经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修3-4）

对称与群

SHUXUE

北京师范大学出版社

责任编辑／邢自兴　颜其鹏
美术编辑／高　霞

SHUXUE 3-4

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3-4 对称与群

北京师范大学出版社

ISBN 7-303-08092-9

9 787303 080922 >

京发改[2006]823 号-039
全国价格举报电话：12358
ISBN 7-303-08092-9/G·6303
定价：4.75 元

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 （选修3-4）

对称与群

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　王汝楫

编写人员　（按姓氏笔画排序）

王汝楫　王尚志　张饴慈

顾　沛　彭　刚

北京师范大学出版社

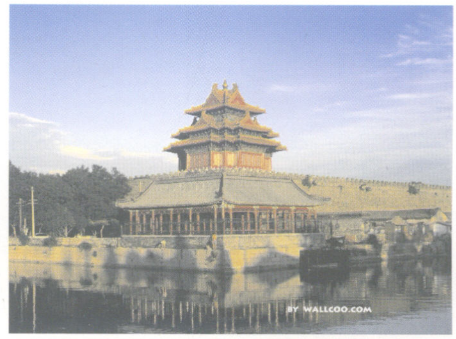
·北 京·

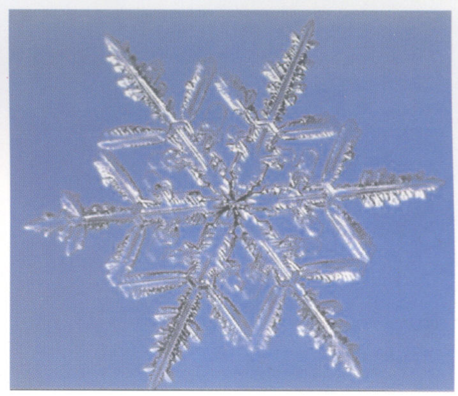
北京师范大学出版社出版发行
（北京新街口外大街19号　邮政编码：100875）
http://www.bnup.com.cn
出版人：赖德胜
北京京师印务有限公司印刷　全国新华书店经销
开本：210 mm × 297 mm　印张:5.25　插页：1　字数：110千字
2006年9月第1版　2006年10月第1次印刷
定价：4.75元

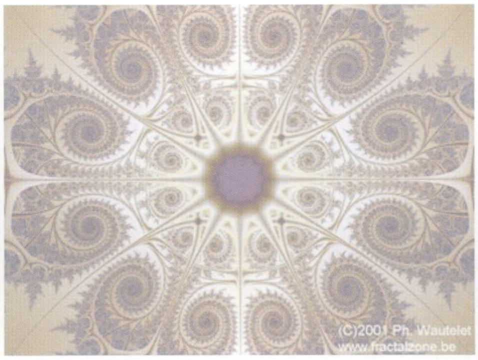
对称图形欣赏

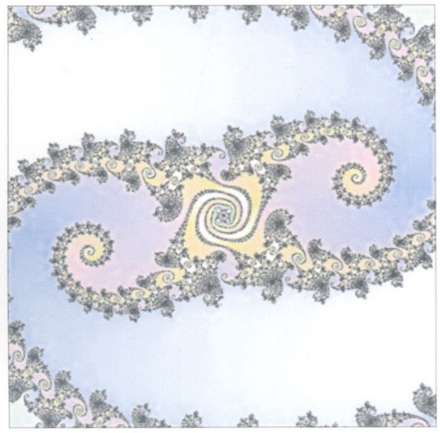
①②
③
⑤④
⑥

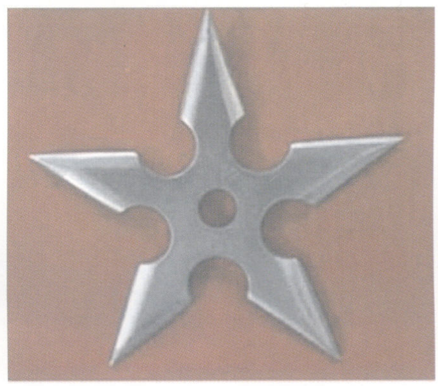
①京剧脸谱　④雪花
②故宫角楼　⑤蝴蝶
③枫叶　　　⑥战斗机

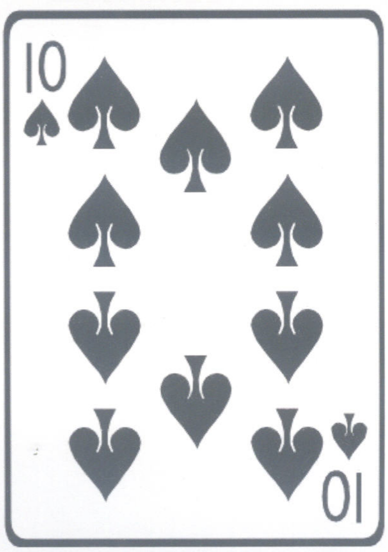












①对称艺术图　⑤扑克牌
②分形艺术图　⑥伊斯兰图饰
③风扇叶片　　⑦太极图
④五星镖

前　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功.

严士健 王尚志

目　录

引 言

在这个丰富多彩的世界里，存在着各种美丽的对称图形：晶莹的雪花、明亮的窗户、皎洁的圆月、精致的五角星等等. 从建筑物的外形到日常生活用品，从动植物的外貌到生物有机体的构造，从化合物的组成到分子晶体的排布，无不蕴涵着对称. 毫不夸张地说，自然界的对称可以从亚原子微粒的结构到整个宇宙结构的每一尺度上找到. 更让人惊奇的是，物理学家发现宇宙间普遍存在的许多守恒定律本质上都是一种对称，这使得人类用以理解世界、探索宇宙的思维深刻了几许. 可以说，对称这种现象既普遍又重要.

很自然地，我们会问：能否用数学工具来研究它呢？

德国著名数学家外尔（H. Weyl，1885—1955）给了我们肯定的回答："对称是一个广阔的主题，在艺术和自然两个方面都意义重大. 数学则是它的根本."

这个"根本"的数学概念就是"群".

本专题我们将从平面的对称性出发，利用"群"这个有力工具来研究、体会数学是怎样来刻画生活中的普遍现象——对称现象的.

在本专题的学习过程中，需要注意的是：我们头脑中以往的对称概念可能还处于一种静止的状态，还属于审美的、朴素的观念；而当我们用"群"这个数学工具来研究对称时，需要让我们的思维运动起来，让图形运动起来，这样我们才能真正让"对称"数量化、数学化，从而抓住"对称"的本质特征.

外尔（H. Weyl，1885—1955），德国著名数学家. 著有《黎曼曲面的思想》、《典型群》等重要著作.

第一章　平面图形的对称性

本章我们将学习四种基本的对称变换：反射变换、旋转变换、平移变换以及滑动反射变换，这些变换刻画了所有平面图形的对称性；我们还将认识到这些变换的统一特征，即它们都是等距变换；最后我们将讨论变换的运算以及运算过程中所满足的一般规律.

§1　平面图形的对称性

在初中，我们学过轴对称图形和中心对称图形，图 1-1 给出了一些这样的例子.

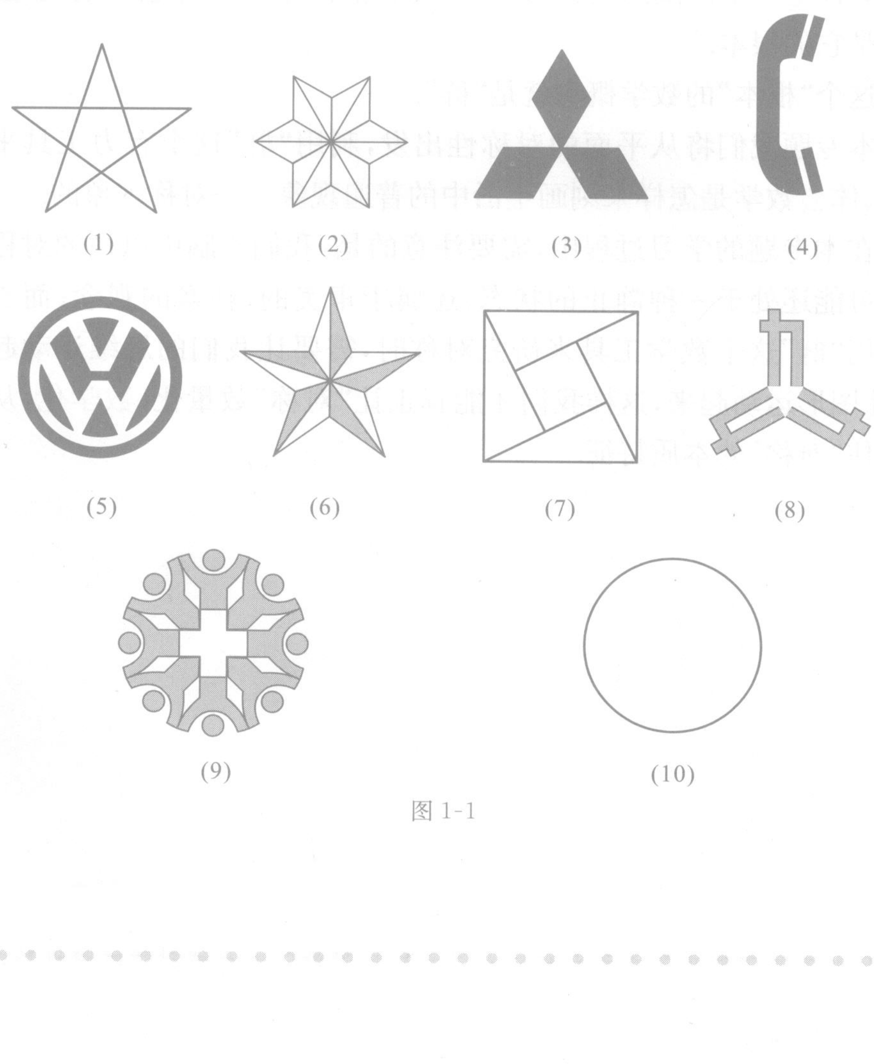


图 1-1

1.1　轴对称图形与反射变换

如果一个平面图形沿一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫作**轴对称图形**，这条直线叫作**对称轴**. 例如，等腰三角形是一个轴对称图形，底边上的高线(高所在直线)是对称轴，我们也说，等腰三角形关于底边上的高线是对称的.

抽象概括

轴对称图形可以看作是通过一个镜面反射得到的. 下面我们给出“反射变换”的定义，用它来描述轴对称图形.

在平面上，若直线 l 垂直平分线段 PP'，就称点 P 和点 P' 关于直线 l 是对称的，或者说，点 P 关于直线 l 的对称点是 P'.

平面的反射变换：将平面的每个点变成该点关于一条定直线的对称点，对平面的这种操作就确定了平面上点与点之间的一个对应关系，称为平面关于定直线的**反射变换**(见图 1-2).

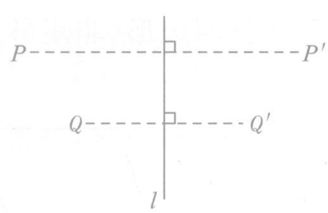


图 1-2

在图 1-3 中，点 A' 和点 B' 分别是点 A 和点 B 关于 y 轴的对称点. 显然，线段长 $|A'B'|=|AB|$，$\angle A'CB'=\angle AC'B$.

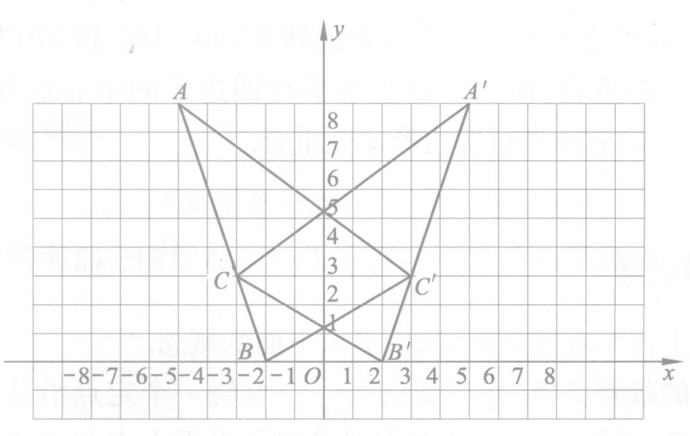


图 1-3

平面反射变换把直线变成直线，把平行直线变成平行直线，把线

段变成等长的线段，把角变成等角……

总之，平面反射变换保持图形的形状和大小不变.

在平面上，如果存在关于一条直线的反射变换，使一个图形经过该反射变换后能与自己重合，就称这个图形是**轴对称图形**，这条直线是它的**对称轴**，还称这个反射变换是该图形的一个“**反射对称性变换**”，也说该图形有一个“**反射对称**”.

1.2　中心对称图形与旋转变换

在平面内，一个图形绕定点旋转 180°，如果旋转前后的图形互相重合，那么这个图形叫作**中心对称图形**，这个点叫作它的**对称中心**.

例如，平行四边形是一个中心对称图形，对角线的交点是其对称中心，我们也说，平行四边形关于对角线的交点是对称的.

问题提出

图 1-4 中的正方形和平行四边形（非矩形）都是中心对称的，哪一个图形的对称性更好呢？

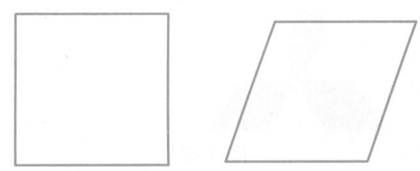


图 1-4

从直观感觉，你会说正方形比平行四边形有更高的对称性，这是因为，在平面里绕正方形中心分别旋转 0°，90°，180°和 270°[1]，旋转前后的正方形都重合，而在平面里绕平行四边形的中心点在旋转 0°，180°时，旋转前后的平行四边形才能重合.

[1] 因为平面绕一个定点旋转角度 φ 和旋转角度 $360°+\varphi$ 的效果是一样的，故把它们当作相同的旋转. 特别地，我们把平面绕一个定点旋转 0° 也叫作一个旋转. 此外，如无特别声明，通常把“逆时针旋转 φ”简单地说成“旋转 φ”.

抽象概括

按照上面的直观认识，我们引入下面的概念.

平面的旋转变换：将平面的每一个点绕一个定点沿某个方向旋转一个定角，对平面的这种操作就确定了平面上点与点之间的一个对应关系，称为平面关于定点的**旋转变换**，这个定点称为**旋转中心**（如图 1-5 所示）.

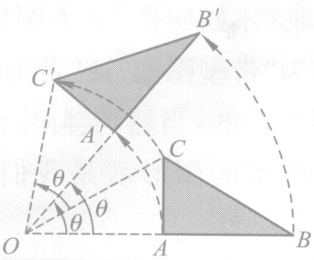


图 1-5

显然，与平面的反射变换一样，平面旋转变换保持图形的形状和大小不变.

在平面上，如果存在关于某定点的旋转变换，使得一个图形经过该旋转变换能与自己重合，就称这个图形是**旋转对称图形**，这个定点是该图形的旋转对称**中心**，若这个旋转变换旋转的角是 θ，还称它是该图形的一个“**角为 $\boldsymbol{\theta}$ 的旋转对称性变换**”，也说该图形有一个“**角为 $\boldsymbol{\theta}$ 的旋转对称**”.

例如，图 1-1 的(1)有角为 $0°$，$72°$，$2\times72°$，$3\times72°$ 和 $4\times72°$ 的旋转对称，图 1-4 中的正方形有角为 $0°$，$90°$，$180°$ 和 $270°$ 的旋转对称，而平行四边形只有角为 $0°$ 和 $180°$ 的旋转对称.

练　习

指出图 1-1 中哪些图形是轴对称图形，哪些是中心对称图形. 它们可以通过哪些反射变换或旋转变换来实现？

1.3　平移变换

实例分析

观察 $y=|\sin x|$ 的图像(如图 1-6 所示)，我们看到，它可以由 $0\sim\pi$ 之间的那部分图形沿 x 轴无限多次重复排列得到.

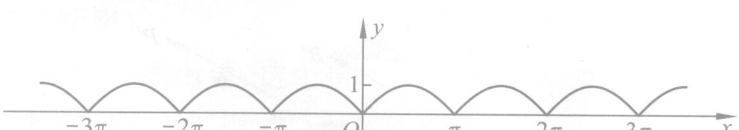


图 1-6

这种由一个有限图形(不妨叫作“基本图形”)沿一条直线无限多次重复所产生的图案称为“带型图案”或“带饰”.

带饰是向两边无限延长的,当然,实际生活中所见的仅仅是带饰的有限部分. 图 1-7 中所示的图形就是我们生活中常见到的一些带饰.

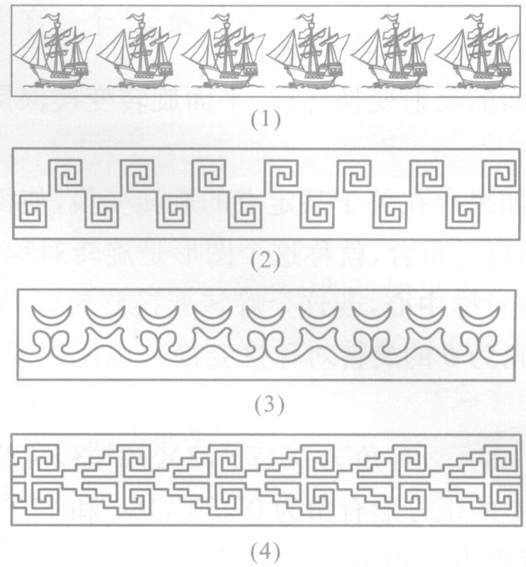


图 1-7

我们来观察图 1-7(1). 设一艘船是一个单位长,那么,在平面内沿水平直线平移任意整数个单位,平移后的图形都与原图形重合. 在初中,我们学过平移,它是将一个平面图形沿某个定方向移动一个定距离的图形运动,实际上可以看成是整个平面在运动,图形随之运动. 按照前面对于反射对称和旋转对称的直观认识,我们有理由说,图 1-7(1)有不同于旋转和反射的另外一种对称性,即所谓平移对称性.

抽象概括

平面的平移变换:将平面的每一个点都沿某个定方向移动一个定距离,对平面的这种操作就确定了平面上点与点之间的一个对应关系,称为平面的一个**平移变换**(见图 1-8).

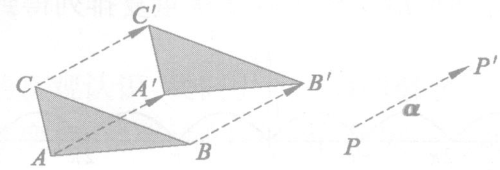


图 1-8

对于一个平移变换,任意点 P 到它平移后的对应点 P' 的向量都

是相等的. 因此，这个平移变换就说成“按向量 $\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{PP'}$ 的平移”.

平面平移变换保持图形的形状和大小不变.

在平面上，如果存在平移变换，使得一个图形通过该平移变换后能与自己重合，就称这个图形是**平移对称图形**，还称这个平移变换是该图形的一个“**平移对称性变换**”，也说该图形有一个“**平移对称**”.

1.4 滑动反射变换

实例分析

图 1-9 是沿着一条直线行走的脚印，设想它是向两个方向无限延伸的，那么，它就是一个带饰，我们来观察它的对称性. 为了叙述方便，我们考虑图 1-10 所给带饰的对称性.

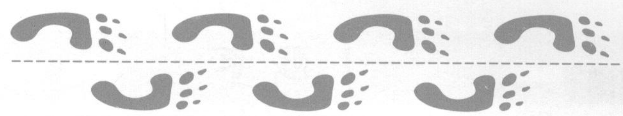


图 1-9

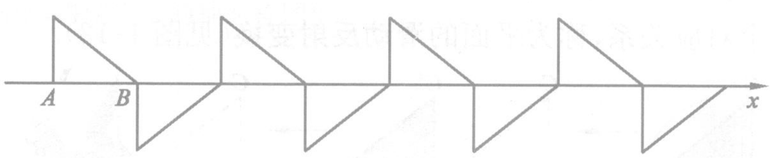


图 1-10

显然，它有无数个平移对称性变换，如果把 AB 的长度作为一个单位，那么沿 x 轴平移 $2k$ 个单位（$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）都是一个平移对称. 这个带饰没有反射对称.

当平面沿 x 轴平移 1 个单位，接着再对 x 轴作反射，经这两步操作后，带饰又与自己重合. 这个操作叫滑动反射操作，它是接连做两步完成的，其过程如图 1-11 所示（为了清楚追踪操作过程，其中一个三角形涂了阴影）.

显然，我们有理由说，这个带饰还有不同于旋转、反射和平移的另外的对称性，即所谓“滑动反射对称”.