浙江省高等教育重点建设教材

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

（专升本）

李永琪 / 主　编
许红娅　薛秀谦 / 副主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等数学

（专升本）

浙江省高等教育重点建设教材

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

（专升本）

李永琪 / 主　编
许红娅　薛秀谦 / 副主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(专升本)/李永琪主编. —杭州：浙江大学出版社，2007.3
ISBN 978-7-308-05116-3

Ⅰ.高... Ⅱ.李... Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 165343 号

高等数学(专升本)

李永琪 主编

许红娅 薛秀谦 副主编

责任编辑 周卫群
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 18
字　　数 330 千
版 印 次 2007 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-05116-3
定　　价 27.00 元

前　言

本书是根据教育部高教司审订的《高等数学教学大纲考试大纲》(2003年版)的要求，在假定读者已掌握大学专科《高等数学》(一元微积分)的基础上编写的。目前同类型的教材尚不多，教学时常常直接沿用本科《高等数学》(下册)，至于如何考虑与一元微积分的衔接，就由任课教师自行解决了，这就给教学带来诸多不便。

在本书的编写过程中，我们考虑到专升本的特点，注重与一元微积分的衔接，同时在内容的选取上既考虑人才培养的应用性及专业特点，又能使学生具有一定的可持续发展性。本书试图贯彻"以应用为目的，以必需够用为度"的原则，重点放在"掌握概念，强化应用，培养能力，提高素质"上。通过本门课程的学习，实现传授知识和发展能力两方面的教学目的，积极为学生终身学习搭建平台、拓展空间。本书不仅把高等数学课程当作重要的基础课和工具课，更将其视为一门素质课，启发学生思维，促进学生能力的提高。

全书共分六章，内容包括一元函数微积分概要、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数等，每章配有一定数量的习题，还备有一份综合测试题，以供自我检查学习效果之用。书后附有全部习题和测试题的答案，书中打"*"号的内容可根据不同专业选用。

对于书中的不足之处，我们恳切地希望读者提出宝贵意见。

李永琪　许红娅　薛秀谦

2007年1月

目　　录

第 1 章

一元函数微积分概要

本章是为专升本的学生特意安排的。主要是针对一元函数微积分中的基本概念和基本运算作一个简单的回顾，即复习一元函数的极限、导数和积分这三大运算，特别还为经贸类的学生回顾了微积分在经济方面的某些应用，使得前后有良好的衔接，为学习多元函数微积分作准备.

1.1 极　　限

本节首先回顾极限、无穷小、无穷大及左右极限等概念；然后主要复习求极限的几种常用方法，并举例说明；最后讲一下连续与间断的概念. 知识点后附有例题、习题，希望通过做练习来巩固所学的知识.

1.1.1 极限概念

1. 极限定义

极限是高等数学最基本的概念，它是在给定一个函数 $f(x)$ 后，研究在自变量 x 的某种变化趋势下，函数 $f(x)$ 的变化趋势，其研究方法是建立在无限概念基础上的一种分析方法，所以其严密的定义较为抽象.

函数极限的形式虽然有多种，但主要是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 两种，下面进行具体说明.

如果在自变量 x 的某种变化趋势下，函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称在这种趋势下，$f(x)$ 是以 A 为极限的. 即，

$$当\begin{cases}x \to x_0 \\ x \to \infty\end{cases}时,f(x) \to A,记为\begin{cases}\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A\end{cases}$$

如:$\lim\limits_{x \to 2}(2x+5) = 9$, $\lim\limits_{x \to \infty}\sin\frac{\pi}{x+1} = \sin 0 = 0$

我们用逐步推进的方式,去理解极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$的严密的数学定义:

当$x \to x_0$时,$f(x)$无限接近于常数A;

$\Leftrightarrow$当$x \to x_0$时,$f(x)$与A之间的距离可以任意接近;

$\Leftrightarrow$当$x \to x_0$时,$|f(x) - A|$可以任意小;

$\Leftrightarrow$对任给的$\varepsilon > 0$(不论它多么小),总存在$\delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时,对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

以上最后一段就是极限的严密数学定义,用通俗的话说,就是:

如果对任给的无论多么小的正数ε,总可以找到x_0的某个去心邻域$0 < |x - x_0| < \delta$,使得在此邻域内,$f(x)$与A之间的距离$|f(x) - A|$可以比ε还要小,即$|f(x) - A| < \varepsilon$,从而在数量上刻画了$f(x)$可以无限接近于常数A.

对同学们来说,主要是理解此定义.下面看一个简单的例题,再来体会一下.

【例 1】 证明$\lim\limits_{x \to 1}(2x - 1) = 1$.

解 一般我们从不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$着手考虑,由于

$$|f(x) - A| = |(2x-1) - 1| = 2|x - 1|$$

为了使$|f(x) - A| < \varepsilon$,只要$2|x-1| < \varepsilon$,即$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

所以,对任意给定的$\varepsilon > 0$,可取$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$,则当$0 < |x - 1| < \delta$时,成立

$$|f(x) - 1| < \varepsilon$$

从而

$$\lim_{x \to 1}(2x - 1) = 1$$

注意:极限$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$的定义也是类似的,区别在于

$$x \to x_0 \xrightarrow{换成} x \to \infty$$

从而

$$0<|x-x_0|<\delta \xrightarrow{\text{换成}} |x|>X$$

同学们可以自己琢磨一下.

2. 无穷小与无穷大

无穷小：如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，则称当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，$f(x)$ 为无穷小.

无穷大：如果在自变量 x 的某种变化趋势下，$|f(x)|$ 无限增大，则称在这种趋势下，$f(x)$ 为无穷大. 此时极限不存在，但为了方便起见，也称极限为无穷大，并记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$$

以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 为例说明，我们仍用逐步推进的方式，去理解极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 的严密的数学定义：

当 $x\to\infty$ 时，$|f(x)|$ 无限增大；

$\Leftrightarrow$ 当 $x\to\infty$ 时，$|f(x)|$ 可以任意大；

$\Leftrightarrow$ 对任给的 $M>0$(不论它多么大)，总存在正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)|>M$$

则称

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

细心的同学注意到这段定义与前面定义的区别了吗？

当我们描述 $\begin{cases}|f(x)-A| \text{可任意小，用任意小 } \varepsilon>0\text{，使得 } |f(x)-A|<\varepsilon \\ |f(x)| \text{可任意大，用任意大 } M>0\text{，使得 } |f(x)|>M\end{cases}$

对同学们来说，主要也是理解此定义.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$，故当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x-1}$ 为无穷小；

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，故当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1}{x-1}$ 为无穷大.

注意：(1) 从上例可见，无穷小与无穷大与自变量的趋势有关.

(2) 无穷小与无穷大有倒数关系.

即，如果 $f(x)\to 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}\to\infty(f(x)\neq 0)$；

如果 $f(x)\to\infty$，则 $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$.

3. 左右极限

左极限:从 x_0 左边趋于 x_0(即小于 x_0 趋于 x_0)时的极限,称为在 x_0 点的左极限,

$$\text{记作} \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{或} f(x_0^-);$$

右极限:从 x_0 右边趋于 x_0(即大于 x_0 趋于 x_0)时的极限,称为在 x_0 点的右极限,

$$\text{记作} \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{或} f(x_0^+).$$

结论:$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\(x\to+\infty)}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0^-\\(x\to-\infty)}} f(x)=A$,

即极限存在的充分必要条件是左右极限均存在且相等.

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}\ln x+\mathrm{e} & x>\mathrm{e}\\ x+1 & x<\mathrm{e}\end{cases}$,求极限$\lim\limits_{x\to\mathrm{e}} f(x)$.

解 $x=\mathrm{e}$是此分段函数的分界点,$x=\mathrm{e}$左右的$f(x)$的表示式不同,所以应该用左右极限来判定此极限是否存在.

$$\lim_{x\to\mathrm{e}^+} f(x)=\lim_{x\to\mathrm{e}^+}(\ln x+\mathrm{e})=1+\mathrm{e},\ \lim_{x\to\mathrm{e}^-} f(x)=\lim_{x\to\mathrm{e}^-}(x+1)=\mathrm{e}+1,$$

从而 $\lim\limits_{x\to\mathrm{e}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\mathrm{e}^-} f(x)=1+\mathrm{e}$

所以 $\lim\limits_{x\to\mathrm{e}} f(x)=\mathrm{e}+1$.

【例 3】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$.

解 如图 1-1 所示,因为

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x$,从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$不存在.

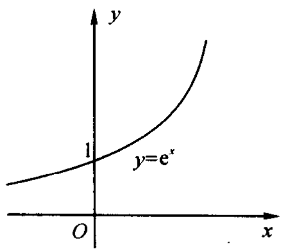

图 1-1

1.1.2 极限运算

下面回顾一下求极限的几种常用方法.

1. 利用几个重要极限求极限

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

◆ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\quad\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}\right)$

一般地，当$u(x)\to 0$时

$\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}\to 1,\ (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\to \mathrm{e}$

【例 4】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-4)^{20}(2x+1)^{30}}{(2-3x)^{50}}$.

解 这是多项式之比求 $x\to\infty$ 时的极限，由上面的公式可知，只要看分子与分母的最高次幂就行了，分子与分母的最高次均为 50 次，所以利用上面的结论，立刻可以得到极限值.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-4)^{20}(2x+1)^{30}}{(2-3x)^{50}}=\frac{3^{20}\cdot 2^{30}}{(-3)^{50}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$$

【例 5】 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1})$.

解 这是 $\infty-\infty$ 型极限，先分子有理化，化成$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限，再分子与分母同除以 x 的最高次，就可求得极限了.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

【例 6】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5$

【例 7】 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan 2(x-1)}{x^2-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan 2(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}\cdot\dfrac{1}{\cos 2(x-1)}\cdot\dfrac{2}{x+1}=1$

【例 8】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 这是 $(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}$ 型极限，可以先找到趋于0的 $u(x)$，再变形，求得极限.

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}=\mathrm{e}^{-2}$$

$u(x)=-2x$

【例 9】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\ln(n+1)-\ln(n-1))$.

解 这是 $\infty-\infty$ 型极限,可利用对数函数的性质将表示式转换成 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 型极限.

$$\lim_{n\to\infty}n(\ln(n+1)-\ln(n-1))=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{2n}{n-1}}$$
$$=\ln e^2=2$$

$u=\dfrac{2}{n-1}\xrightarrow{n\to\infty}0$

2. 利用有界量与无穷小的乘积为无穷小求极限

◆ 设 $\lim h(x)=0$,且 $|g(x)|\leqslant M$,则 $\lim h(x)g(x)=0$.

【例 10】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{2+x^2}\right)^{10}\sin(x+1)$.

利用前面提到的多项式之比求极限的结论

解 虽然 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(x+1)$ 不存在,但 $|\sin(x+1)|\leqslant1$,又 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{2+x^2}\right)^{10}=0$,所以,这是有界量与无穷小乘积的极限,故此极限为 0.

【例 11】 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{2} & x>0\\ k+x^2 & x<0\end{cases}$,求 k,使得 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

解 这是分段函数求极限,当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 时,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\sin\frac{2}{x}+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{2}=0+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

有界量与无穷小乘积的极限

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(k+x^2)=k;$$

所以,当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

3. 利用等价无穷小替换求极限

常用的等价无穷小:当 $x\to0$ 时,

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim(e^x-1)\sim\ln(1+x)$;

$(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$;$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.