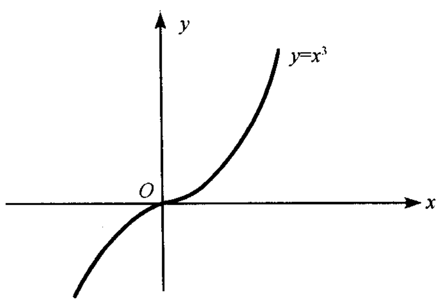

图 1-3

奇函数和偶函数仅仅是函数中的一类特殊的函数. 多数情形下,函数并不具有奇偶性,但是任意一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和. 事实上,令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

$$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

则读者容易验证，$f_1(x)$是偶函数，$f_2(x)$是奇函数，并且

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x).$$

例 8 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(2) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$；

(3) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$；

(4) $f(x)=x+x^2$.

解 (1) 因为 $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数.

(2) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}\\&=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$为奇函数.

(3) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})\\&=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\lg\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$为奇函数.

(4) 因为 $f(-x)=-x+x^2$，既不等于 $f(x)=x+x^2$，也不等于$-f(x)=-x-x^2$，所以 $f(x)$为非奇非偶函数.

2. 函数的周期性

定义 3 对于函数 $y=f(x)$，若存在一个正常数 T，使得对于定义域内的任意 x，均有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数 $y=f(x)$为周期函数，T 为函数的周期. 如果这样的正数有多个，则取 T 为其中最小的. 若在周期函数的定义域内任取两个相邻的，长度为 T 的区间，则在这两个区间内的函数图形完全相同.

例 9　判断下列函数的周期性，并求其周期：

(1) $y=\cos^2 x$；　　(2) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

解　(1) $y=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$，因为 $\cos 2x$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以 $y=\cos^2 x$ 的周期为 π.

(2) 由于 $\sin x$ 的周期为 2π，$\frac{1}{2}\sin 2x$ 的周期为 π，它们的最小公倍数为 2π，所以 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 的周期为 2π.

例 10　设 $f(x)$ 为偶函数，$f(x-2)$ 为奇函数，证明 $f(x)$ 为周期函数，并求其周期.

证明　因为 $f(x-2)$ 为奇函数，所以 $f(-x-2)=-f(x-2)$.

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x-2)=f[-(x+2)]=f(x+2)$. 从而有

$$f(x+2)=-f(x-2).$$

令 $x-2=t$，即 $x=t+2$，将其代入上式得

$$f(t+4)=-f(t),$$

于是

$$\begin{aligned}f(t+8)&=f[(t+4)+4]=-f(t+4)\\&=-[-f(t)]=f(t),\end{aligned}$$

即 $f(x+8)=f(x)$. 故 $f(x)$ 为周期函数，且周期为 $T=8$.

3. 函数的有界性

定义 4　已知函数在区间 I 内有定义，对于区间 I 内任意 x，若存在一个正常数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 内有界，或称 $f(x)$ 是区间 I 内的有界函数；若这样的正常数不存在，则称 $f(x)$ 在区间 I 内无界，或称 $f(x)$ 是区间 I 内的无界函数.

如果函数 $f(x)$ 在其整个定义域内有界，则简称 $f(x)$ 是有界函数. 如 $y=\sin x$，由于在其定义域内，$|\sin x|\leqslant 1$，我们就称 $y=\sin x$ 为有界函数. 值得注意的是，函数的有界性与所指定的区间有关，所以，当指定的区间不是函数整个定义域时，指定的区间不能省略. 如函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，在 $[1,+\infty]$ 内有界.

4. 函数的单调性

定义 5　已知函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于区间 I 内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为区间 I 内的单调增加函数，区间

I 称为 $f(x)$ 的单调增加区间；若总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为区间 I 内的单调减少函数，区间 I 称为 $f(x)$ 的单调减少区间.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数，单调增加区间与单调减少区间统称为单调区间.

单调增加函数的图形沿 x 轴正方向逐渐上升(图 1-4)，单调减少函数的图形沿 x 轴正方向逐渐下降(图 1-5).

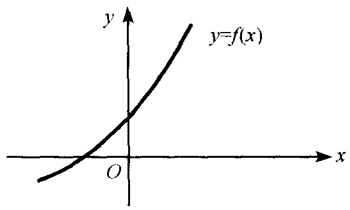

图 1-4

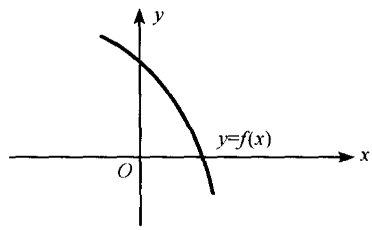

图 1-5

如 $y=2x$ 在其定义域内单调增加，称 $y=2x$ 为单调增加函数；$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，$y=x^2$ 在定义域内不是单调函数.

一般来说，利用定义判断函数的单调性比较难. 我们将在 4.3 节中介绍利用微分法判断函数单调性的方法.

1.1.4 反函数

函数关系中的因变量与自变量可以互相转化. 例如，设某种商品的价格为 p，则该商品的销售收入 y 是销售量 x 的函数 $y=px$. 反之也可以由销售收入 y 确定销售量 x，即销售量 x 也可以是销售收入 y 的函数 $x=\frac{y}{p}$. 在这里，原来的因变量 y 转化为自变量，原来的自变量 x 转化为因变量. 我们称 $y=px$ 为直接函数，$x=\frac{y}{p}$ 为其反函数. 它们在同一坐标系中的图像相同.

定义 6 已知函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 内一一对应，若将 y 作为自变量，x 作为因变量，从 $y=f(x)$ 中可唯一解出 $x=f^{-1}(y)$，则称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

在数学中习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此，往往把函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的自变量 y 改写成 x，因变量 x 改写成 y. 这样，$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 又可写成 $y=f^{-1}(x)$. 值得注意的是，反函数的两种写法 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 表示同一函数，因为这里的函数关系 f^{-1} 并没有改变，只是将字母 x 与 y 互换了. 但是，它们在同一坐标系中的图像不同，而是关于直线 $y=x$ 对称.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的关系：

(1) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数；

(2) 直接函数的定义域、值域分别为反函数的值域、定义域；

(3) 直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称(图 1-6).

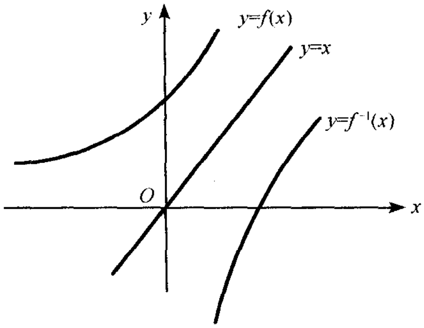

图 1-6

是否所有的函数都有反函数呢？下面的定理将给予明确的回答.

定理 1　函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内存在反函数的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内一一对应.

定理 2　若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内单调，则 $y=f(x)$ 在区间 I 内存在反函数.

证明从略.

注意，函数单调只是反函数存在的充分条件，并非必要条件.

例 11　求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

解　设 $y=f(x)$，即 $y=\sqrt{x}(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$.

由上式可解出 x，得

$$x=y^2\quad(y\geqslant 0),$$

再改写得 $y=x^2(x\geqslant 0)$，因此，原有函数的反函数 $f^{-1}(x)$ 为 $y=x^2(x\geqslant 0)$.

例 12　求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, -3\leqslant x<0,\\ x^2-9, 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

解　设 $y=f(x)$，即

$$y=\begin{cases}x^2, & -3\leqslant x<0,\\ x^2-9, & 0\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

当 $-3\leqslant x<0$ 时，$0<y\leqslant 9$，从 $y=x^2$ 解出 x，得 $x=-\sqrt{y}$，$0<y\leqslant 9$.

当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，$-9\leqslant y\leqslant 0$，从 $y=x^2-9$ 解出 x，得 $x=\sqrt{y+9}$，$-9\leqslant y\leqslant 0$.

综上可得

$$x=\begin{cases}-\sqrt{y}, & 0<y\leqslant 9,\\ \sqrt{y+9}, & -9\leqslant y\leqslant 0.\end{cases}$$

改写成

$$y=\begin{cases}-\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 9,\\ \sqrt{x+9}, & -9\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

故原有函数的反函数 $f^{-1}(x)$ 为

$$y=\begin{cases}-\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 9,\\ \sqrt{x+9}, & -9\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

注意,函数

$$y=\begin{cases}x^2, & -3\leqslant x<0,\\ x^2-9, & 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

存在反函数但并非单调.

1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数共有六大类:常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数.

1) 常量函数 $y=c$(c 为常数)

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,图形为平行于 x 轴,截距为 c 的直线(图 1-7).

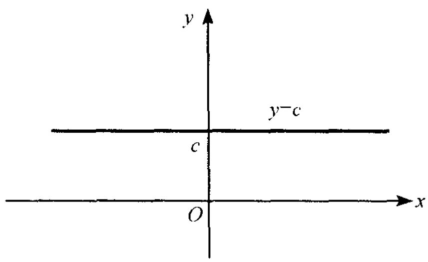

图 1-7

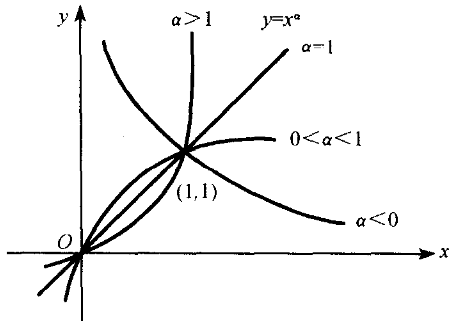

图 1-8

2) 幂函数 $y=x^\alpha$(α 为任意常数)

它的定义域随 α 而异,但不论 α 为何值,它在$(0,+\infty)$内总有定义,而且图形都经过$(1,1)$点(图 1-8).

3) 指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq 1$)

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$;图形通过$(0,1)$点,且总在 x 轴的上方(图 1-9).

当 $a>1$ 时,函数单调增加,当 $0<a<1$ 时,函数单调减少.

4) 对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq 1$)

它的定义域为$(0,+\infty)$,图形都通过$(1,0)$点,且总在 y 轴的右方(图 1-10).当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少.对数函数与指数函数互为反函数.