MINGSHI KETANG

名师教你学数学

名师课堂

高二数学（试用本）第一学期

主编◎沈子兴

国内首创互联网多媒体教辅

动感十足的课外学习

每周同步的优化教学

享受顶级的家教服务

www.yikeyilian.com

华东师范大学出版社

图书和网络使用说明

1 购买《名师课堂》图书，在封二拿到认证码。

2 在一课一练网站（http://www.yikeyilian.com）即可链接到“名师课堂”网站。

3 用认证码注册、登录“名师课堂”网站。

名师大讲堂，把最好的名师带回家。

名师电子书，一本“活”的教材。

4 进入本周学习单元，对照《名师课堂》书籍使用。

5 进入单元自我评估，为自己的学习成绩打打分。

6

ISBN 978-7-5617-5483-2

定价：16.00元

www.ecnupress.com.cn

名师教你学数学

名师课堂

高二数学（试用本）（第一学期）

华东师范大学出版社

主编　沈子兴

图书在版编目(CIP)数据

名师课堂：高二数学. 试用本. 第一学期/沈子兴主编. —上海：华东师范大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-5617-5483-2

Ⅰ. 名… Ⅱ. 沈… Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 107563 号

名师课堂
高二数学(试用本)(第一学期)

著　　者　沈子兴
项目编辑　教辅分社
文字编辑　杨娟娜
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021—62450163 转各部　行政传真 021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真 021—62860410　021—62602316
邮购零售　电话 021—62869887　021—54340188

印 刷 者　常熟市华通印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　9.75
字　　数　242 千字
版　　次　2007 年 8 月第一版
印　　次　2007 年 8 月第一次
印　　数　5100
书　　号　ISBN 978-7-5617-5483-2/G·3213
定　　价　16.00 元

出 版 人　朱杰人

致读者：
体验 e-Learning

亲爱的同学，您是否已经意识到，时代发展到今天，扑面而来的是一个互联网的新世纪？您是否已经感受到它对我们形成的巨大压力和挑战？亲爱的同学，千万别退却，千万别错过，迎上去，到网上去试一试，互联网平台呈现的是一种全新的学习方式——前所未有的、无限开阔的思维空间，与众不同的、贴近现实的知识深度和广度，多种灵活生动的网上互动形式……所有这些都将深深地吸引着我们，从而使我们现有的学习内容和思维方式产生质的飞跃．比如，仅从名师的课程内容来看，借助互联网，使学习资源得到极大的丰富和拓展，可以满足我们很多同学的需要，不管您生活在上海哪个区域，都可以共享上海名师的思想和智慧，这对于您培养自己良好的思维品质、勤勉的学习习惯和不断创新的实践能力，无疑会有很大帮助．相信您一定能迅速适应这种新的学习方式，跟上互联网时代的发展，做一个对社会有用的人．

《名师课堂》这套图书，是本社继“《一课一练》之传说之旅”教育游学网站成功开发小学版和初中版以后，又一套真正把图书和网络紧密结合的互联网多媒体教学辅导书．它极大地发挥了图书和互联网的优势，生动形象地再现了各学科所要学习的主要内容．这套图书以周为单位，每周由“讲”和“练”两部分组成，讲和练都采取了图书与电子网络相结合的全新的呈现方式．小学全部用动画的形式进行课堂教学，初、高中由图书的作者用课堂实录（视频）的方式进行授

课. 每周有**"知识与方法"、"拓展与提高"、"周末训练"**三大板块.

"知识与方法"注重名师的指导和启发，帮助我们梳理贯通每周所学知识，并创造性地加以思考和运用. 书中介绍了多种思维方法，并采用例题解析的形式进行演示和点评.

"拓展与提高"结合教材，增加了一些新的内容和材料，进一步激发学生思维的积极性，培养学生多层次多角度地分析、思考和解决问题的能力.

"周末训练"是一套出自名师之手、经缜密设计的训练系统，覆盖每周所有学习内容，突出重点和难点、疑点和盲点，注重于巩固、迁移和综合运用，把握训练的有效性.

应该特别说明的是，参与本套图书的编写者都是上海市富有教学经验的知名特、高级教师，他们的"讲解"简洁精当、"训练"切中实质，是构成本套图书的精华所在.

我们希望把图书和网络做得像诗歌、音乐和星体学一样迷人，让同学们产生无尽的兴趣：原来学习可以这么有趣，原来学习可以这么快乐. 使用这套图书的同学即可享受"网上课堂"的售后服务. 每学期 15～16 周，与上海市二期课改教材完全同步.

本套图书的小学版，其精美的插图，还有网上丰富多彩的动画、游戏和趣味学习内容，均由上海意智成网络科技有限公司制作.

华东师范大学出版社

目　录

第7章　数列与数学归纳法

名师教你学数学
名师课堂

第1周　数列、等差数列及等比数列

【知识与方法】

1. 对数列中有关概念的认识

(1) 数列与数集的区别.

(2) 数列的通项公式 $a_n = f(n)$ 与函数 $y = f(x)$ 的区别.

(3) 数列按项数分类：有穷数列、无穷数列.

说明：数列中的数可以相同但是是有序的，而数集中元素是互异而无序的，表示方法也不相同.

$a_n = f(n)$ 定义域为 $\mathbf{N}^*$ 或其有限子集，在坐标平面上表示一列离散的点.

2. 根据数列通项或递推关系确定数列中的项

例1　已知无穷数列 1×2, 2×3, 3×4, $\cdots$, $n(n+1)$, $\cdots$

(1) 求这个数列的第10项，第31项及第48项；

(2) 420是不是这个数列中的项？如果是，它是第几项？

答案　(1) $a_{10} = 110$, $a_{31} = 992$, $a_{48} = 2\,352$；

(2) 420是这个数列中第20项.

解析　由条件可知此数列的通项公式是 $a_n = n(n+1)$. 求该数列中某一具体项，则只需将 n 代入具体的正整数即可，本题中即求 a_{10}, a_{31}, a_{48}，将 $n = 10$、31、48代入计算即得.

420是不是这个数列中的项，即是否存在正整数 n 使 $a_n = 420$? 实际上即判断方程 $n(n+1) = 420$ 有没有正整数解. 本题中可求出 $n = 20$，说明420是该数列中的第20项.

已知数列通项公式 $a_n = f(n)$，判定某个数 A 是否在数列中，即判断方程 $f(n) = A$ 是否有正整数解.

例2　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - \sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n + 1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$，求 a_{20}.

答案　$-\sqrt{3}$.

解析　求 a_{20} 最理想的方法是由条件求出通项公式 a_n，然后将 $n = 20$ 代入即可. 但本题中由已知关系式求通项是有困难的，因此只能另找它法. 最原始的方法就是从 a_1 开始一直求到 a_{20}. 但总觉得太繁，又没有其他方法. 事实上经过计算就会发现其中的奥妙：$a_1 = 0$, $a_2 =$

通过计算，使你发现规律，探究出其中的奥秘，这就是计算的乐趣！

$-\sqrt{3}$, $a_3=\sqrt{3}$, $a_4=0$，这时我们发现，这个数列呈现周期性变化，$a_n=a_{n+3}$，因此 $a_{20}=a_2=-\sqrt{3}$.

3. 数列通项公式的归纳

例 3 写出下列各数列的一个通项公式.

(1) $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{35}$, $\frac{3}{63}$, $\frac{4}{99}$, …；(2) 6, -66, 666, $-6\,666$, …；

(3) -1, $\frac{8}{5}$, $-\frac{15}{7}$, $\frac{24}{9}$, …；(4) 3, 5, 9, 17, 33, ….

答案 (1) $a_n=\frac{n}{(2n+1)(2n+3)}$；(2) $a_n=\frac{2}{3}(-1)^{n-1}\cdot(10^n-1)$；(3) $a_n=(-1)^n\frac{n(n+2)}{2n+1}$；(4) $a_n=2^n+1$.

解析 已知一个数列前几项，要求写出一个通项公式，关键在于对给定数字的分析，分析其与项数之间的关系，如(1)中四个分数，先看分子对应为 1, 2, 3, 4, …，正好与其项数相同，即可认定其通项的分子为 n，再分析分母，都是奇数，可从两个方面考虑，一方面，$15=3\times5$, $35=5\times7$, $63=7\times9$, $99=9\times11$. 因此第 n 项的分母应为$(2n+1)(2n+3)$；另一方面，$15=16-1=4^2-1$, $35=36-1=6^2-1$, $63=64-1=8^2-1$, $99=100-1=10^2-1$，因此这四项即为$(2\times2)^2-1$, $(2\times3)^2-1$, $(2\times4)^2-1$, $(2\times5)^2-1$，第 n 项分母为$[2(n+1)]^2-1$，即为$(2n+1)\cdot(2n+3)$，这样可以得出 $a_n=\frac{n}{(2n+1)(2n+3)}$.

这类问题，重在观察分析，不仅仅看每项的结果，还要观察其运算的过程，直觉很重要，同时解题规律的掌握也很重要.

因 $\underbrace{99\cdots9}_{n个}=10^n-1$ 因此像(2)这类问题都是转化为 10^n-1. 又如 $0.\underbrace{66\cdots6}_{n个}$ 也可用类似的方法解决.

(2)中因正、负相间，因此第 n 项应有 $(-1)^{n-1}$ 或$(-1)^{n+1}$ 的因式，而$\underbrace{66\cdots6}_{n个}=\frac{6}{9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}=\frac{6}{9}(10^n-1)=\frac{2}{3}(10^n-1)$，因此 $a_n=\frac{2}{3}(-1)^{n-1}(10^n-1)$.

(3)(4)可用同样的方法解决.

说明："归纳—猜想"这是数学中重要的方法，它是基于对几个具体数据的仔细研究，所作出的合理的猜想，当然只给出了一个数列的前几项，其通项公式不一定唯一，如数列 1, 0, 1, 0, …，则 $a_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^{n+1}]$, $a_n=\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|$, $a_n=\begin{cases}0, 当 n 为偶数\\1, 当 n 为奇数\end{cases}$ 等都是它的通项公式.

例 4 已知函数 $f(x)=\frac{2x}{x+2}$，若 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 写出数列$\{a_n\}$的前 5 项；

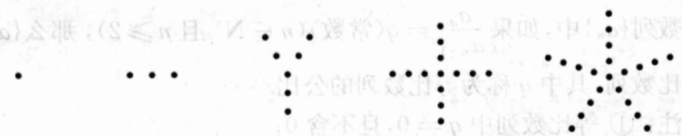
(2) 归纳通项 a_n 的表达式.

答案　(1) $a_1=1$，$a_2=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{1}{2}$，$a_4=\frac{2}{5}$，$a_5=\frac{1}{3}$；(2) $a_n=\frac{2}{n+1}$.

解析　本题的关键点有两处：一是 a_n 与 a_{n+1} 的递推关系的确定，由 $f(x)=\frac{2x}{x+2}$,得 $f(a_n)=\frac{2a_n}{a_n+2}$. 因此 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，通过这一关系可计算出 a_1 到 a_5 的值；二是由 $a_1=1$，$a_2=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{1}{2}$，$a_4=\frac{2}{5}$，$a_5=\frac{1}{3}$. 归纳 a_n，我们注意到 a_2，a_3，a_4 的分母，要具有规律，则 a_3 分母应为 4，这时 $a_3=\frac{2}{4}$，类似 $a_5=\frac{2}{6}$，$a_1=\frac{2}{2}$，这样规律被发现了，这些项分子均为 2，而分母比对应的项数大 1，因此 $a_n=\frac{2}{n+1}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$.

由于数列与函数的密切关系，因此在设置数列问题时常以函数为背景，同时在解决数列问题时也可利用函数性质加以研究.

例5　根据下列图形及相应点的个数的变化规律，猜测第 n 个图中有多少个点？



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

答案　n^2-n+1.

解析　由于我们考察的是点的个数的变化，因此首先将图形的变化转化为数字的变化，如设点的个数构成数列 $\{a_n\}$，则前五项为 1，3，7，13，21，然后再分析特征、寻找规律、作出猜想. 观察：这些数都是奇数，且没有规律，因此考虑将其分拆为 $0+1$，$2+1$，$6+1$，$12+1$，$20+1$，这时我们发现规律：$0\times1+1$，$1\times2+1$，$2\times3+1$，$3\times4+1$，$4\times5+1$，因此得出 $a_n=(n-1)n+1=n^2-n+1$.

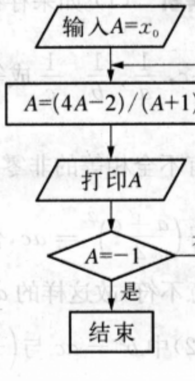
如何分析数据特征发现规律，这是解题的难点和关键点.

4. 数列的构造

例6　若根据右边的框图，可以产生数列 $\{a_n\}$.

(1) 当 $x_0=\frac{49}{65}$ 时，写出所产生数列的所有项；

(2) 若要产生一个无穷的常数列，求 x_0 的值.



答案　(1) $\frac{11}{19}$，$\frac{1}{5}$，-1；(2) $x_0=1$，

这类问题实际上是按照一定的程序，一定的规律在构造数列，解题的关键在于理解其工作原理，其本质是数列的递推关系.

$x_0 = 2$.

解析 解这类问题,首先要认识框图是如何构造数列的,即工作原理.其中最关键的一个递推关系是 $a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 2}{a_n + 1}$,经过这个递推关系,若得出某项为$-1$,则结束整个程序;若得出的结果不是$-1$,则再作为$a_n$代入求$a_{n+1}$.(1)中将$x_0 = \dfrac{49}{65}$代入关系式可求出$a_1 = \dfrac{11}{19} \neq -1$再代入求得$a_2 = \dfrac{1}{5}$, $a_3 = -1$,这时结束工作,从而得出该数列只有三项;(2)要产生一个无穷的常数列,既然是常数列,每项都相等,则$x_0 = \dfrac{4x_0 - 2}{x_0 + 1}$解得$x_0 = 1$, $x_0 = 2$.这时可分别得到两个无穷常数数列 1, 1, 1, …及 2, 2, 2, ….

5. 熟练掌握等差数列,等比数列的定义及相关概念

当$d = 0$时,该数列为常数数列.

当$q = 1$时,该数列为常数数列.

数列$\{a_n\}$中,如果$a_n - a_{n-1} = d$(常数)($n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geqslant 2$),那么$\{a_n\}$称为等差数列,其中d称为等差数列的公差.

数列$\{a_n\}$中,如果$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$(常数)($n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geqslant 2$),那么$\{a_n\}$称为等比数列,其中q称为等比数列的公比.

$A = \dfrac{a+b}{2}$, $G^2 = ab$.

注:① 等比数列中$q \neq 0$,且不含 0;

② 若a、A、b成等差,则称A为a与b的等差中项;

③ 若a、G、b成等比,则称G为a与b的等比中项.

例 7 (1) 是否存在不全相等的非零实数a、b、c,使a、b、c成等差数列且$\dfrac{1}{a}$、$\dfrac{1}{b}$、$\dfrac{1}{c}$也成等差数列?说明理由.

(2) 是否存在不全相等的非零实数a、b、c,使a、b、c成等比数列且$\dfrac{1}{a}$、$\dfrac{1}{b}$、$\dfrac{1}{c}$也成等比数列?说明理由.

注意"是否存在"型问题的解题思路及格式.

答案 (1) 不存在;(2) 存在.

解析 (1) 如果存在满足条件的a、b、c,则a、b、c成等差即$2b = a + c$, $\dfrac{1}{a}$、$\dfrac{1}{b}$、$\dfrac{1}{c}$成等差即$\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$,问题转化为$\begin{cases} 2b = a + c, \\ \dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} \end{cases}$是否有不全相等的非零的实数解.因为$\dfrac{2}{b} = \dfrac{a+c}{ac} = \dfrac{2b}{ac}$,所以$b^2 = ac$,从而得$\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2 = ac$,化简得$(a-c)^2 = 0$.故$a = c$.得出$a = b = c$.与题意不符,故这样的$a$、$b$、$c$不存在.

因a、b、c均不为零.

(2)中$b^2 = ac$与$\left(\dfrac{1}{b}\right)^2 = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{c}$等价,故只要$a$、$b$、$c$成等比,必

有$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$成等比.

例8 已知数列 $a_n=an^2+bn+c\ (a,b,c\in\mathbf{R})$,探求使$\{a_n\}$为等差数列的充要条件.

答案 $a=0$.

解析 这类问题通常是紧扣定义,考察 $a_{n+1}-a_n$ 是否为常数?何时为常数?

$a_{n+1}-a_n=a(n+1)^2+b(n+1)+c-an^2-bn-c=2an+a+b$,显然当且仅当 $a=0$ 时 $a_{n+1}-a_n=a+b=b$ 为常数.

证明、判断一个数列是等差数列,必须考虑 $a_{n+1}-a_n$ 是否为常数,因此定义是解题的根本所在.

例9 设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 称为数列$\{a_n\}$的前 n 项和.已知 $S_n=\frac{1}{2}n^2+n\ (n\in\mathbf{N}^*)$,求$\{a_n\}$的通项公式 a_n,并判断其是否为等差数列.

答案 $a_n=n+\frac{1}{2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$,为等差数列.

解析 当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=\frac{3}{2}$;当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}n^2+n-\frac{1}{2}(n-1)^2-(n-1)=n+\frac{1}{2}$,显然 $n=1$ 时也满足该式,因此 $a_n=n+\frac{1}{2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

根据等差数列的定义可以判断出$\{a_n\}$为等差数列.

a_n与S_n的关系:

$$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2\end{cases}$$

这是数列中的重要关系式.

例10 已知一元二次方程 $(b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0$ 有两个相等的实根,求证:a、b、c 成等差数列.

解析 本题可从两个角度思考:一是由条件可知判别式 $\Delta=0$,从而转换成 a、b、c 之间的关系式,即 $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0$ 化简得出 $(a+c-2b)^2=0$,即 $a+c=2b$.所以 $b=\frac{a+c}{2}$,b 为 a、c 的等差中项.

二是从方程的特征考虑,由观察可知方程系数之和为0,从而得 $x=1$ 为方程的根,则 $x_1=x_2=1$.由根与系数关系 $x_1\cdot x_2=1$,得 $\frac{a-b}{b-c}=1$.得 $b=\frac{a+c}{2}$.从而得证.

由此可以看出:① 证明三个数 a、b、c 成等差,转化为证明 $2b=a+c$ 不失为一种好方法;② 解数学问题要善于观察问题的特征,细心分析其特点,才能探索出巧妙而简捷的解法.

比较两种解法,哪种简捷?哪种更适合你?

例11 在数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中,已知 $a_1=2$,且 $a_{n+1}=\frac{2a_n-1}{a_n+4}$,$b_n=\frac{1}{a_n+1}$,求证:数列$\{2^{b_n}\}$成等比数列.

解析 欲证$\{2^{b_n}\}$成等比数列,只要证 $\frac{2^{b_{n+1}}}{2^{b_n}}=2^{b_{n+1}-b_n}=$ 常数,只要

请注意分析问题的方法.

证 $b_{n+1}-b_n$ 为常数，即$\{b_n\}$为等差数列. 对照等差数列的定义，须通过计算 $b_{n+1}-b_n$ 而获得，根据给出条件的特点，可以先化简 b_{n+1}，然后再作差.

注：

若$\{a_n\}$成等差，则$\{a^{a_n}\}$成等比($a>0$且$a\neq1$)；

若$\{a_n\}$成等比且$a_n>0$则$\{\log_a a_n\}$成等差($a>0$且$a\neq1$).

由 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n-1}{a_n+4}$，得 $a_{n+1}+1=\dfrac{2a_n-1}{a_n+4}+1=\dfrac{3(a_n+1)}{a_n+4}$.

所以 $b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{a_n+4}{3(a_n+1)}=\dfrac{1}{a_n+1}+\dfrac{1}{3}$.

所以 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{a_n+1}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{3}$. 即$\{b_n\}$成等差数列. 因此$\dfrac{2^{b_{n+1}}}{2^{b_n}}=2^{b_{n+1}-b_n}=2^{\frac{1}{3}}$为常数，从而得出$\{2^{b_n}\}$为等比数列.

例 12 已知数列$\{a_n\}$($n\in\mathbf{N}^*$)为等差数列，公差为 d.

(1) 数列 a_1，a_3，a_5，…，a_{2n-1}，… 是什么数列？数列 a_2，a_4，a_6，…，a_{2n}，… 是什么数列？数列 a_1，a_4，a_7，…，a_{3n-2}，… 又是什么数列？

(2) 由(1)的结果你能得出怎样的结论？

(3) 对等比数列请写出类似的结论.

答案 (1) 都是等差数列；(2) 略；(3) 略.

解析 因为$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，所以 $a_{2n+1}-a_{2n-1}=2d$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，因此$\{a_{2n-1}\}$成等差数列，同理数列 a_2，a_4，a_6，…，a_{2n}，… 是以 a_2 为首项，$2d$ 为公差的等差数列；数列 a_1，a_4，a_7，…，a_{3n-2}，… 是以 a_1 为首项，$3d$ 为公差的等差数列. 而问题(2)是要求对刚才(1)中的结果归纳出一个一般性的结论，注意到(1)中三个子数列的下标都是成等差数列，因此可以得出：若$\{a_n\}$为等差数列，其公差为 d，且数列 k_1，k_2，k_3，…，k_n，…($n\in\mathbf{N}^*$)是公差为正整数 m 的等差数列，则数列$\{a_{k_n}\}$是首项为 a_{k_1}，公差为 md 的等差数列.

(3)是将等差数列中的结论类比到等比数列中，注意到两种数列的差别在于“差”与“比”. 因此可以得出：

类比得到的命题一定是真命题吗？请思考.

若$\{a_n\}$为等比数列，其公比为 q，则数列 k_1，k_2，k_3，…，k_n，…($n\in\mathbf{N}^*$)是公差为正整数 m 的等差数列，则数列$\{a_{k_n}\}$是首项为 a_{k_1}，公比为 q^m 的等比数列.

说明：① 注意本题的解析过程及这类命题的形式，通过讨论等差数列中三个特殊子数列的性质，运用从特殊到一般的方法，归纳出等差数列中的一般性结论，又将等差数列中的结论类比到等比数列中得出新的命题；

② 等比数列与等差数列的类比规则有待我们进一步的研究.

例 13 (1) 已知无穷数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，那么数列$\{pa_n+qb_n\}$(p、q 是常数)是不是等差数列？为什么？

(2) 将上述命题类比到等比数列中，并判断其真假.

答案 (1) 是等差数列；(2) 略.

解析 (1) 对照等差数列的定义,设$\{a_n\}$公差为d_1, $\{b_n\}$公差为d_2,则$a_{n+1}-a_n=d_1$, $b_{n+1}-b_n=d_2$,这时$(pa_{n+1}+qb_{n+1})-(pa_n+qb_n)=p(a_{n+1}-a_n)+q(b_{n+1}-b_n)=pd_1+qd_2=$常数.

因此$\{pa_n+qb_n\}$为等差数列.

(2) 类比上述命题得:已知无穷数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$都是等比数列,那么$\{pa_n\cdot qb_n\}$(p, q是常数)是等比数列.

当$p\cdot q\neq 0$时,设$\{a_n\}$公比为q_1, $\{b_n\}$公比为q_2,则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q_1$, $\frac{b_{n+1}}{b_n}=q_2$. 这时$\frac{pa_{n+1}\cdot qb_{n+1}}{pa_n\cdot qb_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{b_{n+1}}{b_n}=q_1\cdot q_2\neq 0$(常数),所以$\{pa_n\cdot qb_n\}$为等比数列.

当$p\cdot q=0$时,显然$\{pa_n\cdot qb_n\}$不是等比数列.

请读者继续研究:两个无穷等差数列,经过和、差、积、商等运算后是否仍是等差数列?若是等比数列,结果又是如何?

6. 关于数列的最大项、最小项问题

给定一个数列的通项公式,如何求出该数列中的最大项或最小项?如果是等差数列或等比数列,则可以借助于等差、等比数列的性质加以解决;如果既不是等差数列又不是等比数列,则可以从函数的观点,利用函数的单调性解决.

例 14 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{9^n(n+1)}{10^n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 试问:数列$\{a_n\}$有没有最大项?如果有,求出这个最大项;如果没有,请说明理由.

答案 数列$\{a_n\}$最大项为$a_8=a_9=9\left(\frac{9}{10}\right)^8$.

解析 $a_n=\left(\frac{9}{10}\right)^n\cdot(n+1)$,由此可以看出:$\{a_n\}$为正数数列;随$n$的增大,$\left(\frac{9}{10}\right)^n$逐渐减小,而$(n+1)$逐渐增大. 在变化过程中$a_n$是如何变化的?则可以利用判断函数单调性的方法,研究$\{a_n\}$变化的情况.

设a_m为$\{a_n\}$中的最大项,则$\begin{cases}a_m\geqslant a_{m+1},\\ a_m\geqslant a_{m-1},\end{cases}$

即$\begin{cases}\left(\frac{9}{10}\right)^m(m+1)\geqslant\left(\frac{9}{10}\right)^{m+1}(m+2),\\ \left(\frac{9}{10}\right)^m(m+1)\geqslant\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}m.\end{cases}$ 解得$8\leqslant m\leqslant 9$.

因此$\{a_n\}$中$a_1<a_2<\cdots<a_7<a_8=a_9>a_{10}>\cdots$,所以$\{a_n\}$中最大项为$a_8=a_9=9\left(\frac{9}{10}\right)^8$.

注:

数列是一类特殊的函数,因此解决数列问题时常用函数思想、函数方法对问题加以研究.

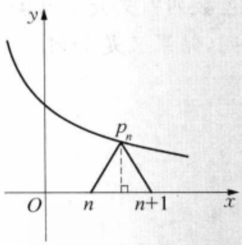
例 15 xOy平面上的点列$P_n(a_n, b_n)$均在函数$y=2\,002\left(\frac{a}{10}\right)^x$ $(0<a<10)$的图像上,且点P_n、点$(n, 0)$、点$(n+1, 0)$构成一个顶点为P_n的等腰三角形.

(1) 求点 P_n 的纵坐标 b_n 的表达式；

(2) 若对每一个正整数 n，b_n、b_{n+1}、b_{n+2} 为边长能构成一个三角形，求 a 的取值范围；

(3) 设 $B_n = b_1b_2\cdots b_n (n \in \mathbf{N}^*)$，若 a 取(2)中确定的范围中的最小整数，求数列 $\{B_n\}$ 的最大项的项数.

答案 (1) $b_n = 2\,002\left(\frac{a}{10}\right)^{n+\frac{1}{2}}$；(2) $5\sqrt{5}-5 < a < 10$；(3) B_{20} 最大.



P_n 的横坐标即为 $(n, 0)$，$(n+1, 0)$ 中点的横坐标.

解析 本题是以函数为背景，在直角坐标系中借助于函数图像构造了数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$，因此解决此类问题不能离开函数的图像性质. 本题所给函数 $y = 2\,002\left(\frac{a}{10}\right)^x (0 < a < 10)$ 的大致图像可在直角坐标系中画出，由于 P_n 是等腰三角形的顶点，因此可借助于等腰三角形的性质，得到 P_n 的横坐标为 $\frac{n+n+1}{2} = n+\frac{1}{2}$，因此 $P_n\left(n+\frac{1}{2}, b_n\right)$，其中 $b_n = 2\,002\left(\frac{a}{10}\right)^{n+\frac{1}{2}}$.

注意解不等式时的化简.

问题(2)的条件是 b_n，b_{n+1}，b_{n+2} 为边长能构成一个三角形，其充要条件是任何两边之和大于第三边，可列出三个不等式. 但注意到 $0 < a < 10$，故 $0 < \frac{a}{10} < 1$，因此 b_n 单调递减即 $b_n > b_{n+1} > b_{n+2}$. 当且仅当 $b_{n+1} + b_{n+2} > b_n$ 时，三边长即可构成三角形. 从而解出 $5\sqrt{5}-5 < a < 10$.

例 14 也是用此法求最值的.

本质是比较 b_n 与 1 的大小.

问题(3)中 $a = 7$，要求 $\{B_n\}$ 的最大项，同样利用函数性质，考虑 $\{B_n\}$ 的单调性，设 B_n 最大，则 $\begin{cases} B_n \geqslant B_{n-1}, \\ B_n \geqslant B_{n+1}. \end{cases}$ 解得 $n = 20$. 因此 B_{20} 最大.

【周末训练】

一、选择题

1. 若一个数列为 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$，$\sqrt{11}$，…，则 $2\sqrt{5}$ 是这个数列中的(　　).

(A) 第 6 项　(B) 第 7 项　(C) 第 8 项　(D) 第 9 项

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n - 3$，则 $a_{10} =$ (　　).

(A) -26　(B) 26　(C) -29　(D) 29

3. 下列命题中不正确的是(　　).

(A) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且公差为 0，则 $\{a_n\}$ 一定为等比数列

(B) 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且公比为 1，则 $\{a_n\}$ 一定为等差数列

(C) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且公差不为 0，则 $\{a_n\}$ 一定不是等比数列

(D) 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且公比不为 1，则 $\{a_n\}$ 一定不是等差数列

4. 若 $\sqrt{2}$，$\frac{x}{2}$，$2\sqrt{2}$ 成等比数列，那么 x 的值等于(　　).

(A) ± 2　　(B) ± 4　　(C) 2　　(D) 4

5. 由公差为 d 的等差数列 a_1，a_2，a_3，…重新组成的数列 a_1+a_4，a_2+a_5，a_3+a_6，… 是(　　).

(A) 公差为 d 的等差数列　　(B) 公差为 $2d$ 的等差数列

(C) 公差为 $3d$ 的等差数列　　(D) 不是等差数列

6. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1\right]$，则此数列的(　　).

(A) 最大项是 a_1，最小项是 a_3　　(B) 最大项是 a_1，最小项不存在

(C) 最大项不存在，最小项是 a_3　　(D) 最大项是 a_1，最小项是 a_3

7. 已知数列$\{a_n\}$的前四项分别为 1，0，1，0，给出下列各式：

(1) $a_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^{n+1}]$；(2) $a_n=\sin^2\frac{n\pi}{2}$；(3) $a_n=\frac{1}{2}[1+(-1)^{n+1}]+(n-1)\cdot(n-2)$；(4) $a_n=\begin{cases}0, 当 n 为偶数时,\\ 1, 当 n 为奇数时,\end{cases}$ 则可作为数列$\{a_n\}$通项公式的序号为(　　).

(A) (1)(2)　　(B) (1)(2)(3)　　(C) (1)(2)(4)　　(D) (2)(3)(4)

8. 设数列$\{a_n\}$通项为 $a_n=\sqrt{2}+\cos\frac{n\pi}{3}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 若 $k\in\mathbf{N}^*$，则(　　).

(A) $a_k=a_{k+3}$　　(B) $a_k=a_{k+4}$　　(C) $a_k=a_{k+5}$　　(D) $a_k=a_{k+6}$

9. 正整数数列$\{a_n\}$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 满足 $a_{n+1}>a_n$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. 若 $a_6=74$，则 a_2 的可能取值的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

二、填空题

10. 三个实数 a、b、c，则 $b^2=ac$ 是 a、b、c 成等比数列的________ 条件.

11. $2-\sqrt{3}$ 与 $2+\sqrt{3}$ 的等差中项为________，等比中项为________.

12. $\triangle ABC$ 中，如果三条边 a、b、c 成等差数列，则 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 成________数列.

13. 已知数列 6，9，14，21，30，…对于任意的正整数 n，a_{n+1}与 a_n之间满足关系式________.

14. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=5-4\times2^{-n}$，则其通项公式为________.

15. 在 3 与 9 之间插入两个正数，使得前三个数成等比数列，后三个数成等差数列，这两个正数的和是________.

16. 已知等差数列$\{a_n\}$共 10 项，奇数项之和为 15，偶数项之和为 25，则 $a_3=$________.

三、解答题

17. 根据下列数列的前几项的值，写出它们各自的一个通项公式.

(1) $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$-\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$，…；

(2) $-1+\frac{1}{2}$，$3-\frac{1}{4}$，$-5+\frac{1}{8}$，$7-\frac{1}{16}$，…；

(3) 0，$\frac{7}{4}$，$\frac{26}{9}$，$\frac{63}{16}$，….

18. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$，试问：0.98 是不是$\{a_n\}$中的某一项，说明理由.

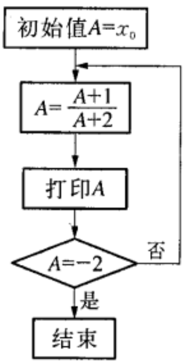
19. 在$\triangle ABC$中，已知三边 a、b、c 成等比数列，q 为公比，求 q 的取值范围.

20. 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{2n-9}{4n-26}$，求该数列中最大项和最小项.

21. 根据右边框图，计算机在执行过程中形成数列$\{a_n\}$.

(1) 求 a_{n+1}与 a_n的递推关系；

(2) 若要构造一个无穷常数数列$\{a_n\}$，则初始值 x_0 应是多少？



22. 称 $\dfrac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ 为 n 个实数 p_1，p_2，…，p_n 的“均倒数”，已知数列$\{a_n\}$的前 n 项的“均倒数”为$\dfrac{1}{2n+1}$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设函数 $f(x)=-x^2+4x-\dfrac{a_n}{2n+1}$，求使得对任意正整数 n 都有 $f(x)\leqslant 0$ 成立的 x 的取值范围.