21世纪

高等院校工科类各专业

数学基础辅导教材 / 主　编　刘书田

高等数学

专题分析与解题指导

（下册）

编著者　刘书田　胡京兴

冯翠莲　阎双伦

3

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪
高等院校工科类各专业
数学基础辅导教材 / 主编　刘书田

高等数学
专题分析与解题指导
（下 册）

编著者　刘书田　胡京兴
冯翠莲　阎双伦

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学专题分析与解题指导·下册/刘书田,胡京兴,冯翠莲等编著.—北京:北京大学出版社,2008.2

(21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材)

ISBN 978-7-301-12398-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘… ②胡… ③冯… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第083334号

书　　名:高等数学专题分析与解题指导(下册)

著作责任者:刘书田　胡京兴　冯翠莲　阎双伦　编著

责 任 编 辑:刘　勇

封 面 设 计:林胜利

标 准 书 号:ISBN 978-7-301-12398-0/O·0723

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871

网　　址:http://www.pup.cn

电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962

电 子 邮 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者:北京大学印刷厂

经 销 者:新华书店

787mm×960mm　16开本　16印张　350千字

2008年2月第1版　2008年2月第1次印刷

印　　数:0001—5000册

定　　价:25.00元

内 容 简 介

本书是高等院校工科类各专业学生学习高等数学课程的辅导书，与国内通用的各类优秀的《高等数学》教材相匹配，可同步使用. 全书共分五章，内容包括多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程及其应用等.

本书以高等数学课程教材的内容为准，按题型归类，划分专题进行分析. 以讲思路举例题与举题型讲方法相结合的思维方式叙述. 讲述解题思路的源头，归纳总结具有共性题目的解题方法. 解题简捷、新颖，具有技巧性而又道理显然，可使读者思路畅达，所学知识融会贯通，灵活运用，达到事半功倍之效.

本书是工科类各专业在校学生学习高等数学必备的辅导教材，是有志考研学生的精品之选，是授课教师极为有益的教学参考书，是无师自通的自学指导书.

《21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材》
编审委员会

21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材书目

高等数学专题分析与解题指导(上册)	刘书田等编著	定价28.00元
高等数学专题分析与解题指导(下册)	刘书田等编著	定价25.00元
线性代数专题分析与解题指导	赵慧斌等编著	定价20.00元
概率统计专题分析与解题指导	肖筱南　编著	定价25.00元

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

一、二元函数的极限与连续性

二元函数的极限通常称为二重极限.请注意,二重极限与二次极限是两个不同的概念.

1. 二元函数的极限与连续

(1) 确定二元函数极限的**解题思路**:

1° 利用二元函数极限的定义,见例 1;在证明极限不存在时,常推证极限依赖于所选路径,见例 2(1).

2° 应用一元函数极限方法中的适用部分,例如,极限的四则运算法则,无穷小与有界变量的乘积,等价无穷小代换,两个重要极限,夹逼准则等,见例 3.

3° 通过变量代换将二元函数的极限转化为一元函数的极限,见例 4.

4° 利用函数的连续性求极限,见例 5.

(2) 用二元函数连续性的定义确定其连续性(见例 6).

由二元函数连续性定义可知,若 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 连续,则一元函数 $f(x,y_0)$,$f(x_0,y)$ 分别在点 x_0 和 y_0 处连续.

2. 二次极限及其与二重极限的关系

(1) 一个二元函数的两个二次极限可能出现的情况.

1° 两个都存在且相等;　　2° 两个都存在,但不相等(例 7(1));

3° 一个存在,一个不存在(例 7(2));　　4° 两个都不存在.

(2) 二次极限与二重极限在存在性上没有必然的联系.

1° 两个二次极限均存在且相等,而二重极限未必存在(例 8(1));

2° 二重极限存在,而二次极限未必存在(例 8(2)).

(3) 当二重极限和二次极限都存在时,它们必相等.

定理　若二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在,二次极限(之一) $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在,则它们必相等.

推论　当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,

(1) 若函数 $f(x,y)$ 的二重极限和其两个二次极限均存在,则它们必相等;

(2) 若 $f(x,y)$ 的两个二次极限都存在,但不等,则其二重极限必不存在.

例 1　证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}=0$.

证　因为$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y|$，故对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$；当 $|x|<\delta$，$|y|<\delta$ 且 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，恒有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant|y|<\delta=\varepsilon,$$

所以由极限定义 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

例 2　证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$.

证　(1) 考查极限是否依赖于所选路径：

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k)x}=0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2-x)}{x^2}=-1,$$

即函数沿任何经过原点的直线路径的极限存在且为 0，而沿经过原点的曲线 $y=x^2-x$ 路径的极限虽然存在，却是 -1，所以极限不存在.

(2) 先把所求极限式改写为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}.$$

注意到右端是两个极限的乘积，第一个极限不存在，而第二个极限是$\dfrac{1}{2}$，所以，所论极限不存在.

例 3　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\dfrac{\tan(x^2+2xy+y^2-1)}{x+y-1}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$.

解　(1) 注意到当 $(x,y)\to(0^+,0^+)$ 时，$\sqrt{xy+1}-1\sim\dfrac{1}{2}xy$，则

$$I=\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)}\frac{1}{2}\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)}\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\cdot\sqrt{xy}=0,$$

这是因为，当 $x>0,y>0$ 时，$0<\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}<1$，又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)}\sqrt{xy}=0$，由无穷小与有界变量的乘积所得.

(2) 当$(x,y)\to(0,0)$时，$\sin(x^2y+y^4)\to 0$，有$|\sin(x^2y+y^4)|\leqslant(x^2y+y^4)$，故

$$0\leqslant\left|\frac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right|;$$

又$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$，$\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$，故$\left|\frac{x^2y+y^4}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y|+|y^2|$，而$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|y|+|y^2|)=0$，由夹逼准则，$I=0$.

(3) 注意到，当$(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$时，$(x^2+2xy+y^2-1)\to 0$，故利用$\tan u\sim u(u\to 0)$，有

$$I=\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\frac{x^2+2xy+y^2-1}{x+y-1}=\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\frac{(x+y-1)(x+y+1)}{x+y-1}=2.$$

(4) 因$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\frac{x}{x+y}=1$，故

$$I=\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}}=\mathrm{e}.$$

(5) 由于当$x>0,y>0$时，$xy\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，有

$$0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2},\quad 且\quad \lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0,$$

所以$I=0$.

(6) 由极限四则运算法则

$$\begin{aligned}I&=\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}+y^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y})\\&=\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}x^2\mathrm{e}^{-x}\cdot\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\mathrm{e}^{-y}+\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}y^2\mathrm{e}^{-y}\cdot\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\mathrm{e}^{-x}\\&=0\cdot 0+0\cdot 0=0.\end{aligned}$$

例 4　求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解　令$t=\sqrt{x^2+y^2}$，当$(x,y)\to(0,0)$时，有$t\to 0$. 于是

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\frac{1}{6}.$$

例 5　求$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\frac{\ln y+x^2\sin xy}{\mathrm{e}^x\sin(x^2+y^2)}$.

解　所给函数是初等函数，且在点(1,2)处有定义，它在该点连续，故

$$I=\frac{\ln 2+1^2\cdot\sin(1\cdot 2)}{\mathrm{e}^1\cdot\sin(1^2+2^2)}=\frac{\ln 2+\sin 2}{\mathrm{e}\sin 5}.$$

例 6　讨论下列函数在点(0,0)处的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}xy\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x(y^2+1)}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　(1) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$，于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$$
$$=\lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\ln r^2=0=f(0,0),$$

这是因为当 $r\to 0$ 时，$r^2\ln r^2\to 0$，而 $\cos\theta\cdot\sin\theta$ 是有界变量. 所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(2) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy=0}} f(x,y)=0=f(0,0)$；又

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \frac{\sin xy}{xy}\cdot\frac{y}{y^2+1}=1\cdot 0=0=f(0,0),$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

例 7　讨论下列函数在点 $(0,0)$ 的两个二次极限：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$；　　(2) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{xy}$.

解　(1) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}(-1)=-1$；$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$. 即两个二次极限均存在，但不等.

(2) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$；$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} x\left(\lim\limits_{y\to 0}\sin\dfrac{1}{xy}\right)$ 不存在. 即一个二次极限存在，一个二次极限不存在.

例 8　讨论下列函数的二次极限和二重极限：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$；　　(2) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$；$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}\xlongequal{y=kx}\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+(1+k)^2x^2}$$
$$=\begin{cases}0, & 若\ k=0,\\ 1, & 若\ k=-1.\end{cases}$$

显然，上述极限不存在. 即两个二次极限均存在且相等，而二重极限不存在.

(2) 当 $y\neq 0, x\to 0$ 时，$y\sin\dfrac{1}{x}$ 的极限不存在；当 $x\neq 0, y\to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{y}$ 的极限不存在，所以两个二次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$，$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 均不存在.

由于 $\left|x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$. 即两个二次极限均不存在，而二重极限存在.

二、二元函数连续、偏导数存在与全微分之间的关系

在一元函数中，连续是可导的必要条件，可导是连续的充分条件；可导与可微是等价的.

在二元函数中，它们之间的关系却与一元函数不同.

1. 连续与偏导数之间没有必然联系

函数连续，偏导数可能存在，也可能不存在，见例 3，例 4(1)，(2)；偏导数存在，函数可能连续，也可能不连续，见例 4(3)，例 5.

2. 偏导数与全微分之间的关系

全微分存在，则偏导数一定存在；偏导数存在且连续，则全微分存在，但这是**可微分的充分条件**，而**不是必要条件**(见例 6). 若偏导数存在但**不连续**时，这时要用全微分定义来检验是否可微. 即按**全微分定义**(见例 6)：

二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微 $\Longleftrightarrow$ 当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，

$$\Delta z-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y] \text{ 是关于 } \rho \text{ 的高阶无穷小.}$$

3. 连续与全微分之间的关系

全微分存在，函数一定连续；但反之则不真. 如例 5.

例 1 考虑二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的下面 4 条性质：

① 连续；② 两个偏导数连续；③ 可微；④ 两个偏导数存在. 若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有(　　).

(A) ②⇒③⇒①　　(B) ③⇒②⇒①　　(C) ③⇒④⇒①　　(D) ③⇒①⇒④

解 由连续、偏导数存在、偏导数连续及可微之间的关系知，选(A).

例 2 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处具有二阶偏导数，则结论正确的是(　　).

(A) 必有 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$　　(B) $f(x,y)$ 在点 P_0 处必可微

(C) $f(x,y)$ 在点 P_0 处必连续　　(D) 以上三个结论均不对

解 选(D). 因 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 和 $f_{yx}(x_0,y_0)$ 在点 P_0 处未必连续，否定(A)；由二阶偏导数存在知一阶偏导数一定存在，但一阶偏导数在点 P_0 处未必连续，否定(B)；一阶偏导数存在，而函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处未必连续，否定(C).

例 3 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续且存在偏导数.

证 由于 $f(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{|xy|}\cdot\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0\times 1=f(0,0),$$

所以，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

注意到 $f(x,0)=0,f(0,y)=0$，所以

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

即两个偏导数均存在.

例 4　容易验证：(1) 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续，而两个偏导数不存在；

(2) 函数 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，$f_x(0,0)=0$，而 $f_y(0,0)$ 不存在.

(3) 函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 不连续，但 $f_x(0,0)=0,f_y(0,0)=0$.

例 5　证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续，偏导数存在，但不可微.

证　当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$0\leqslant\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\left|\frac{xy}{\sqrt{2xy}}\right|\leqslant|\sqrt{xy}|,$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

注意到 $f(x,0)=0,f(0,y)=0$，由偏导数定义易知 $f_x(0,0)=0,f_y(0,0)=0$.

下面用定义证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微. 记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

若分别令 $\Delta x=\Delta y,\Delta x=2\Delta y$ 时，显然上述极限不相等，故上述极限不存在，从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

例 6　设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 试证其偏导数在点 $(0,0)$ 的邻域内存在，但偏导数在点 $(0,0)$ 处不连续，而 $f(x,y)$ 却在点 $(0,0)$ 处可微.

证　当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f_x(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0.$

同理可求得 $f_y(0,0)=0$.

对 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ 考虑点(x,y)沿 x 轴趋于$(0,0)$. 由于

$$\lim_{x\to0}2x\sin\frac{1}{x^2}=0,\quad 而\quad \lim_{x\to0}\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\ 不存在,$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$不存在,即 $f_x(x,y)$在点(0,0)不连续. 而

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho}=0,$$

所以函数 $f(x,y)$在点(0,0)处可微.

例 7 二元函数 $f(x,y)$在点(0,0)处可微的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$;

(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$;

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$,且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$;

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f_x(x,0)-f_x(0,0)]=0$,且 $\lim\limits_{y\to0}[f_y(0,y)-f_y(0,0)]=0$.

解 选(B). 若(B)成立,则

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+0^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{x}=0.$$

同理,$f_y(0,0)=0$. 若记 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,则

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)x+f_y(0,0)y]}{\rho}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

按全微分定义,$f(x,y)$在点(0,0)处可微.

三、偏导数与全微分

1. 求偏导数的思路

由偏导数的定义知,求函数 $f(x,y)$的偏导数仍是求一元函数的导数问题,即

$$f_x(x,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y)\Big|_{y不变},\quad f_y(x,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)\Big|_{x不变}.$$

(1) 求偏导(函)数时,一般用一元函数的导数公式与运算法则(例 4).

(2) 求在某定点(x_0,y_0)处的偏导数时,可采取两种方法(例 1):

1° 先求偏导(函)数 $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$,然后将(x_0,y_0)代入得 $f_x(x_0,y_0)$,$f_y(x_0,y_0)$.

2° 用下述公式

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0},\quad f_y(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\bigg|_{y=y_0},$$

即求 $f_x(x_0,y_0)$时，可先由 $f(x,y)$得到 $f(x,y_0)$，再求 $f_x(x,y_0)$，最后将 $x=x_0$ 代入得到 $f_x(x_0;y_0)$. 求 $f_y(x_0,y_0)$时也如此.

(3) 求分段函数在分段点处的偏导数时，一般用偏导数的定义，见例 2.

2. 高阶偏导数

二阶偏导数是偏导数的偏导数，求二阶偏导数，只要对偏导数再求一次偏导数即可. 二阶和二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数. 见例 12，例 13.

当 $f_{xy}(x,y)$和 $f_{yx}(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续时，就有 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$(见例 11). 这是二阶混合偏导数与求导次序无关的充分条件，见例 3.

3. 已知偏导数求原函数的思路

若$\frac{\partial f}{\partial x}=h(x,y)$，这里 $h(x,y)$是已知的连续函数，则

$$f(x,y)=\int h(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y),$$

其中 $\int h(x,y)\mathrm{d}x$ 是 $h(x,y)$的一个原函数，$\varphi(y)$是 y 的任意函数，有的题目给出确定 $\varphi(y)$的条件，见例 7，例 8.

4. 求函数 $z=f(x,y)$全微分的思路

按全微分存在的充分条件，若所求 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$连续，则(例 5，例 6)

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y.$$

5. 已知 $\mathrm{d}z=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，求函数 $z=f(x,y)$的方法

(1) 积分法.

先由 $f_x(x,y)=P(x,y)$得

$$f(x,y)=\int P(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y);$$

上式再对 y 求偏导数，由 $f_y(x,y)=Q(x,y)$可解得 $\varphi'(y)$，进而得 $\varphi(y)$，即得 $f(x,y)$，见例 9.

(2) 逆推法. 观察已知式 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的特点，逆用全微分运算法则，将其写成 $\mathrm{d}g(x,y)$. 于是 $f(x,y)=g(x,y)+C$，其中 C 是任意常数，见例 10.

例 1　设 $f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1+xy}$，求 $f_x(0,0)$，$f_y(1,1)$.

解　先求 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，再求 $f_x(0,0)$，$f_y(1,1)$：

$$f_x(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}\cdot\frac{1+xy-y(x+y)}{(1+xy)^2},\quad f_x(0,0)=1,$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}\cdot\frac{1+xy-x(x+y)}{(1+xy)^2},\quad f_y(1,1)=0.$$

先求 $f(x,0)$，$f(1,y)$，再求 $f_x(0,0)$，$f_y(1,1)$.

$$f(x,0)=\arctan x,\quad f_x(x,0)=\frac{1}{1+x^2},\quad f_x(0,0)=1,$$

$$f(1,y)=\arctan\frac{1+y}{1+y}=\arctan 1,\quad f_y(1,y)=0,\quad f_y(1,1)=0.$$

例 2 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 求 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$；$f_{xy}(0,0)$，$f_{yx}(0,0)$.

解 用偏导数定义. 注意到 $f(x,0)=0$，$f(0,y)=0$，则

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0.$$

又

$$f_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-y\quad(y\neq 0),$$

所以

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y}=-1.$$

同样方法，可求得 $f_y(0,0)=0$，$f_y(x,0)=x(x\neq 0)$，$f_{yx}(0,0)=1$.

综上所述，$f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$ 都存在，但不相等.

例 3 设函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^4+y^4}$. 用例 2 的同样方法可求得 $f_{xy}(0,0)=0$，$f_{yx}(0,0)=0$. 即 $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$，但 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处却不连续. 事实上

$$f_x(x,y)=\frac{4x^3}{3}(x^4+y^4)^{-\frac{2}{3}},\quad f_{xy}(x,y)=-\frac{32x^3y^3}{9}(x^4+y^4)^{-\frac{5}{3}},$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}f_{xy}(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{32x^6}{9\cdot 2^{\frac{5}{3}}x^{\frac{20}{3}}}\right)=\infty.$$

上式说明 $f_{xy}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的极限不存在，自然就不连续. 同理 $f_{yx}(0,0)$ 在点 $(0,0)$ 处也不连续.

例 4 设 $z=x^{\ln y}\tan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 对 x 求偏导数，视 y 为常量，$x^{\ln y}$ 是幂函数.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}(x^{\ln y})\cdot\tan\frac{y}{x}+x^{\ln y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\tan\frac{y}{x}\right)\\&=\ln y\cdot x^{\ln y-1}\cdot\tan\frac{y}{x}+x^{\ln y}\cdot\sec^2\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\\&=\frac{\ln y}{x}\cdot x^{\ln y}\cdot\tan\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\cdot x^{\ln y}\cdot\sec^2\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

对 y 求偏导数，视 x 为常量，$x^{\ln y}$ 是指数函数.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(x^{\ln y})\cdot\tan\frac{y}{x}+x^{\ln y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\tan\frac{y}{x}\right)\\&=x^{\ln y}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{y}\cdot\tan\frac{y}{x}+x^{\ln y}\cdot\sec^2\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\\&=\frac{\ln x}{y}x^{\ln y}\cdot\tan\frac{y}{x}+\frac{1}{x}x^{\ln y}\cdot\sec^2\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

例 5　设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz|_{(1,2)}$ $=$________.

解 1　先求偏导数，再求全微分.

$$z_x=f'(4x^2-y^2)\cdot 8x,\quad z_x|_{(1,2)}=f'(0)\cdot 8=4,$$
$$z_y=f'(4x^2-y^2)(-2y),\quad z_y|_{(1,2)}=f'(0)\cdot(-4)=-2,$$

于是
$$dz|_{(1,2)}=(z_xdx+z_ydy)|_{(1,2)}=4dx-2dy.$$

解 2　用复合函数的微分法则.

$$dz=f'(u)du=f'(4x^2-y^2)d(4x^2-y^2)=f'(4x^2-y^2)(8xdx-2ydy),$$
$$dz|_{(1,2)}=f'(0)(8dx-4dy)=4dx-2dy.$$

例 6　设 $u=f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^z$，求 du.

解　先求偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\frac{1}{y},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right),\quad\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}.$$

因偏导数均连续，所以 du 存在：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}du+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(\frac{z}{x}dx-\frac{z}{y}dy+\ln\frac{x}{y}dz\right).$$

例 7　求函数 $f(x,y)$，已知 $\frac{\partial f}{\partial x}=-\sin y+\frac{1}{1-xy}$，且 $f(0,y)=2\sin y+y^2$.

解　由题设

$$f(x,y)=\int\left(-\sin y+\frac{1}{1-xy}\right)dx+\varphi(y)=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 是待定函数. 由已知条件 $f(0,y)=2\sin y+y^2$ 与上式，得 $2\sin y+y^2=\varphi(y)$. 于是

$$f(x,y)=(2-x)\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+y^2.$$

例 8　对函数 $z=f(x,y)$ 有 $f_{yy}(x,y)=2x$，且 $f(x,1)=0$，$f_y(x,0)=\sin x$，求 $f(x,y)$.

解　由题设 $f_{yy}(x,y)=2x$，积分得 $f_y(x,y)=2xy+\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 是待定函数. 由 $f_y(x,0)=\sin x$，即 $[2xy+\varphi(x)]|_{y=0}=\sin x$，得 $\varphi(x)=\sin x$. 从而

$$f_y(x,y)=2xy+\sin x,\quad\text{积分得}\quad f(x,y)=xy^2+y\sin x+\psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 是待定函数. 再由 $f(x,1)=0$，有