



教育部高职高专规划教材辅导用书

高等数学—微积分

GAODENGSHUXUEWEIJIFEN

学习指导

XUEXIZHIDAO

主 编 刘学生



中国财政经济出版社

教育部 高职高专规划教材辅导用书

高等数学——微积分 学习指导

刘学生等编

中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学——微积分学习指导/刘学生等编. —北京: 中国财政经济出版社, 2007.3

教育部高职高专规划教材辅导用书

ISBN 978-7-5005-9729-2

I. 高… II. 刘… III. ①高等数学-高等学校: 技术学校-教学参考资料②微积分-高等学校: 技术学校-教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 025482 号

中国财政经济出版社 出版

URL: <http://www.cfeph.cn>

E-mail: cfeph@cfeph.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100036

发行电话: 88190616 88190655 (传真)

北京财经印刷厂印刷 各地新华书店经销

787×960 毫米 16 开 6.75 印张 106 000 字

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月北京第 1 次印刷

定价: 9.00 元

ISBN 978-7-5005-9729-2/O·0058

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

前 言

《高等数学——微积分学习指导》是普通高等教育“十五”国家级规划教材《高等数学——微积分》的配套辅导用书。

全书分章设置，与教材一致，每章按四部分内容编写：

第一部分 课程指导，包括有课程内容提要、学习要求、例题精讲。

第二部分 同步练习，给出课程要求的练习题，题型有填空题、选择题、判断题、计算题、应用题与证明题。

第三部分 自测题，根据教学要求以及本章的知识点设定的题目，供学习者检测之用。

第四部分 参考答案，对同步练习、教材习题、自测题分别给出了答案，以供参考。

辅导教材的突出特点：（1）覆盖面广，对教学要求的知识点，从各种题型和题目多角度进行复习和检测，以达到巩固所学的目的。（2）使用方便，方便自学者配合教材进行学习与复习，特别是方便教师进行习题的讲解。（3）是教材的很好的补充，辅导书的例题、习题是主教材的丰富与补充，会使教学效果达到最佳。

参加本辅导书编写的是大连大学高数教研室

的部分同志，大连理工大学的梁传广、赵振海教授阅读了原稿并提出了一些有益的建议，柳扬、王森参加了本书的编写工作，并由王森整理打印了书稿，在此一并表示感谢。

书中有不妥与遗漏之处，敬请读者批评指正。

编 者

2006 年 12 月

目

录

第一章 函数与极限	(1)
第一部分 课程指导	(1)
第二部分 同步练习	(5)
第三部分 自测题	(9)
第四部分 参考答案	(11)
第二章 导数与微分	(13)
第一部分 课程指导	(13)
第二部分 同步练习	(19)
第三部分 自测题	(24)
第四部分 参考答案	(27)
第三章 中值定理与导数的应用	(29)
第一部分 课程指导	(29)
第二部分 同步练习	(36)
第三部分 自测题	(41)
第四部分 参考答案	(43)
第四、五章 不定积分及定积分的计算	(45)
第一部分 课程指导	(45)
第二部分 同步练习	(54)
第三部分 自测题	(59)

第四部分 参考答案.....	(62)
第六章 多元函数微积分.....	(65)
第一部分 课程指导.....	(65)
第二部分 同步练习.....	(69)
第三部分 自测题.....	(73)
第四部分 参考答案.....	(77)
第七章 无穷级数.....	(79)
第一部分 课程指导.....	(79)
第二部分 同步练习.....	(84)
第三部分 自测题.....	(88)
第四部分 参考答案.....	(91)
第八章 常微分方程.....	(93)
第一部分 课程指导.....	(93)
第二部分 同步练习.....	(96)
第三部分 自测题.....	(98)
第四部分 参考答案.....	(100)

第一章

函数与极限

第一部分

课程指导

一、内容提要

本章内容主要为：函数、极限、函数的连续性，它们之间的关系是：函数是微积分的研究对象，极限是微积分研究的基本方法，连续性是用极限研究函数所得到的第一个认识。

1. 函数定义的两个要素：(1) 函数的定义域；(2) 函数的对应法则；而函数的值域可看作派生要素，我们可从这两要素出发来学习函数的概念。函数部分的内容包括：函数定义，函数表示，函数的性质，反函数和复合函数，有了函数的概念后，本章还介绍了研究对象——函数的主要部分，基本初等函数以及由此构成的初等函数。

2. 极限部分的内容，它包括极限定义，函数的左、右极限，无穷小量和无穷大量，极限的运算法则以及两个重要极限。

3. 函数的连续性包括函数连续的定义，函数的间断点，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质。

二、学习要求

1. 理解函数的定义，了解函数的表示法及函数的性质，会分析复合函数的复合过程，熟悉基本初等函数。

2. 了解极限的定义以及函数的左、右极限；了解无穷大量和无穷小量。

掌握极限的运算法则，会用两个重要极限求极限。

3. 理解函数连续的定义，会判断间断点的类型。知道初等函数的连续性。知道在闭区间上连续函数的性质。

三、例题精讲

1. 函数概念问题

函数定义应以两个要素为主去分析一切问题。

(1) 分段函数问题，分段函数是由几个式子表示的一个函数，在其定义域的不同范围函数表示的式子不同。

例1 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1}{1-x}, & x > 0 \end{cases}$ ，求(1)函数的定义域 $D(f)$ ；(2)求函数值 $f(2)$ ， $f(-1)$ 。

解：(1) 因为 $x=1$ 时 $\frac{1}{x-1}$ 无意义，所以定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

$$(2) f(-1) = (1+x^2) \Big|_{x=-1} = 2$$

$$f(2) = \frac{1}{1-x} \Big|_{x=2} = -1$$

(2) 函数是两个或几个函数复合而成的情况。

例2 设 $y=f(x)$ ， $x \in [0, 4]$ ，求 $f(x^2)$ ， $f(x+5)+f(1-x)$ 的定义域。

解：因为 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$ ，对于 $f(x^2)$ 应有 $0 \leq x^2 \leq 4$ ，解得 $-2 \leq x \leq 2$ ，所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-2, 2]$ 。

对于 $f(x+5)+f(1-x)$ 应有 $\begin{cases} 0 \leq x+5 \leq 4 \\ 0 \leq 1-x \leq 4 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -5 \leq x \leq -1 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$ 解得 $-3 \leq x \leq -1$ ，所以 $f(x+5)+f(1-x)$ 的定义域为 $[-3, -1]$ 。

例3 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ， $(x > 0)$ ，求 $f(x)$ 。

解：令 $\frac{1}{x} = t$ ，则 $f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t}$ ，所以 $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} (x > 0)$ 。

2. 极限问题

极限问题分为极限概念问题和极限运算问题

(1) 有极限的函数与无穷小量的关系

变量以 A 为极限的充要条件是变量可表示成 A 加上一个无穷小量. 这就表明关于极限的研究可以归结为无穷小量的研究, 这也足以说明无穷小量的重要性.

(2) 关于极限的求法问题

由于初等函数的连续性, 大部分的极限可以利用 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$ 而求得. 除此之外的情况, 就是我们称之为不定式的情况, 它们可以借助以下方法求得.

①利用初等变换(因式分解、通分、根式有理化、分子分母同乘或同除以等)求极限;

②利用两个重要极限, 求极限;

③利用有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量, 求极限;

④利用无穷小量与无穷大量的关系, 求极限;

⑤利用左右极限存在定理, 求极限;

⑥利用等价无穷小量代换, 求极限.

下面是一些常用的等价无穷小量.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $(1+x)^a - 1 \sim ax$, $a^x - 1 \sim x \ln a$ ($a > 0, a \neq$

1)

例 4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$

解法 1 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{(\sqrt[3]{x} - 1)^2 (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)^2} = \frac{1}{9}$

解法 2 令 $\sqrt[3]{x} = t$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$, 则有

原式 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 2t + 1}{(t^3 - 1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(t^2 + t + 1)^2} = \frac{1}{9}$

例 5 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$

解法 1 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x\sin x - \cos^2 x}{\sin^2 \frac{x}{2} (\sqrt{1+x\sin x} + \cos x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sin x + x)}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2} (\sin x + x)}{\sin \frac{x}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cos \frac{x}{2} + \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \right) \cos \frac{x}{2} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法 2} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{\frac{x^2}{4}} \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sin x + x)}{x^2 (\sqrt{1+x\sin x} + \cos x)} \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (\sin x + x)}{x^2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + 1 \right) \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

例 6 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$, 求 c 的值.

$$\text{解: 因 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{c}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{c}{x} \right)^x} = e^{2c} = 4$$

即 $2c = \ln 4$ 所以 $c = \ln 2$

3. 函数连续问题

(1) 常用的函数连续性等价定义

函数的连续性与函数在某点的定义和函数在该点的极限有关, 所以若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义, 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 为了使用方便, 我们将 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 归纳成三个条件

$$\begin{cases} \text{函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 点有定义} \\ \text{函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 点的极限存在} \\ \text{函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 点的极限值等于函数值} \end{cases}$$

(2) 函数的间断点

函数间断概念是连续概念的否定. 如果说函数满足三个条件是连续的, 而间断则仅有三条中的一条不成立, 就称函数在某点间断.

例7 讨论 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0 \\ \ln(1+x), & -1 < x \leq 0 \end{cases}$ 的连续性.

解: $f(x)$ 显然在 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ 内连续, 即除去连接点 $x=0$ 和无定义点 $x=1$ 处处是连续的, 所以我们仅需要考察 $x=0$ 和 $x=1$ 的点.

在 $x=0$ 处, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1+x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断.

在 $x=1$ 处, 函数 $f(x)$ 无定义, 所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是间断的.

例8 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & x < 0 \\ k, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$, 问当 k 为何值时, 函数 $f(x)$ 在

$x=0$ 处连续.

解: 由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \sin x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{1}{x} + 1 \right) = 1$$

有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 而 $f(0) = k$, 所以当 $k=1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

即当 $k=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 点是连续的.

第二部分

同步练习

一、判断题

1. $y=x$ 与 $y=\sin(\arcsin x)$ 是相同的函数. ()
2. $y=\sqrt{u}$, $u=\sin x-2$ 不能复合成复合函数. ()
3. 无界数列一定是无穷大量. ()
4. 数列 x_n 收敛于 A , 则在 A 的某邻域内有数列 x_n 的无穷多个点. ()
5. $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处不连续, 则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续. ()

6. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上不连续, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上没有最大值和最小值. ()

二、填空题

1. 函数 $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2} + \ln(x^2-x)$ 的定义域是().
2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 则 $f(f(x)) = ()$.
3. 设 $f(x) = \begin{cases} -12, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x+3, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(-7) = ()$, $f(0) = ()$,
 $f(2) = ()$.
4. $f(x-1) = x^2$, 则 $f(x) = ()$.
5. 设 $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, 显然 $f(x)$ 在 $x=2$ 处没有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ()$.
6. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 可表示为().
7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos 2x$ 是比 x 的()阶无穷小量; 是比 x^3 ()阶无穷小量; 与 $x \sin x$ 是()阶无穷小量.

8. 函数 $y = \frac{1}{e^x(x-1)(x+2)}$ 的间断点为().

9. 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = a$, ($a \in R$), 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\varphi(x)} = ()$.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ a+x, & x > 0 \end{cases}$, 则当 $a = ()$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

三、单项选择题

1. 函数 $\frac{x}{x-2} + \arcsin \frac{x}{3}$ 的定义域是().
 A. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ B. $(-3, 3)$
 C. $[-3, 2) \cup (2, 3]$ D. $[-3, 3]$
2. 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上, 下列函数中为偶函数的是().
 A. $y = \sin x - \cos x + 1$ B. $y = e^{-x}$
 C. $y = x^2 \cos x$ D. $y = (x-1)^2$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$ 则().

A. $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases}$

B. $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

C. $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$

D. $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

4. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 $f[f(x)]$ 是().

A. $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

B. $\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}$

C. $\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

D. $\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{1+2^n}$ 的结果是().

A. ∞

B. $\frac{1}{2}$

C. 0

D. 1

6. 若 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 是().

A. 无穷大量

B. 无穷小量

C. 有界变量

D. 无界变量

7. 下列各式中正确的是().

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{k}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^2+8} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} - \lim_{x \rightarrow -2} \frac{12}{x^2+8} = 0$

8. 设 $f(x) = x \cos \frac{1}{x} + x^2$, 则().

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的连续点

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第 I 类间断点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第 II 类间断点

D. 上述结果均不对

9. 下列命题中正确的一个是().

A. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, $g(x)$ 在 x_0 处不连续, 则 $f(x) + g(x)$ 在 x_0 处必不连续

B. 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 x_0 处均不连续, 则 $f(x) + g(x)$ 在 x_0 处必不连续

C. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, $g(x)$ 在 x_0 处不连续, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 处必不连续

D. 若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 x_0 处均不连续, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 处必不连续

10. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 是 x^2 的().

A. 低阶无穷小量

B. 高阶无穷小量

C. 等价无穷小量

D. 同阶但非等价无穷小量

四、计算题

$$\begin{aligned}
 &1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x^4 - x^2 + 2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1 + x^2}} \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + n}) \\
 &4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^x \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - x}{2} \right)^{\frac{2}{x}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + x} \right)^{\frac{1}{2x} - 1} \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan \pi x} \\
 &8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{4^x + 1} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x}
 \end{aligned}$$

五、解答题

1. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha x + \sqrt{x^2 - x + 1} - \beta) = 0$, 求 α, β 的值.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ a + x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 应当怎样

选择 a ?

3. 设 $f(x) = \frac{(x-3)(x+4)}{\sqrt{4+3x-x^2-x+1}}$, 试确定 $f(x)$ 的连续区间, 如果有间断点, 试判定间断点的类型.

六、应用题

1. 某化肥厂生产某产品 1000 吨, 每吨定价为 130 元, 销售量在 700 吨以内时, 按原价出售, 超过 700 吨时超过的部分需打 9 折出售, 试将销售总

收益与总销售量的函数关系用数学表达式表示出来。

2. 按照银行规定某种外币一年期存款的年利率为 4.2%；半年期存款的利率为 4.0%，每笔存款到期后，银行自动将其转存为同样期限的存款。设将总数为 A 单位货币的该种外币存入银行，两年后取出，问存何种期限的存款能有较多的收益，多多少？（提示：将年利率换为月利率，如 $(4\% \div 12) \times 6 = 2\%$ ）。

七、证明题

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $a \leq f(x) \leq b \quad x \in [a, b]$ ，证明存在 $x_0 \in [a, b]$ ，使得 $f(x_0) = x_0$ 。

第三部分

自 测 题

一、填空题

1. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$ ，则函数 $f(e^x)$ 的定义域为_____。
2. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ，则 $f(x-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-2x}$ 是 x 的_____无穷小量。
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{x}\right)^{2x} = e^5$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、单项选择题

1. 下列各对函数中表示同一类函数的是()。
 - A. $f(x) = x, \quad g(x) = \sin(\arcsin x)$
 - B. $f(x) = 1, \quad g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
 - C. $f(x) = 1, \quad g(x) = \frac{x}{x}$

$$D. f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

2. 下列数列中极限存在的是().

$$A. 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

$$B. 1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

$$C. 2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

$$D. 0, 1, 0, \dots, \frac{1+(-1)^n}{2}, \dots$$

3. 函数 $f(x) = \frac{1+x}{1+x^{3n}}$ 的间断点为().

A. 不存在

$$B. x = 1$$

$$C. x = 0$$

$$D. x = -1$$

4. 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处间断, 则().

$$A. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 不存在}$$

$$B. f(x_0) \text{ 不存在}$$

$$C. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

D. 以上三种情况至少有一种发生

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ 的值为().

$$A. 1$$

$$B. -1$$

$$C. 0$$

D. 不存在

三、判断题

1. 设 $f(x)$ 为定义在 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上的任意函数, 则 $f(x) + f(-x)$ 一定是偶函数. ()

2. 有界数列必收敛. ()

3. 函数在一个区间 $[a, b]$ 上有最大值和最小值, 则函数在 $[a, b]$ 上一定连续. ()

4. 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处间断, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 一定不存在. ()

5. 两个无穷大量的和仍为无穷大量. ()

四、计算题

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{2x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$$

五、已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}) = 2$, 求 a, b .