

非线性偏微分方程引论 | 郭玉翠 编著

清华大学出版社

非线性偏微分方程引论

郭玉翠 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书包括 6 章正文和 5 个附录,主要介绍有物理背景的一些非线性偏微分方程孤立子解形成的机理,求解这类方程的反散射变换方法,Bäcklund 变换方法,相似约化方法,若干种函数变换方法,以及与非线性偏微分方程可积性有关的一些知识. 可以作为应用数学、应用物理以及非线性科学相关方向研究生的教材或教学参考书,也可作为高年级大学生及从事非线性科学研究的科研人员和教师的学习和参考用书.

版权所有, 侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

非线性偏微分方程引论/郭玉翠编著. —北京: 清华大学出版社, 2008. 3
ISBN 978-7-302-16740-2

I. 非… II. 郭… III. 非线性偏微分方程 IV. O175.29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 001885 号

责任编辑: 刘 颖 王海燕

责任校对: 赵丽敏

责任印制: 杨 艳

出版发行: 清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社 总 机: 010-62770175

投稿咨询: 010-62772015

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编: 100084

邮购热线: 010-62786544

客户服务: 010-62776969

印 装 者: 北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185×230

印 张: 18.5

字 数: 379 千字

版 次: 2008 年 3 月第 1 版

印 次: 2008 年 3 月第 1 次印刷

印 数: 1~4000

定 价: 29.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换. 联系电话: 010-62770177 转 3103 产品编号: 020969-01

前言

本书是非线性偏微分方程(或称非线性数学物理方程)理论的入门书. 可供应用数学、应用物理以及非线性科学相关方向的研究生作为教科书和参考书, 也可供从事非线性科学研究的科研人员和教师作为参考用书. 非线性偏微分方程研究的热潮兴起于20世纪60年代, 至今只有三四十年的发展时间, 相应于数学的其他分支, 可谓是非常年轻的学科. 虽然国内外已经有一批很好的著作出版, 但其中有些起点偏高, 初学者不容易看懂. 同时又因为非线性偏微分方程的研究属于交叉学科, 物理学家、数学家和工程学科的科学家们都在研究和关注这个问题, 但他们关注问题的角度不同, 使得有些著作专业倾向性很强, 非本专业的人理解起来有难度. 这种现状使初学非线性偏微分方程理论的入门者感到很困难, 往往为了某一个基本概念而多次跑图书馆查找许多资料. 为此我将自己在学习和教学中所积累的资料系统地整理出来, 与大家分享, 以利于更多的初学者少走弯路, 更早地步入非线性偏微分方程的殿堂. 本书在编写的过程中, 力争做到概念清楚、推导严谨、说理透彻、逻辑性强. 本书的目标是使具有大学数学、大学物理基础的人可以读懂. 在附录中尽可能简明地介绍一些辅助学习的知识, 以帮助读者更好地理解正文的内容.

本书的研究对象是非线性偏微分方程, 由于这些偏微分方程来源于物理和其他应用学科, 具有鲜明的物理意义, 因此又称为非线性数学物理方程. 大家知道, 数学物理方程就是物理学中的数学方程, 包括代数方程、函数方程、常微分方程、偏微分方程、积分方程、微分积分方程、差分方程, 等等. 通常在大学里开设的数学物理方程(或称数学物理方法)研究线性偏微分方程及其解法, 本书的重点是研究有物理背景的非线性偏微分方程的理论.

含有时空变量的非线性偏微分方程的数学形式通常可以表示为

$$P(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0,$$

其中 $u = u(x, t)$ 是系统的目标物理量, 即未知函数; x 表示空间坐标, 有时可能是二维 (x, y) 、三维 (x, y, z) 甚至是多维 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的; t 是时间坐标(有时在建立数学模型时, 经过了坐标变换, 因此可能是广义的时间坐标). u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt} 分别表示对坐标 x 和 t 的一阶和二阶偏导数. 所谓非线性偏微分方程, 是指在偏微分方程中含有未知函数和(或)未知函数导数的高次项, 而不能写成如下线性形式(以两个自变量的二阶线性微分方程为例)

II 非线性偏微分方程引论

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} \\ + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = f(x, y)$$

的偏微分方程. 目前引入的有物理意义的非线性偏微分方程有几百种, 典型且具有代表性的有 KdV 方程

$$u_t + uu_x - \mu u_{xxx} = 0, \quad (0.1)$$

Sine-Gordon 方程

$$u_{xx} - u_u = \sin u, \quad (0.2)$$

非线性 Schrödinger 方程

$$iu_t + u_{xx} + \beta u |u|^2 = 0, \quad (0.3)$$

等等. 这些方程的形式虽然简单, 但是本质却与线性微分方程有很大的不同, 比如, 对于线性方程而言, 解的唯一性、单值性、有界性和解的叠加原理等性质, 对非线性方程均可能不复存在. 因此, 非线性方程不存在普适性的理论和求解方法. 但有许多非线性偏微分方程都具有一类很有意义的解——孤立波解.

非线性偏微分方程本身的物理背景和孤立波解的特殊性质使非线性偏微分方程的求解和孤立波理论作为非线性科学的一个分支, 成为当前科学发展的前沿和热点问题.

一个系统, 如果输出与输入不成正比, 则它就是非线性的. 例如弹簧的受力伸长(产生位移), 当位移较小时, 力与位移成正比, 力与位移的关系为线性关系, 即 Hooke 定律 $F = kx$, 当位移很大时, Hooke 定律失效, 弹簧变为非线性振子; 又如单摆, 仅当其角位移很小时, 其行为才是线性的; 而一个介电晶体, 当其输入光强不再与输出光强成正比时, 就成为非线性介电晶体. 实际上, 自然科学或社会科学几乎所有的已知系统, 当输入足够大时, 都是非线性的. 因此, 非线性系统远比线性系统多得多. 可以说, 客观世界本来就是非线性的, 线性只是一种近似. 描述这些非线性系统行为的方程就可能是非线性偏微分方程. 认识、研究并且利用非线性现象是科学发展的必然. 同时, 随着计算机的发展, 使许多过去人工不可能做到的一些问题得以解决, 因此, 从某种意义上说, 非线性科学也是伴随着计算机科学的发展而发展起来的.

本书主要研究非线性偏微分方程的解法、孤立子理论及其应用.

数学上把具有下列性质的非线性偏微分方程的解称为孤立波解:

- (1) 向单方向传播的行波, 即形式为 $\varphi(x-at)$ 或 $\psi(x+at)$ 的解;
- (2) 分布在空间的一个小区域内, 即 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u \rightarrow 0$ (有时是 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x \rightarrow 0$ 及 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_{xx} \rightarrow 0$ 等);
- (3) 波动形状不随时间演变而发生变化;
- (4) 孤立波之间的相互作用具有类似粒子一样的弹性碰撞(一般又将具有这一性质的孤立波叫孤立子).

常见的孤立波有以下四种: (1) 钟型(图 0.1(a)), (2) 反钟型(图 0.1(b)), (3) 扭结型(kink)(图 0.1(c)) 和 (4) 反扭结型(ante-kink)(图 0.1(d)).

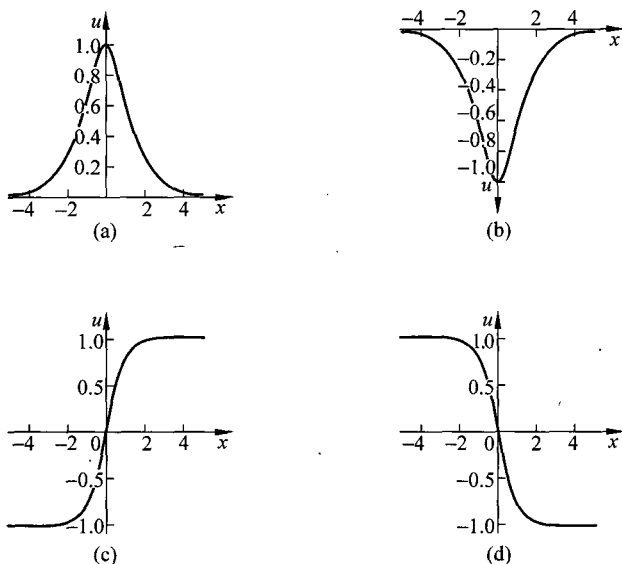


图 0.1 孤立波的四种类型

用数学方法研究实际问题的基本步骤是：首先将实际问题简化，形成物理模型；然后将物理模型定量化，即建立数学模型——非线性偏微分方程；再后便是求解这个偏微分方程，找出满足偏微分方程，有时还需满足某些特定条件的解；最后是对所得结果进行分析，用来解释自然现象或指导实践，即解决实际问题。

从物理模型到数学模型大致要经过以下步骤：(1)建立空间和时间坐标系，不同的问题选用不同的坐标系；(2)选择表征所研究物理过程的一个或几个物理量及其坐标，这是非常重要的一步，有时表征物理量的选择就是建立一门新学科的起点；(3)找出(包括假设、猜想和运用已有的知识)有关物理过程所遵循的定律，即物理公理或定理，这是问题的难点，在大学数学物理方程(法)中建立数学模型时，只是涉及了一些简单的物理过程，通过它们来讲述将物理模型进行定量化处理的一般方法。对于复杂的物理过程，只是写出数学模型，不加推导。在本书中，我们将更加注重物理模型到数学模型的推导，因为研究数学物理问题，不能抛开物理图像去单纯考虑数学问题，物理图像和几何图像常常扮演简单明了而又能深刻认识数学问题的钥匙的角色。

一旦将物理模型建成数学模型后，就是寻求合适的方法来求解这个非线性偏微分方程，这是本书研究的重点。随着科学的不断发展，非线性偏微分方程的求解受到越来越多的重视，从天文学、物理学、力学、地球科学到生命科学和各类工程技术科学领域都出现大量的非线性偏微分方程。尤其是在物理学的各个分支领域，如流体力学、非线性光学、等离子体理论和量子场论中遇到的非线性偏微分方程，有很多都有孤立波形式的解。19世纪

IV 非线性偏微分方程引论

30 年代英国科学家 J. S. Russel 最先注意到水波中的非线性现象. 20 世纪 60 年代以来, 非线性科学得到了飞速发展, 在非线性偏微分方程的求解方面也取得了许多成果. 本书将较详细地讨论其中一些重要和典型的方法. 由于非线性数学物理方程本身的复杂性, 其求解没有普适的方法, 各种方法的基本思想都是通过变换或分解, 将复杂的方程简化. 而这种变换和分解的形式也是多种多样的, 有时还需要从数学上和物理上加以猜想和试探. 这种猜想和试探本身也许并不具有普遍意义, 但这种猜想和试探的思想却具有普遍意义, 在这里数学技巧和物理直观将尽可能得到完美体现.

在这里向我所有引用资料的作者致谢和致敬, 其中包括许多国外的作者. 书中也包括我和我的研究生的一些工作, 同时向我的历届研究生同学们表示谢意. 本书是在笔者为北京邮电大学研究生开设的“应用偏微分方程”课程讲义的基础上整理完成的. 感谢 4 轮教学过程中选学过该课程的所有同学们, 是他们的热情和求知欲激励我在这个领域不断探索, 努力实践; 是他们不断地思考和颇有见地的问题, 使本书的内容更加深刻和完善. 特别要感谢第一次选学这门课的一些同学: 王鑫、徐淑奖、叶鹏、李华英和李娟等, 是他们将讲义的原稿输入电脑. 笔者衷心感谢清华大学出版社的支持与帮助.

非线性偏微分方程作为学科, 发展的时间不长, 但涉及的内容非常广泛, 由于作者水平有限, 不足乃至错误在所难免, 再次恳请各位师友和读者赐教.

郭玉翠

2007 年 9 月

目 录

第 1 章 典型方程及其孤立波解	1
1.1 历史回顾	1
1.2 孤立波——非线性会聚和色散现象的巧妙平衡	5
1.2.1 波动中的非线性会聚现象	5
1.2.2 波动中的色散	6
1.2.3 两种效应的平衡——KdV 方程的解释	8
1.3 KdV 方程及其孤立波解	9
1.3.1 KdV 方程的导出	10
1.3.2 KdV 方程的孤立波解	14
1.3.3 广义 KdV 方程的孤立波解	17
1.4 非线性 Schrödinger 方程与光纤孤子	21
1.4.1 非线性 Schrödinger 方程的导出	21
1.4.2 非线性 Schrödinger 方程的单孤立波解	28
1.4.3 非线性 Schrödinger 方程行波形式的孤立波解	30
1.5 非线性 Sine-Gordon 方程	32
1.5.1 Josephson 效应和非线性 Sine-Gordon 方程	33
1.5.2 非线性 Sine-Gordon 方程的孤立波解	35
1.5.3 非线性 Sine-Gordon 方程的呼吸孤子解	38
1.6 Burgers 方程及其孤立波解	40
1.6.1 交通模型——Burgers 方程的导出	40
1.6.2 Burgers 方程的孤立波解	42
1.6.3 Hopf-Cole 变换	43
第 2 章 反演散射方法与多孤立波解	45
2.1 散射与反散射问题	46
2.1.1 单孤立子解	46

2.1.2	双孤立子解	47
2.2	散射数据随时间的演化	53
2.3	反散射法解 KdV 方程的具体过程 反演定理的证明	58
2.4	KdV 方程的 n 孤立子解	66
2.4.1	单孤立子解	66
2.4.2	双孤立子解	68
2.4.3	n 孤立子解	71
2.5	反演散射方法的推广	79
2.5.1	Lax 方程	79
2.5.2	AKNS 方法	81
2.6	非线性 Schrödinger 方程的反演散射解法	87
2.6.1	基本思路	87
2.6.2	非线性 Schrödinger 方程 Lax 对的确定	88
2.6.3	直接散射问题(本征值问题)	90
2.6.4	散射数据随时间 t 的演化	93
2.6.5	逆散射变换	95
2.6.6	孤立子解的构造	99
第 3 章	Bäcklund 变换	105
3.1	Bäcklund 变换的定义	106
3.2	KdV 方程的 Bäcklund 变换	110
3.3	Bäcklund 变换与 AKNS 系统	113
3.4	非线性叠加公式	117
3.4.1	KdV 方程的非线性叠加公式	117
3.4.2	Sine-Gordon 方程的非线性叠加公式	118
3.4.3	互换定理的证明	119
3.5	Bäcklund 变换与反散射变换之间的关系	122
第 4 章	可积性与 Painlevé 性质	127
4.1	概述	127
4.2	WTC 方法	133
4.3	实例	136
4.3.1	讨论 Burgers 方程是否具有 Painlevé 性质	136
4.3.2	讨论 KdV 方程的 Painlevé 性质	138
4.4	变系数非线性偏微分方程的 Painlevé 性质	140

4.4.1	广义变系数 KP 方程的 Painlevé 分析和可积性讨论	140
4.4.2	描述顺流方向可变剪切流动的一类变系数 Boussinesq 方程的 Painlevé 分析	143
第 5 章	相似变换与相似解	146
5.1	群的概念及其在微分方程中的应用简介	147
5.1.1	微分方程的不变群	147
5.1.2	无穷小的延拓变换	152
5.1.3	微分方程的不变性	154
5.2	偏微分方程的经典 Lie 群变换法	155
5.3	非经典无穷小变换方法	168
5.4	求相似解的直接方法(CK 方法)	174
第 6 章	特殊变换法求解非线性偏微分方程	186
6.1	Hirota 双线性方法	186
6.1.1	Hirota 双线性变换的相关概念与性质	186
6.1.2	Hirota 双线性方法的具体步骤	187
6.2	Darboux 变换方法	198
6.2.1	概述	198
6.2.2	KP 方程的 Darboux 变换	205
6.2.3	Darboux 变换的约化及 KP 方程的孤立子解	209
6.3	齐次平衡方法	211
6.3.1	方法概述	211
6.3.2	用齐次平衡方法求解 KdV-Burgers 方程	212
6.3.3	用齐次平衡方法求解非线性方程组	215
6.4	函数展开方法	216
6.4.1	tanh 函数法	217
6.4.2	Jacobi 椭圆函数展开法	218
6.4.3	函数展开法的扩展	221
6.5	首次积分法	226
6.5.1	首次积分法的基本原理	227
6.5.2	利用首次积分法求解 Fitzhugh-Nagumo 方程	229
6.5.3	Fisher 方程的精确解	234
附录 A	椭圆函数与椭圆方程	238
A1	椭圆函数	238

A1.1	问题的提出	238
A1.2	椭圆积分的定义	239
A1.3	椭圆函数	240
A1.4	椭圆函数的性质	240
A2	Jacobi 椭圆函数与椭圆方程	243
附录 B	首次积分与一阶偏微分方程	246
B1	一阶常微分方程组的首次积分	246
B1.1	首次积分的定义	246
B1.2	首次积分的性质和存在性	248
B2	一阶线性偏微分方程的解法	255
B2.1	一阶线性齐次偏微分方程	255
B2.2	一阶拟线性偏微分方程	258
附录 C	与波动相关的概念和术语	261
C1	基本概念	261
C2	线性波与非线性波	263
C3	色散波	264
C4	线性波和非线性波的色散	267
C4.1	线性波的色散	267
C4.2	非线性波的色散	271
附录 D	微扰方法简介	273
附录 E	超几何函数与超几何级数	274
参考文献		276

典型方程及其孤立波解

“非线性偏微分方程”研究作为数学模型描述出现在物理学、化学、信息科学、生命科学、空间科学、地理科学和环境科学等领域中的非线性偏微分方程的解法以及解的性质等问题,是非线性科学的重要组成部分;所用方法和手段是“数学”的;因此常常被称为“非线性数学物理方法”,是交叉性、融合性很强的一门学科。

关于非线性偏微分方程的研究在 19 世纪末已经开始,但由于其本身的复杂性,似乎每一个方程都有各自不同的解法,很难有共同的方法和技术来求解,所以被认为是一种个性极强、很难处理的问题. 这种局面发生根本性的变化是从 20 世纪 60 年代开始的. 这时发现了许多不同的偏微分方程有某些共同的性质,有共同的求解方法和性质相似的解. 这样就使得“非线性偏微分方程”成为研究非线性现象共性的一门新兴的交叉学科. 今天,非线性偏微分方程的研究已经渗透到自然科学、工程科学、数学和社会科学的几乎每个学科门类.

目前发现的具有物理意义的非线性偏微分方程有几百种,大量新的非线性偏微分方程还在不断从各个学科中涌现. 这些方程大致分为两类:一类是所谓可积和弱不可积的系统,这些方程都具有一些比较好的性质,比如可以用反散射法 (IST) 求解,具有孤立波和类孤立波解,存在 Bäcklund 变换、Darboux 变换、Hirota 双线性形式、Painlevé 性质和无穷多守恒律等,其中孤立波形式的解由于得到广泛应用而备受关注;另一类方程是所谓的不可积系统,都存在一定的耗散结构,其解可能出现混沌现象. 本书主要研究第一类方程,本章介绍几种典型方程和它们的孤立波形式的解.

1.1 历史回顾

孤立子(soliton)是具有弹性散射性质的孤立波(solitary wave),起源于英国著名科学家、造船工程师 John Scott Russel 在运河河道中观察到的奇特现象. 1844 年 9 月, Russel 在英国科学促进协会第十四届会议(Fourteenth Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science)以“论波动”(On waves)为题所做的报告中谈到自己的一次

不寻常的发现,他描述道:“I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses. When the boat suddenly stopped, not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation...”(我正在观察一条船的运动,这条船由两匹马拉着,沿着狭窄的河道迅速前进着,突然船停了下来,河道内被船体带动的水团并不停止,它们积聚在船头周围激烈的扰动着.然后水浪呈现一个滚圆而又平滑、轮廓分明的巨大孤立波峰,它以很快的速度向前滚动,急速地离开了船头.在行进中它们的形状和速度并没有明显地改变.我骑在马上紧跟着观察,它以每小时8~9英里的速度滚滚向前,并保持长约3英尺,高约1~1.5英尺的原始形状.渐渐地它的高度下降了,当我跟踪1~2英里后,它终于消失在逶迤的河道之中.这就是我在1834年8月第一次偶然遇见的奇特而美丽的景象……)Russel当时认识到他所发现的孤立的耸起的水峰不是通常的水波,通常的水波一部分在水面之上,另一部分在水面之下,而孤立波清清楚楚地是一个完整的全部位于水面之上的波.孤立波也不同于那种在波前有奇异性的冲击波,因为它具有滚圆而光滑的波形,即孤立波处处正则,没有奇异性.此外,它与任何一种由通常的平面波组成的波包都不相同.这是由于它实际上表现为流体力学的一个稳定解.尽管Russel对孤立波的研究有很多真知灼见,但在当时科学界并未产生太大影响,因为没有建立具有说服力的数学模型.

直到60多年后的1895年,荷兰著名数学家D. Korteweg(柯特维格)和它的学生G. de Vries(德佛累斯)研究浅水波的运动,在长波近似和小振幅的假定下,求得了单向运动的浅水波运动方程,即著名的KdV方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{\sigma}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right), \quad (1.1.1)$$

其中, $\eta = \eta(x, t)$ 是高于平衡水平面的波峰高度, x 是平衡水面上沿波传播方向上的坐标, t 表示时间, l 为水深, g 为重力加速度, α 是与液体均匀运动有关的常数, σ 是由

$$\sigma = \frac{1}{3} l^3 - \frac{Tl}{\rho g}$$

定义的常数, T 是毛细现象的表面张力, ρ 是流体的密度.

作数学变换 $t' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l\sigma}}t$, $x' = -\frac{1}{\sqrt{\sigma}}x$, $u = \pm\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\alpha$, 通过运算, 并去掉变量上的“'”号, 得到

$$u_t \pm 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.1.2)$$

这就是 KdV 方程的一般形式.

Korteweg 和 de Vries 从方程(1.1.1)或方程(1.1.2)中求出了与 Russel 所发现的孤立波现象一致的、具有形状不变的脉冲状孤立波解(如图 1.1.1 所示)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct + x_0) \right], \quad (1.1.3)$$

其中 $c > 0$ 为孤立波的传播速度, 与波动本身的性质有关(与波动有关的一些概念和性质见附录 C), x_0 为任意常数.

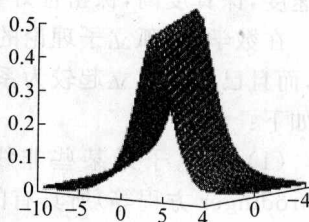


图 1.1.1

从式(1.1.3)可见, 孤立波的传播速度 c 与振幅成正比, 所以较大的孤立波比较小的孤立波运动得快. 如果较小

的孤立波在前, 较大的孤立波在后, 那么后者必将会赶上前者, 两个孤立波就不可避免地发生重叠或碰撞. 当时的问题是: 孤立波是不是稳定的波? 两个孤立波相互碰撞的结果将会怎样呢? 是否变形? 这些问题长期没能得到解决. 有人认为孤立波是非线性波(非线性偏微分方程的解), 它们的重叠不会像线性波那样简单地位移相加, 碰撞后两个孤立波的形状很可能会遭到破坏, 甚至会四分五裂, 支离破碎. 另外一个问题是: 除了流体力学外, 其他领域还有没有孤立波?

1952 年, Enrico Fermi(原子弹之父)领导的科学家小组(John Pasta, Stan Ulam)用数值方法计算了用非线性弹簧联结的 64 个质点组成的弦(称为谐振子)的振动, 其目的是为了从数值实验上验证统计力学中的能量均分定理. 他们对少数质点进行激发, 按照能量均分定理, 由于弱的非线性相互作用, 经过较长时间以后, 初始的激发能量应有涨落均衡地分布到每个质点上. 然而计算结果令人意外, 发现经过几万个周期的长时间实验后, 几乎全部能量又回到初始分布状态, 即绝大部分能量又集中到原先那几个初态能量不为零的谐振子上. 这个结果预示着非线性系统可能出现孤立波. 这就是著名的 FPU 实验. 后来 Toda 考虑晶体的非线性振动, 近似模拟这种情况, 终于得到孤立波解, 从而使 FPU 试验问题得到正确解答. 因此可以设想其他领域也可能存在孤立波.

1965 年美国 Princeton(普林斯顿)大学两位应用数学家 M. D. Kruskal 和 N. Zabusky 通过数值模拟方法深入研究了等离子体中孤立波碰撞的非线性相互作用过程, 得到了孤立波在碰撞后保持其波形和速度不变这一重要结果. 于是彻底解除了从前对孤立波稳定性的怀疑.

Kruskal 和 Zabusky 根据孤立波具有类似于粒子碰撞后形状不变的性质, 将其称为孤立子. 此后, 科学家对孤立子的研究兴趣和热情便一发不可收. 迄今为止, 在许多科学领域发现了孤立子运动形态. 如激光在介质中的自聚焦, 等离子体中的声波和电磁波, 液晶体中畴壁的运动, 流体中的涡旋, 晶体的位错, 超导体中的磁通量, 神经网络中信号的传递等. 还应当指出, 推动孤立子研究的重要原因之一是由于孤立子很有可能在大容量、高速度的光纤通信中得到应用. 有的实验室(如美国 Bell 实验室)已使用孤立波来改进信号传输系统, 提高其传输率. 因为人工产生的光脉冲型孤立子具有在传输中不损失波形, 不改变速度, 保真度高, 保密性好等特点. 目前光孤立子通信已成为一个学科.

在数学上, 孤立子理论的进展体现在发现了一大批具有孤立子解的非线性偏微分方程, 而且已逐渐建立起较为系统的数学和物理的偏微分方程与孤立子理论, 其主要内容概括如下:

(1) 孤立子是某些非线性偏微分方程(如 KdV 方程, Sine-Gordon 方程, 非线性 Schrödinger 方程等)所具有的在空间不弥散的特定的波动解. 由于这些方程中的非线性项和色散效应之间的巧妙平衡, 导致孤立波在传播过程中保持形状不变, 其能量始终集中在狭小的空间范围.

(2) 两个孤立子相互作用出现弹性散射现象. ①它们在相互碰撞时保持稳定, 波形和波速在碰撞后能恢复到原状; ②孤立子具有许多粒子所具有的其他特性, 如具有能量、动量、质量这些粒子属性; ③孤立子在外力作用下的运动服从牛顿第二定律, 因此孤立子兼有波动和粒子的双重属性(与光一样).

(3) 不同类型的具有孤立子解的非线性偏微分方程, 其孤立子解的波形和特性互异, 这就呈现出丰富多彩的孤立子形态(如钟型, 扭结型等).

(4) 除了一维的孤立子, 还有二维空间的涡旋解, 三维空间的磁单极解等.

(5) 孤立子的性态和行为是十分生动和异常复杂的. 如孤立子的产生和湮灭; 异相孤立子的相互排斥, 同相孤立子的相互吸引、往返穿行; 非传播孤立子的纵向静止; 多维孤立子的坍塌; 光通信中的孤立子串或孤立子解群的相互作用等.

(6) 具有孤立子解的方程存在无穷多守恒律. 因此, 孤立子方程是完全可积的无限自由度的 Hamilton 系统.

(7) 为了求解 KdV 方程等非线性偏微分方程, 发展了逆散射方法(inverse scattering method), Bäcklund 变换方法, 数值方法, 符号运算等数学物理方法. 深入研究非线性偏微分方程的代数几何性质时, 用到了较高深的对称方法和代数工具. 在高维孤立子理论中, 将会用到很多微分几何的理论和方法. 因此, 孤立子理论是现代应用数学和数学物理的一个重要组成部分.

(8) 推进孤立子理论不断深入的原因之一是其巨大的应用潜力, 除了上文提到的光孤立子通信理论外, 在生物过程中孤立子的激发占有重要地位. 现在人们已经十分重视研究在化学和其他局部作用中激发起来的孤立子.

(9) 科学家们还运用孤立子理论解释经典理论所不能很好解释的一些问题. 如通过激光光束在非线性介质中自聚焦产生的孤立子的行为特性, 可以成功地解释激光打靶中形成的密度坑与红外线的外移等问题.

总之, 孤立子的非凡性质及其与数学描述有关的极其丰富的结构, 它的深刻的物理根源和正在开拓的广阔的应用前景, 都向人们施展着愈来愈大的科学魅力.

1.2 孤立波——非线性会聚和色散现象的巧妙平衡

研究表明, 孤立波是非线性效应和色散效应相互间巧妙平衡的结果. 下面我们依次来分析波动中的非线性效应和色散效应, 再来研究它们的平衡, 即产生孤立波需要什么条件.

1.2.1 波动中的非线性会聚现象

波动中的非线性会聚效应在生活中随处可见, 威风吹拂, 水面只掀起层层碎浪; 劲风吹来, 浪尖则卷起浪花, 这就是一种非线性会聚效应. 这是因为在劲风的推动下, 在水浪的不同高度上有不同的前进速度. 同样的情况可以出现在海滩边. 远处传来的海浪越接近海岸, 浪尖越高, 终于在离海岸不远处卷起了浪花. 这是因为海滩对水浪运动产生某种阻力, 海浪的较低部分受到的阻滞力较大, 而较高的部分受到的阻滞力较小. 由此可见, 当一个水浪的不同部分有不同的行进速度时, 将会出现会聚效应. 特别是当水浪高处速度大, 低处速度小, 水浪会在前进中越来越前倾, 于是在某一时刻波前出现坍塌, 卷起浪花. 如图 1.2.1 所示.



图 1.2.1

下面用数学模型来说明波动中的会聚现象. 已知介质中的波动是随时间传播的扰动, 设波动介质是由相互间没有作用的粒子组成, 为了简单, 研究一维情况, 设在 t 时刻, 介质 x 处的粒子密度为 $n(x, t)$, 由于粒子既不会产生, 也不会消灭, 故有

$$\frac{dn}{dt} = 0, \quad (1.2.1)$$

写成全导数形式即是

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0, \quad (1.2.2)$$

由于 $\frac{dx}{dt} = v$ 是粒子的移动速度, 故式(1.2.2)可以写成

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (1.2.3)$$

在一般情况下, 速度是坐标与时间的复杂函数, 然而如果 $v = v_0$ 是常数, 方程(1.2.3)是线性方程, 具有行波解(一阶线性偏微分方程的解法见附录 B)

$$n(x, t) = F(x - v_0 t), \quad (1.2.4)$$

这时, 介质的移动速度 v_0 也就是波速. 而在初始时刻 $t = 0$ 时介质中出现的扰动, 即波动

$$n(x, 0) = F(x) \quad (1.2.5)$$

将在传播中保持不变, 波动将以速度 v_0 无畸变地沿着 x 方向前进.

然而, 在非线性的情况下, 方程(1.2.3)的解将是很复杂的. 例如, 波动的速度 v 可能与介质的密度 n 有关, 即 $v = v(n)$, 在这种情况下, 一次近似($v(n)$ 仍按常数对待, $v = v_0 + \dots$)的形式为

$$n(x, t) = F[x - v(n)t]. \quad (1.2.6)$$

方程(1.2.6)所描述的行波, 波的不同部分具有不同的运动速度, 特别是当 $\frac{dv}{dn} > 0$ 时, 波速随密度增大而增大. 因此可以想象, 随着波的传播, 波包的的前沿会越来越陡, 意味着形成了某种会聚效应, 随着行进中波包越来越前倾, 于是在某一时刻会发生类似于图 1.2.1 的波形坍塌现象.

1.2.2 波动中的色散

波动在传播过程中往往存在色散现象(关于色散现象较详细的介绍见附录 C). 一个频率为 ω , 沿着 x 方向传播的平面波 $u(x, t)$ 可以表示为

$$u(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)], \quad (1.2.7)$$

式中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ 为波长. 在多维情况下, 应写成矢量 $\mathbf{k}$, 矢量指向代表波的传播方向, 故称为波矢, 也称传播常数. 平面波(1.2.7)的等相位面由下式给出:

$$\phi = kx - \omega t. \quad (1.2.8)$$

由 $d\phi = 0$ 可得等相位面的运动速度, 即相速 v . 因为

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = k dx - \omega dt = 0,$$