



浙江省高等教育重点建设教材

A 高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

(专升本)

李永琪 / 主 编
许红娅 薛秀谦 / 副主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社



中华人民共和国教育部备案

高等数学

(专升本)

主编 张纪岳 / 主审 王长庚

清华大学出版社



浙江省高等教育重点建设教材

A 高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

(专升本)

李永琪 / 主 编
许红娅 薛秀谦 / 副主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(专升本) / 李永琪主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2007. 3

ISBN 978-7-308-05116-3

I. 高... II. 李... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 165343 号

高等数学(专升本)

李永琪 主编

许红娅 薛秀谦 副主编

责任编辑 周卫群

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷 富阳市育才印刷有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 18

字 数 330 千

版 次 2007 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-05116-3

定 价 27.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

前 言

本书是根据教育部高教司审订的《高等数学教学大纲考试大纲》(2003年版)的要求,在假定读者已掌握大学专科《高等数学》(一元微积分)的基础上编写的。目前同类型的教材尚不多,教学时常常直接沿用本科《高等数学》(下册),至于如何考虑与一元微积分的衔接,就由任课教师自行解决了,这就给教学带来诸多不便。

在本书的编写过程中,我们考虑到专升本的特点,注重与一元微积分的衔接,同时在内容的选取上既考虑人才培养的应用性及专业特点,又能使学生具有一定的可持续发展性。本书试图贯彻“以应用为目的,以必需够用为度”的原则;重点放在“掌握概念,强化应用,培养能力,提高素质”上。通过本门课程的学习,实现传授知识和发展能力两方面的教学目的,积极为学生终身学习搭建平台、拓展空间。本书不仅把高等数学课程当作重要的基础课和工具课,更将其视为一门素质课,启发学生思维,促进学生能力的提高。

全书共分六章,内容包括一元函数微积分概要、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数等,每章配有一定数量的习题,还备有一份综合测试题,以供自我检查学习效果之用。书后附有全部习题和测试题的答案,书中打“*”号的内容可根据不同专业选用。

对于书中的不足之处,我们恳切地希望读者提出宝贵意见。

李永琪 许红娅 薛秀谦

2007年1月

目 录

第 1 章 一元函数微积分概要	001
1.1 极限	001
1.1.1 极限概念	001
1.1.2 极限运算	004
1.1.3 连续	009
1.2 导数	010
1.2.1 导数概念	010
1.2.2 导数运算	011
1.2.3 微分	015
1.2.4 导数的应用	016
1.3 积分	018
1.3.1 不定积分	019
1.3.2 定积分	026
* 1.4 一元微积分在经济分析中的应用	033
1.4.1 基本内容	033
1.4.2 举例	035
习题一	038
综合测试题一	039
第 2 章 微分方程	042
2.1 基本概念	042

2.1.1 引例	042
2.1.2 常微分方程的基本概念	044
2.2 变量可分离及齐次微分方程	046
2.2.1 变量可分离的微分方程	046
2.2.2 齐次微分方程	047
2.3 一阶线性微分方程	051
2.3.1 一阶线性微分方程	051
* 2.3.2 用适当的变量替换转化方程的类型	055
2.4 可降阶的高阶微分方程	057
2.4.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型	057
2.4.2 $y'' = f(x, y')$ 型	058
2.4.3 $y'' = f(y, y')$ 型	059
2.5 二阶线性齐次微分方程	061
2.5.1 二阶线性齐次微分方程解的结构	061
2.5.2 二阶常系数线性齐次微分方程的求解法	062
2.6 二阶线性非齐次微分方程	065
2.6.1 二阶线性非齐次微分方程解的结构	065
2.6.2 二阶常系数线性非齐次微分方程的求解法	066
* 2.7 差分方程	075
2.7.1 差分的基本概念	075
2.7.2 差分方程的概念	076
2.7.3 常系数线性差分方程通解的结构	077
2.7.4 一阶常系数线性差分方程	078
2.7.5 二阶常系数线性差分方程	082
习题二	086
综合测试题二	089

第3章 向量代数与空间解析几何	091
-----------------------	-----

002	3.1 空间直角坐标系	091
-----	-------------------	-----

3.1.1 空间直角坐标系	091
3.1.2 两点间的距离公式	093
3.2 向量及其线性运算	093
3.2.1 向量的概念	093
3.2.2 向量的线性运算	094
3.2.3 向量的坐标表示	096
3.3 向量的数量积与向量积	098
3.3.1 向量的数量积	098
3.3.2 向量的向量积	100
* 3.3.3 向量的混合积	103
3.4 平面与直线方程	104
3.4.1 平面方程	104
3.4.2 空间直线方程	109
3.5 空间曲面与曲线方程	113
3.5.1 空间曲面方程	113
3.5.2 空间曲线方程	117
3.6 二次曲面	119
3.6.1 椭球面	120
3.6.2 椭圆锥面	121
3.6.3 椭圆抛物面	121
习题三	123
综合测试题三	126
第4章 多元函数微分学	128
4.1 多元函数的概念	128
4.1.1 平面点集与 n 维空间	128
4.1.2 多元函数的定义	130
4.1.3 二元函数的极限与连续	132

4.2	偏导数	134
4.2.1	偏导数的概念与计算	134
4.2.2	高阶偏导数	138
4.3	全微分	140
4.3.1	全微分的概念与计算	140
4.3.2	全微分在近似计算上的应用	143
4.4	复合函数与隐函数的偏导数	143
4.4.1	复合函数的偏导数	143
4.4.2	隐函数的偏导数	147
4.5	偏导数在几何上的简单应用	151
4.5.1	空间曲线的切线与法平面	151
4.5.2	曲面的切平面与法线	153
4.6	方向导数和梯度	154
4.6.1	方向导数	154
4.6.2	梯度	157
4.7	多元函数的极值	158
4.7.1	多元函数的极值及其判定	158
4.7.2	最值问题	160
4.7.3	条件极值	161
* 4.7.4	最小二乘法	164
	习题四	165
	综合测试题四	169
第5章	多元函数积分学	171
5.1	点函数积分的概念	171
5.1.1	点函数积分的定义	171
5.1.2	点函数积分的性质	173
5.2	二重积分	174

5.2.1	二重积分在直角坐标系下的算法	174
5.2.2	二重积分在极坐标系下的算法	180
5.3	三重积分	184
5.3.1	三重积分在直角坐标系下的算法	185
5.3.2	三重积分在柱面坐标系下的算法	187
5.3.3	三重积分在球面坐标系下的算法	188
5.4	重积分的应用	191
5.4.1	空间立体的体积	191
5.4.2	曲面的面积	192
* 5.4.3	物理应用	193
5.5	曲线积分	198
5.5.1	对弧长的曲线积分	198
5.5.2	对坐标的曲线积分	200
5.5.3	格林公式	204
5.5.4	平面上的曲线积分与路径无关的条件	206
5.6	曲面积分	212
	习题五	214
	综合测试题五	218
第 6 章	无穷级数	221
6.1	数项级数的概念及其性质	221
6.1.1	数项级数的概念	221
6.1.2	级数敛散的性质	223
6.2	正项级数	225
6.2.1	比较判别法	226
6.2.2	比值判别法	229
6.2.3	根值判别法	230
6.3	变号项级数	231

6.3.1	交错级数	231
6.3.2	绝对收敛与条件收敛	233
6.4	幂级数	235
6.4.1	函数项级数及其收敛域	235
6.4.2	幂级数的收敛半径与收敛区间	236
6.4.3	幂级数的运算性质	240
6.5	函数的幂级数展开	243
6.5.1	泰勒级数	243
6.5.2	函数的幂级数展开	246
6.5.3	欧拉公式	251
6.6	傅里叶级数	251
6.6.1	三角函数系的正交性	252
6.6.2	傅里叶级数	253
6.6.3	奇、偶函数的傅里叶级数,奇、偶延拓	259
	习题六	262
	综合测试题六	265
	参考答案	267

第1章

一元函数微积分概要

本章是为专升本的学生特意安排的。主要是针对一元函数微积分中的基本概念和基本运算作一个简单的回顾,即复习一元函数的极限、导数和积分这三大运算,特别还为经贸类的学生回顾了微积分在经济方面的某些应用,使得前后有良好的衔接,为学习多元函数微积分作准备。

1.1 极 限

本节首先回顾极限、无穷小、无穷大及左右极限等概念;然后主要复习求极限的几种常用方法,并举例说明;最后讲一下连续与间断的概念。知识点后附有例题、习题,希望通过做练习来巩固所学的知识。

1.1.1 极限概念

1. 极限定义

极限是高等数学最基本的概念,它是在给定一个函数 $f(x)$ 后,研究在自变量 x 的某种变化趋势下,函数 $f(x)$ 的变化趋势,其研究方法是建立在无限概念基础上的一种分析方法,所以其严密的定义较为抽象。

函数极限的形式虽然有多种,但主要是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 两种,下面进行具体说明。

如果在自变量 x 的某种变化趋势下,函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A ,则称在这种趋势下, $f(x)$ 是以 A 为极限的。即,

当 $\begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty \end{cases}$ 时, $f(x) \rightarrow A$, 记为 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \end{cases}$

$$\text{如: } \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 5) = 9, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{x+1} = \sin 0 = 0$$

我们用逐步推进的方式,去理解极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的严密的数学定义:

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 无限接近于常数 A ;

$\Leftrightarrow$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 与 A 之间的距离可以任意接近;

$\Leftrightarrow$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $|f(x) - A|$ 可以任意小;

$\Leftrightarrow$ 对任给的 $\epsilon > 0$ (不论它多么小), 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

以上最后一段就是极限的严密数学定义,用通俗的话说,就是:

如果对任给的无论多么小的正数 ϵ , 总可以找到 x_0 的某个去心邻域 $0 < |x - x_0| < \delta$, 使得在此邻域内, $f(x)$ 与 A 之间的距离 $|f(x) - A|$ 可以比 ϵ 还要小, 即 $|f(x) - A| < \epsilon$, 从而在数量上刻画了 $f(x)$ 可以无限接近于常数 A .

对同学们来说, 主要是理解此定义. 下面看一个简单的例题, 再来体会一下.

【例 1】 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1$.

解 一般我们从不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$ 着手考虑, 由于

$$|f(x) - A| = |(2x - 1) - 1| = 2|x - 1|$$

为了使 $|f(x) - A| < \epsilon$, 只要 $2|x - 1| < \epsilon$, 即 $|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}$.

所以, 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 可取 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, 则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 成立

$$|f(x) - 1| < \epsilon$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1$$

注意: 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的定义也是类似的, 区别在于

$$x \rightarrow x_0 \xrightarrow{\text{换成}} x \rightarrow \infty$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \xrightarrow{\text{换成}} |x| > X$$

同学们可以自己琢磨一下.

2. 无穷小与无穷大

无穷小: 如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时, $f(x)$ 为无穷小.

无穷大: 如果在自变量 x 的某种变化趋势下, $|f(x)|$ 无限增大, 则称在这种趋势下, $f(x)$ 为无穷大. 此时极限不存在, 但为了方便起见, 也称极限为无穷大, 并记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty$$

以 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 为例说明, 我们仍用逐步推进的方式, 去理解极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 的严密的数学定义:

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $|f(x)|$ 无限增大;

$\Leftrightarrow$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $|f(x)|$ 可以任意大;

$\Leftrightarrow$ 对任给的 $M > 0$ (不论它多么大), 总存在正数 X , 使得当 $|x| > X$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)| > M$$

则称

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

细心的同学注意到这段定义与前面定义的区别了吗?

当我们描述 $\begin{cases} |f(x) - A| \text{ 可任意小, 用任意小 } \epsilon > 0, \text{ 使得 } |f(x) - A| < \epsilon \\ |f(x)| \text{ 可任意大, 用任意大 } M > 0, \text{ 使得 } |f(x)| > M \end{cases}$

对同学们来说, 主要也是理解此定义.

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0$, 故当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x-1}$ 为无穷小;

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$, 故当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1}{x-1}$ 为无穷大.

注意: (1) 从上例可见, 无穷小与无穷大与自变量的趋势有关.

(2) 无穷小与无穷大有倒数关系.

即, 如果 $f(x) \rightarrow 0$, 则 $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty (f(x) \neq 0)$;

如果 $f(x) \rightarrow \infty$, 则 $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$.

3. 左右极限

左极限:从 x_0 左边趋于 x_0 (即小于 x_0 趋于 x_0) 时的极限,称为在 x_0 点的左极限,

$$\text{记作 } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ 或 } f(x_0^-);$$

右极限:从 x_0 右边趋于 x_0 (即大于 x_0 趋于 x_0) 时的极限,称为在 x_0 点的右极限,

$$\text{记作 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ 或 } f(x_0^+).$$

$$\text{结论: } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow +\infty)}} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ (x \rightarrow +\infty)}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = A,$$

即极限存在的充分必要条件是左右极限均存在且相等.

【例 2】 设 $f(x) = \begin{cases} \ln x + e & x > e \\ x + 1 & x < e \end{cases}$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$.

解 $x = e$ 是此分段函数的分界点, $x = e$ 左右的 $f(x)$ 的表示式不同, 所以应该用左右极限来判定此极限是否存在.

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} (\ln x + e) = 1 + e, \quad \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} (x + 1) = e + 1,$$

$$\text{从而 } \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = 1 + e$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow e} f(x) = e + 1.$$

【例 3】 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$.

解 如图 1-1 所示, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$, 从而 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在.

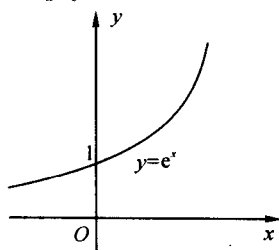


图 1-1

1.1.2 极限运算

下面回顾一下求极限的几种常用方法.

1. 利用几个重要极限求极限

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & n = m \\ 0 & n < m \\ \infty & n > m \end{cases}$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \right)$$

一般地, 当 $u(x) \rightarrow 0$ 时

$$\frac{\sin u(x)}{u(x)} \rightarrow 1, \quad (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} \rightarrow e$$

【例 4】 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-4)^{20} (2x+1)^{30}}{(2-3x)^{50}}$.

解 这是多项式之比求 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 由上面的公式可知, 只要看分子与分母的最高次幂就行了, 分子与分母的最高次均为 50 次, 所以利用上面的结论, 立刻可以得到极限值.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-4)^{20} (2x+1)^{30}}{(2-3x)^{50}} = \frac{3^{20} \cdot 2^{30}}{(-3)^{50}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{30}$$

【例 5】 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1})$.

解 这是 $\infty - \infty$ 型极限, 先分子有理化, 化成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限, 再分子与分母同除以 x 的最高次, 就可求得极限了.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

【例 6】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = 5$

【例 7】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan 2(x-1)}{x^2-1}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan 2(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)} \cdot \frac{1}{\cos 2(x-1)} \cdot \frac{2}{x+1} = 1$

【例 8】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 这是 $(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}$ 型极限, 可以先找到趋于 0 的 $u(x)$, 再变形, 求得极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+(-2x))^{\frac{1}{-2x} \cdot (-2)} = e^{-2} \quad \left(u(x) = -2x \right)$$

【例 9】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n+1) - \ln(n-1))$.

解 这是 $\infty - \infty$ 型极限, 可利用对数函数的性质将表示式转换成 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 型极限.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n+1) - \ln(n-1)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{2n}{n-1}} \\ &= \ln e^2 = 2\end{aligned}$$

$u = \frac{2}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

2. 利用有界量与无穷小的乘积为无穷小求极限

◆ 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$, 且 $|g(x)| \leq M$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)g(x) = 0$.

【例 10】 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{2+x^2}\right)^{10} \sin(x+1)$.

利用前面提到的多项式之比求极限的结论

解 虽然 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x+1)$ 不存在, 但 $|\sin(x+1)| \leq 1$, 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{2+x^2}\right)^{10} = 0$, 所以, 这是有界量与无穷小乘积的极限, 故此极限为 0.

【例 11】 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{2}{x} + \frac{1}{x} \sin \frac{x}{2} & x > 0 \\ k + x^2 & x < 0 \end{cases}$, 求 k , 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

解 这是分段函数求极限, 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{2} = 0 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (k + x^2) = k;$$

有界量与无穷小乘积的极限

所以, 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

3. 利用等价无穷小替换求极限

常用的等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim (e^x - 1) \sim \ln(1+x);$$

$$(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^2; \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$$