新世纪理工系列教材

变分原理及其应用

梁立孚　著

哈尔滨工程大学出版社

前　言

各种自然现象和过程(特别是力学现象)通常由一组数理方程(偏微分方程、积分 - 微分方程或积分方程)及初边值条件来描述,但人们通过长期的探索研究,发现这些现象和过程常常使系统的某一整体量(泛函)取驻值或极值,因而又可以用相应的变分原理来描述。后一描述法的突出优点是:①数学形式简单紧凑,但内涵却甚丰富(包含了全部数理方程及初边值条件组);②是整体性描述,包括各种物理间断面上的相容条件;③有“变域变分”、“自然边界条件”等特殊工具,能够自动捕获各种未知边(分)界面;④是各种变分直接解法和有限元法的理论基础。可见,变分原理既体现了数学形式上的简洁优美,又体现了物理内容上的丰富深刻,更具有工程应用上的价值,确实代表了数学与物理的交融与贯通以及理论与实用的结合与统一。特别是自上世纪 60 年代起,有限元法的兴起与蓬勃发展,使作为其主要理论基础的变分原理又重新焕发了青春,取得了长足的发展。

梁立孚教授潜心从事力学及电磁学变分原理的研究 20 余年,卓有成效,现将其研究心得写成本书,笔者有幸得以先睹为快。本书对一般力学、线性弹性静力学与动力学、线性电磁场理论及压电材料力学的变分原理及其应用(包括有限元法及各种变分直接方法,离散分析等)作了相当系统和深入的研究,系统总结了作者本人长期从事这方面研究的创新成果。就笔者体会,主要体现下列几个方面:

1.首创变积法,通过定义一个“变积”作为传统“变分”的逆运算,首创了变积法,是求解变分学反命题的一个适用性较广的新方法,是贯穿全书的理论基干;

2.广泛地、详细地同时应用变积法和乘子法推导了上述力学等问题的各种变分原理及广义变分原理。使读者可以从二法的对比中全面、深入地体会它们的实质、异同和优缺点;

3.灵巧地应用乘子法,成功地消除了变分临界状态(乘子恒为零);

4. 把变积同拉氏变换结合起来,成功地导得了更简单(只含单重卷积)的 Gurtin 型初值问题变分原理,可以简化其数值求解;

5.详细论述了变分原理各类条件的完备性及其应用。

本书既是一部力学变分原理方面的创新性专著,同时又因推导过程及文字解说详尽,因此不但值得向有关科研人员推荐,而且也很适合作大学有关专业的教师、研究生及本科高年级学生的教材或参考书。

刘高联

目　　录

绪　　论

变分原理作为有限元素法和其它近似计算方法的理论基础，随着电子计算机的广泛应用，越来越得到学术界的重视。国内外有一些名著出版[1-5]，本书的内容不应当是它们的重复，而应当是它们的继续和发展。按照这样的写作原则，本书包括以下几方面的内容。

一般力学是基础力学，有些学者认为一般力学是一些发明和创造的策源地，而专著[6]则认为经典分析力学体系是力学最根本的体系。这些论述，都说明了一般力学的重要性，因此，本书的第1章研究一般力学中的经典变分原理和广义变分原理。一般力学是基础力学，这一章也是本书的基础。在这一章中，介绍了推导经典变分原理驻值条件的局部代入法和全部代入法，介绍了 Lagrange 乘子法的两种程式——Lagrange 乘子参加变分程式和 Lagrange 乘子不参加变分程式。全部代入法有两个作用：其一是消除约束条件，即将全量形式的约束条件代入泛函中，泛函外不再存在约束条件；其二是放松约束条件对变分的限制，使原来不独立的变分变换为独立的变分。而局部代入法的作用，仅能放松约束条件对变分的限制作用。在泛函的全量式中引入 Lagrange 乘子，并且 Lagrange 乘子参加变分的程式，不仅可以放松约束条件对变分的限制作用，而且可以消除约束条件，即将泛函的约束条件转化为泛函的自然条件。无论在全量式中引入 Lagrange 乘子，还是在变分式中引入 Lagrange 乘子，只要 Lagrange 乘子不参加变分，它们的作用都是只能放松约束条件对变分的限制，或者说，使原来不独立的变分变换为独立的变分。在这一章中，还介绍了一般力学中的广义变分原理和推导广义变分原理的两种方法 —— 变积方法和 Lagrange 乘子法。这里指出，一般力学中的广义变分原理是近年来我国学者率先建立的，本书仅涉及完整系统的变分原理和广义变分原理[7]。

我国学者十分重视变形体力学中广义变分原理的研究。文献[8]研究余能理论，从理论上和应用上为研究广义变分原理奠定了基础。文献[9]建立了弹性力学和塑性力学的广义变分原理，为后来发展起来的混合有限元素法提供了理论依据，并获得重要的应用。文献[10,11]倡导 Lagrange 乘子法，为建立各个学科领域的广义变分原理提供了一个有效方法。本书的第2章研究弹性静力学中的经典变分原理和广义变分原理。研究表明，推导经典变分原理的驻值条件难，推导广义变分原理的泛函难。本章抓住这两个难点进行深入研究。在本章 2.2 节中，应用局部代入法和 Lagrange 乘子不参加变分方法推导出最小势能原理的各种表达形式的驻值条件。最小余能原理的内容相当丰富，仅仅针对最小余能原理的驻值条件的问题，便有多篇文献各自从不同的角度进行了研究。本章 2.4 节，应用局部代入法和 Lagrange 乘子不参加变分方法顺利地推导出最小余能原理的驻值条件，证明了这些方法的正确性和有效性。本章后半部分，应用变积方法和 Lagrange 乘子法推导出两类变量和三类变量的广义变分原理。通过灵活应用

Lagrange乘子法，推导了有先决条件的广义变分原理，按照“检验变分原理的最好方法是推导其驻值条件”的原则，检验了各类变分原理的异同，进而对变分原理进行了分类。

本书在第1章中研究了一般力学的经典变分原理和广义变分原理，在第2章中研究了弹性静力学的经典变分原理和广义变分原理。有了以上的基础，研究弹性动力学的经典变分原理和广义变分原理就很方便了，只要将一般力学的经典变分原理和广义变分原理的泛函写成适合研究弹性动力学的形式，再将弹性静力学的经典变分原理和广义变分原理的泛函代入相应的一般力学的经典变分原理和广义变分原理的泛函的外力势能一项中，便可建立相应的弹性动力学的经典变分原理和广义变分原理的泛函。本书第3章前半部分就是应用这种方法建立了弹性动力学边值问题的经典变分原理和广义变分原理的泛函。文献[12]研究了流体动力学的广义变分原理，对研究弹性动力学的广义变分原理有重要的参考价值。本书第3章后半部分研究弹性动力学初值问题的变分原理和广义变分原理。建立弹性力学的初值问题的经典变分原理和广义变分原理的工作是由Gurtin首先完成的，针对弹性动力学的初值问题，Gurtin建立了一组卷积型变分原理(包括经典变分原理和广义变分原理)[13]。我国学者为完善和发展卷积型变分原理做出了突出贡献[14]。本书应用变积方法建立卷积型变分原理，具体作法是：首先将弹性动力学的基本方程进行Laplace变换，按照广义力和广义位移之间的对应关系，将经过Laplace变换的基本方程乘上相应的虚量，代数相加，然后积分，进而建立像空间的各类经典变分原理和广义变分原理，然后将之反演到原空间，得到各类卷积型经典变分原理和广义变分原理。

在电磁场理论中，由于在处理双本构关系、电磁耦合和边界条件方面的困难，使得建立这一领域的变分原理相当困难。如何克服上述几个方面的困难，建立电磁场理论的变分原理和广义变分原理便是本书第4章的任务。第4章的内容分为三个部分：第一部分，应用变积方法和Lagrange乘子法，建立了电磁场理论边值问题的变分原理和广义变分原理，并且进行验证。作为特例，得到了静电场和稳定磁场中的变分原理和广义变分原理。这里需要说明一个问题，建立广义变分原理主要有两种方法，一个是凑合法(变积方法便是一种凑合法)，一个是Lagrange乘子法，本书作者认为这两种方法是相辅相成的，所以，尽管仅用变积方法便可以建立电磁场理论边值问题的变分原理和广义变分原理，这里还是应用了两种方法。第二部分，应用变积方法建立电磁场理论初值问题的变分原理和广义变分原理，即建立电磁场理论的卷积型的变分原理和广义变分原理。推导电磁场理论的卷积型的变分原理和广义变分原理的方法，大体上和推导弹性动力学的卷积型变分原理和广义变分原理的方法相同，此不赘述。第三部分是建立压电材料力学的经典变分原理和广义变分原理，包括压电材料动力学边值问题的变分原理、压电材料动力学初值问题的变分原理和线性弹性压电材料准静态场的变分原理。这里仅仅应用了变积方法，表明这种方法的正确性和有效性。可以看出，压电材料力学可以视为力学和电磁学的交叉学科，它被称赞为新世纪中力学的新的生长点，因此，研究压电材料力学的变分原理和广义变分原理应当作为本书的主要内容[15]。

本书第 5 章是变分原理在有限元素法中的应用。有些学者认为，有限元法的基本概念是数学家 Courant 首先提出的，当时力学界忽视了 Courant 开创性的工作。本书作者认为，从 Ritz 方法过渡到有限元法的思想是可取的。Ritz 方法是变分直接方法。人们在研究 Ritz 变分直接方法时发现，在问题的整个选值域上选择坐标函数，由于区域大，选择一个合适的坐标函数有时相当困难，于是人们产生一个想法：是否可以将选择域划小，从而使选择坐标函数变得容易些呢？于是有限元素法便应运而生了。我国学者注意到，研究有限元法既要注意研究计算技巧，又要注意研究基本原理[16,17,18]。本书把如何应用变分原理来建立有限元素法的计算模型放在重要地位。应用最小势能原理和修正的势能原理建立了位移协调元和位移杂交元；应用最小余能原理和修正的余能原理建立了应力协调元和应力杂交元；应用 Hellinger – Reissner 势能原理和修正的 Hellinger – Reissner 势能原理建立了位移协调的混合元和位移杂交的混合元；应用 Hellinger – Reissner 余能原理和修正的 Hellinger – Reissner 余能原理建立了应力协调的混合元和应力杂交的混合元；应用胡海昌 – 鹫津久一郎势能原理和修正的胡海昌 – 鹫津久一郎势能原理建立了位移协调的三场混合元和位移杂交的三场混合元；应用胡海昌 – 鹫津久一郎余能原理和修正的胡海昌 – 鹫津久一郎余能原理建立了应力协调的三场混合元和应力杂交的三场混合元。在这部分内容中，还引用了国内和国外的一些知名学者应用变分原理和广义变分原理建立的几种有限元算法，例如广义协调元、拟协调元和理性有限元等。这一章的内容较好地体现了本书博采众长的写作原则。

第 6 章研究离散分析的有关问题。离散分析覆盖了数值分析的一个宽广的领域，它的作用是将具有无限多个计算自由度的问题处理为只具有有限多个计算自由度的问题。在离散分析中，能够将对连续体建立的微分方程或积分方程转化为有限数目的代数方程。按照如上的论述，我们可以将上一章研究的基于 Ritz 方法的有限元素法纳入离散分析的范畴。这一章我们将研究另外一些离散分析的方法，并且将这些离散分析方法都归结为加权残数法[19,20]。我们把加权残数法也纳入本书第 6 章中来研究，表明我们除了要研究加权残数法外，还要研究加权残数法和变分原理的关系。本章综述了加权残数法的几种基本方法：配点法、子域配置法、Galerkin 法和最小二乘法。研究了 Ritz 方法与 Galerkin 法的关系。还研究了罚函数法。为了研究加权残数法与变分原理的关系，论述了变分原理各类条件的完备性。最后，讨论了离散分析的收敛性问题[21]。

在本书的附录中，研究了以下几方面的问题：(1) 论述了在变分学中基本上存在三级变量— 自变量、可变函数和泛函。简单函数和泛函的区别在于：简单函数是自变量的函数，而泛函是可变函数的函数，独立自主地变化的可变函数称为自变函数。明确指出几类变量指的是一个变分问题中的可变函数的种类，扼要说明了几类变量的(经典) 变分原理和几类变量的广义变分原理的区别。(2) 本书借助函数的驻(极) 值问题来研究 Lagrange 乘子法的一般原理。论述了将 Lagrange 乘子法的一般原理应用于变分学中时，一般说来，有两种程式：一种是 Lagrange 乘子参加变分的程式，一种是 Lagrange 乘子不参加变分的程式。(3) 本书从变分的基本运算出发，

探讨变分学中的逆问题,提出变分的逆运算变积的概念。作为应用的实例,应用变积方法,将三类典型微分方程的边值问题和初值问题转化为泛函的驻(极)值问题,为全书中应用变积方法建立各类变分原理和广义变分原理奠定了基础。(4) 从 Hölder 原理出发来研究非等时变分。证明了所谓非等时变分实际上是变分和微分的组合。定量地研究了可变函数接近度的概念。总之,附录的内容分为两个方面,一方面深入研究了变积方法和 Lagrange 乘子法的理论基础,一方面从变分学的角度研究了本书涉及的一些基本概念。

最后,对本书的参考文献做一简要的说明。

本书所列参考文献大体上有以下几种类型:(1) 本书作者研究这一领域的有关论文,考虑到在书中已经较充分地反映了作者的研究成果,因此,仅列出一篇中文论文和十篇英文论文;(2) 本书参考的国内学者研究这一领域的有关论文和专著,由于本书作者阅读范围有限,没能较全面的反映这方面的情况;(3) 本书参考的国外学者的有关论文和专著,这方面的情况反映的也不够全面;(4) 反映这一领域研究情况的有关学术著作,包括论文和专著,这一方面的情况反映的更不够全面,书末仅列出作者搜集到的有关文献的一部分。

第1章　一般力学的变分原理和广义变分原理

一般力学是基础力学，有些学者认为一般力学是一些发明和创造的策源地，有些学者认为经典分析力学体系是力学最根本的体系，说明一般力学的重要性，因此，本书的第1章研究一般力学中的经典变分原理和广义变分原理。在这一章中，介绍了推导经典变分原理驻值条件的局部代入法和全部代入法，介绍了 Lagrange 乘子法的两种程式——Lagrange 乘子参加变分程式和 Lagrange 乘子不参加变分程式。由于变形体力学中的广义变分原理在有限元素法和其他近似方法中获得巨大成功，随着数字电子计算机的广泛应用，广义变分原理的研究越来越受到学术界的重视。国际和国内学者努力将广义变分原理的研究推广到一般力学中去，但是，由于这一研究课题的难度很大，长期以来进展比较缓慢。近年来，文献[127]翻译介绍了国外学者研究一般力学中的变分原理的情况，将我国学者对一般力学中的变分原理的研究引导到世界性研究的前沿。文献[192]引入广义 D'Alembert-Lagrange 原理，进而建立了完整系统和非完整系统的第二类变分原理，并且将之写成正则形式。文献[88]应用对合变换推导出两类变量的 Hamilton 原理，进而应用 Lagrange 乘子法推导出完整系统和非完整系统的两类变量的广义变分原理。文献[7]应用对合变换，将两类变量的广义变分原理的驻值条件变换为三类变量的基本方程，按照广义力和广义位移之间的对应关系，将各基本方程乘上相应的虚量，代数相加，然后积分，进而建立了完整系统的三类变量的广义变分原理和非完整系统的三类变量的广义变分原理(这种方法称为变积方法)。可见，一般力学中的广义变分原理是我国学者率先建立的。关于变积方法的梗概，请参阅本书附录中"F.3"一节。

1.1　一般力学的经典变分原理

一般力学的经典变分原理主要是指 Hamilton 原理。研究表明，推导广义变分原理的泛函难，推导经典变分原理的驻值条件难。本章的第一节，以推导完整约束系统的 Hamilton 原理的驻值条件为例，介绍推导经典变分原理的驻值条件的一般方法。

设有一个动力学系统，该系统由 Lagrange 函数和完整的约束方程

$$F_\beta(q_s,t)=0 \quad s=1,2,\cdots,n;\beta=1,2,\cdots,g;n>g \tag{1-1-1}$$

来描述。这里 q_s 为广义坐标，$\dot{q}_s$ 为广义坐标对时间 t 的导数。

按照变分学，人们总是希望将有约束条件的变分问题转化为无约束条件的变分问题来处理，一般来说，实现这种转化的方法有两种：一是代入法，一是 Lagrange 乘子法。

1.1.1 局部代入法和全部代入法

自从 Lagrange 的不朽著作《Mecanique analytique》问世以来，分析动力学的先驱者们，总是这样应用代入法：

Hamilton 原理的泛函为

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t)\mathrm{d}t \tag{1-1-2a}$$

其约束条件为

$$F_\beta(q_s, t) = 0 \tag{1-1-2b}$$

由约束条件式(1－1－2b)解得不独立的广义坐标

$$q_{\varepsilon+\beta} = \Phi_\beta(q_\sigma, t) \quad \sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon = n - g \tag{1-1-3}$$

将式(1－1－3)代入式(1－1－2a)，可得

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)\mathrm{d}t \tag{1-1-4}$$

将式(1－1－4)变分，并令 $\delta\pi = 0$；经分部积分，并按惯例在时域边界 $t = t_0$ 和 $t = t_1$ 处取 $\delta q_s = 0$，可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \delta q_\sigma \mathrm{d}t = 0 \tag{1-1-5}$$

由于 δq_σ 的任意性，由上式可得

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0 \tag{1-1-6}$$

这便是著名的 Lagrange 方程。

以下我们对代入法做进一步的分析和研究。

1.全部代入法

将 Hamilton 原理的泛函展开写为

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \cdots, q_\varepsilon, q_{\varepsilon+1}, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_\varepsilon, \dot{q}_{\varepsilon+1}, \cdots, \dot{q}_n, t)\mathrm{d}t \tag{1-1-7}$$

其约束条件为

$$F_\beta(q_s, t) = 0 \quad 或者 \quad q_{\varepsilon+\beta} = \Phi_\beta(q_\sigma, t) \tag{1-1-8}$$

将 π 变分，并令 $\delta\pi = 0$，可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma \right) + \sum_{\beta=1}^{g} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\delta q_{\varepsilon+\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta} \right) \right] \mathrm{d}t = 0 \tag{1-1-9}$$

考虑到约束条件的变分式为

$$\delta q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma \tag{1-1-10}$$

$$\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma \tag{1-1-11}$$

将式(1-1-8)代入式(1-1-9)的$\dfrac{\partial L}{\partial q_\sigma}$、$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}$、$\dfrac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}$和$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$中，并将之记为$\dfrac{\partial \bar{L}}{\partial q_\sigma}$、$\dfrac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}$、$\dfrac{\partial \bar{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}$和$\dfrac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}$。将式(1-1-10)和式(1-1-11)代入式(1-1-9)的$\delta q_{\varepsilon+\beta}$和$\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta}$中，经分部积分，并按惯例在时域边界处取$\delta q_s = 0$，可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\right]\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{1-1-12}$$

由于δq_σ的任意性，由上式可得

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right) = 0 \tag{1-1-13}$$

式(1-1-13)的ε个微分方程构成封闭的微分方程组。

这种方法和分析力学的先驱者们的方法是一致的，我们称之为全部代入法。

2. 局部代入法

如果我们仅将式(1-1-10)和式(1-1-11)代入式(1-1-9)，经分部积分，并按惯例在时域边界处取$\delta q_s = 0$，可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\right]\delta q_\sigma\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{1-1-14}$$

由于δq_σ的任意性，由(1-1-14)可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right) = 0 \tag{1-1-15}$$

式(1-1-15)与约束条件式(1-1-8)一起，构成封闭的微分方程组。

这种方法仅将约束条件的变分式代入 Hamilton 原理的泛函中，而约束条件的全量式仍然保留在泛函之外，我们称之为局部代入法。

由上面的分析可见，全部代入法有两个作用：其一是消除约束条件，即将全量形式的约束条件代入泛函中，泛函外不再存在约束条件；其二是放松约束条件对变分的限制，使原来不独立的变分变换为独立的变分。而局部代入法的作用，仅能放松约束条件对变分的限制作用。

1.1.2 Lagrange 乘子法的两种程式

Hamilton 原理的泛函为

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t)\mathrm{d}t \tag{1-1-16a}$$

其约束条件为

$$F_\beta(q_s, t) = 0 \tag{1-1-16b}$$

或者

$$q_{\varepsilon+\beta} = \Phi_\beta(q_\sigma, t) \tag{1-1-16c}$$

以下用 Lagrange 乘子法的两种程式来处理问题。

1. Lagrange 乘子不参加变分

① 在泛函的全量式中引入 Lagrange 乘子

引入 Lagrange 乘子 λ_β,将约束条件(1-1-16b)纳入泛函(1-1-16a)中

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} \left[L(q_s, \dot{q}_s, t) + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta F_\beta(q_s, t) \right] \mathrm{d}t \tag{1-1-17}$$

将 π 变分,并令 $\delta\pi = 0$,Lagrange 乘子不参加变分,可得

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s \right) + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s \right] \mathrm{d}t = 0 \tag{1-1-18}$$

经分部积分,并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s = 0$,则式(1-1-18)可变换为

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} \right) \delta q_s \right] \mathrm{d}t = 0 \tag{1-1-19}$$

由于引入 Lagrange 乘子,使得 δq_s 相互独立,故由式(1-1-19)可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} = 0 \tag{1-1-20}$$

式(1-1-20)与约束方程(1-1-16b)一起构成封闭的微分方程组。

如果将式(1-1-16c)乘上 Lagrange 乘子 λ_β,纳入泛函中,则有

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(q_s, \dot{q}_s, t) + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta [q_{\varepsilon+\beta} - \Phi_\beta(q_\sigma, t)] \right\} \mathrm{d}t \tag{1-1-21}$$

将 π 变分,并令 $\delta\pi = 0$,则有

$$\begin{aligned} \delta\pi = \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[& \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta \dot{q}_\sigma - \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma \right) + \\ & \sum_{\beta=1}^{g} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\delta q_{\varepsilon+\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta \dot{q}_{\varepsilon+\beta} + \lambda_\beta \delta q_{\varepsilon+\beta} \right) \Bigg] \mathrm{d}t = 0 \end{aligned} \tag{1-1-22}$$

经分部积分,并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s=0$,则有

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma+\right.$$

$$\left.\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}+\lambda_\beta\right)\delta q_{\varepsilon+\beta}\right]\mathrm{d}t=0 \qquad (1-1-23)$$

由于引入 Lagrange 乘子,使得 δq_σ 和 $\delta q_{\varepsilon+\beta}$ 相互独立,故由式(1－1－23)可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}-\displaystyle\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial q_\sigma}=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}+\lambda_\beta=0\end{cases} \qquad (1-1-24)$$

式(1－1－24)与约束方程(1－1－16c)一起构成封闭的微分方程组。

② 在泛函的变分式中引入 Lagrange 乘子

将 π 变分,并令 $\delta\pi=0$,式(1－1－16a)变换为

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)\mathrm{d}t=0 \qquad (1-1-25\mathrm{a})$$

其约束条件式(1－1－16b)和式(1－1－16c)变换为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s=0 \qquad (1-1-25\mathrm{b})$$

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma=0 \qquad (1-1-25\mathrm{c})$$

引入 Lagrange 乘子 λ_β,将式(1－1－25b)纳入泛函变分式(1－1－25a)中,可得

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s\right]\mathrm{d}t=0 \qquad (1-1-26)$$

经分部积分,并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s=0$,则有

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\right)\delta q_s\right]\mathrm{d}t=0 \qquad (1-1-27)$$

由于引入 Lagrange 乘子,使得 δq_s 相互独立,故由式(1－1－27)可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}=0 \qquad (1-1-28)$$

式(1－1－28)与约束方程(1－1－16b)一起构成封闭的微分方程组。

如果引入 Lagrange 乘子,将约束条件式(1－1－25c)纳入泛函的变分式(1－1－25a)中,则得

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right)+$$
$$\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\delta q_{\varepsilon+\beta}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}+\lambda_\beta\delta q_{\varepsilon+\beta}\right)\Big]\mathrm{d}t=0 \tag{1-1-29}$$

经分部积分,并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s=0$,故有

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma+$$
$$\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}+\lambda_\beta\right)\delta q_{\varepsilon+\beta}\Big]\mathrm{d}t=0 \tag{1-1-30}$$

由于引入 Lagrange 乘子,使得 δq_σ 和 $\delta q_{\varepsilon+\beta}$ 相互独立,故由式(1-1-30)式可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}-\displaystyle\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\dfrac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}=0 & (1-1-31\text{a})\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}+\lambda_\beta=0 & (1-1-31\text{b})\end{cases}$$

式(1-1-31)与约束方程(1-1-16c)一起构成封闭的微分方程组。

我们注意到,式(1-1-31)与式(1-1-24)相同,式(1-1-28)与式(1-1-20)相同。这便说明不管在全量式中引入 Lagrange 乘子还是在变分式中引入 Lagrange 乘子,只要 Lagrange 乘子不参加变分,它们的作用都是放松约束条件对变分的限制,或者说,使原来不独立的变分变换为独立的变分。因此,把它们归纳为 Lagrange 乘子法的同一种程式。

2. Lagrange 乘子参加变分

引入 Lagrange 乘子 λ_β,将约束条件式(1-1-16b)纳入泛函中,可得式(1-1-17)。

将 π 变分,并令 $\delta\pi=0$(注意 Lagrange 乘子也作为独立变量参加变分),可得

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\beta=1}^{g}F_\beta(q_s,t)\delta\lambda_\beta\Big]\mathrm{d}t=0 \tag{1-1-32}$$

经分部积分,并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s=0$,可得

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\right)\delta q_s+\sum_{\beta=1}^{g}F_\beta(q_s,t)\delta\lambda_\beta\Big]\mathrm{d}t=0 \tag{1-1-33}$$

由于引入 Lagrange 乘子,使得 δq_s 相互独立,并将 $\delta\lambda_\beta$ 视为独立变量的变分,故由(1-1-33)式可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_s}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum\limits_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\dfrac{\partial F_\beta}{\partial q_s}=0 & (1-1-34\mathrm{a})\\ F_\beta(q_s,t)=0 & (1-1-34\mathrm{b})\end{cases}$$

可见方程(1－1－34a)和式(1－1－34b)构成封闭的微分方程组。

如果引入Lagrange乘子,将约束条件式(1－1－16c)纳入泛函(1－1－16a)中,则得式(1－1－21)。

将 π 变分,并令 $\delta\pi=0$,则有

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\delta q_{\varepsilon+\beta}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}+\lambda_\beta\delta q_{\varepsilon+\beta}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}[q_{\varepsilon+\beta}-\Phi_\beta(q_\sigma,t)]\delta\lambda_\beta\right\}\mathrm{d}t=0 \quad (1-1-35)$$

经分部积分,并按惯例在时域边界处取 $\delta q_s=0$,可得

$$\delta\pi=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}+\lambda_\beta\right)\delta q_{\varepsilon+\beta}+\sum_{\beta=1}^{g}[q_{\varepsilon+\beta}-\Phi_\beta(q_\sigma,t)]\delta\lambda_\beta\right\}\mathrm{d}t=0 \quad (1-1-36)$$

由于引入Lagrange乘子,使得 δq_σ 和 $\delta q_{\varepsilon+\beta}$ 相互独立,并将Lagrange乘子 λ_β 视为独立变量进行变分,故由式(1－1－36)可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}-\sum\limits_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\dfrac{\partial \Phi_\beta}{\partial q_\sigma}=0 & (1-1-37\mathrm{a})\\ \dfrac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}+\lambda_\beta=0 & (1-1-37\mathrm{b})\\ q_{\varepsilon+\beta}-\Phi_\beta(q_\sigma,t)=0 & (1-1-37\mathrm{c})\end{cases}$$

方程(1－1－37a)、(1－1－37b)和(1－1－37c)构成封闭的微分方程组。

可见,在泛函的全量式中引入Lagrange乘子,并且Lagrange乘子参加变分的程式,不仅可以放松约束条件对变分的限制作用,而且可以消除约束条件,即将泛函的约束条件转化为泛函的自然条件。

1.2　一般力学的广义变分原理

1.2.1　应用变积方法推导一般力学的广义变分原理

1.两类变量的广义变分原理

① 两类变量的变分问题

在变分学中，基本上存在三级变量 —— 自变量、可变函数和泛函。简单函数和泛函的区别在于：简单函数是自变量的函数，而泛函是可变函数的函数，独立自主地变化的可变函数称为自变函数。从不独立的可变函数也是自变函数的函数的角度看问题，不独立的可变函数也是泛函，我们可称其为子泛函。

在分析动力学中，可以选取参量 x_k（直角坐标）或 q_s（广义坐标）作为可变函数。此时，允许出现时间 t，但时间 t 是自变量，不参加变分；也允许出现 $\dot{x}_k$ 和 $\dot{q}_s$，但 $\dot{x}_k$ 和 $\dot{q}_s$ 分别以 x_k 和 q_s 的导数的"身份"出现。这类问题称为一类变量的变分问题。在分析动力学中，也可以选取参量 x_k（直角坐标）和 v_k（速度）或者 q_s（广义坐标）和 v_s^q（广义速度）作为可变函数。此时，允许出现时间 t，但时间 t 是自变量，不参加变分；也允许出现 $\dot{x}_k$ 和 $\dot{q}_s$，但它们分别是以 x_k 和 q_s 对时间的导数形式出现。这类问题称为两类变量的变分问题。

以上一类变量和两类变量的变分问题的描述，是为了叙述问题的方便而引入的。按照如上的描述，我们可以说，在完整约束方程

$$F_\beta(q_s, t) = 0 \tag{1-2-1}$$

$$G_\beta(x_k, t) = 0 \tag{1-2-2}$$

中，含有一类变量。在非完整约束方程

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \tag{1-2-3}$$

$$g_\beta(x_k, \dot{x}_k, t) = 0 \tag{1-2-4}$$

也含有一类变量。

若将非完整约束方程(1－2－3)和(1－2－4)分别变换为

$$f_\beta(q_s, v_s^q, t) = 0 \tag{1-2-5}$$

$$g_\beta(x_k, v_k, t) = 0 \tag{1-2-6}$$

便可以说，它们含有两类变量。

直角坐标系中的两类变量 x_k 和 v_k 与广义坐标系中的两类变量 q_s 和 v_s^q 之间的变换关系为

$$\begin{cases} x_k = x_k(q_s, t) \\ q_s = q_s(x_k, t) \end{cases} \tag{1-2-7}$$

$$\begin{cases} v_k = \sum\limits_{s=1}^{n} \dfrac{\partial x_k}{\partial q_s} v_s^q + \dfrac{\partial x_k}{\partial t} \\ v_s^q = \sum\limits_{k=1}^{3N} \dfrac{\partial q_s}{\partial x_k} v_k + \dfrac{\partial q_s}{\partial t} \end{cases} \tag{1-2-8}$$

脚标 $s = 1,2,\cdots,n$；$k = 1,2,\cdots,3N$；$\beta = 1,2,\cdots,g$。

② 完整系统的两类变量的广义变分原理

众所周知，一类变量的 Hamilton 原理的驻值条件为

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial V}{\partial q_s}=0 \tag{1-2-9}$$

应用对合变换,可将(1－2－9)变换为两类变量的基本方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial q_s}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial v_s^q}-\dfrac{\partial V}{\partial q_s}=0 & (1-2-10\mathrm{a})\\ \dot{q}_s-v_s^q=0 & (1-2-10\mathrm{b})\end{cases}$$

由式(1－2－10a)和式(1－2－10b)出发,我们可以应用变积方法来建立两类变量的广义变分原理。

按照广义力和广义位移之间的对应关系,将式(1－2－10a)和式(1－2－10b)乘上相应的虚变量,代数相加,然后积分,可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_s^q}-\frac{\partial V}{\partial q_s}\right)\delta q_s+(\dot{q}_s-v_s^q)\delta\frac{\partial T}{\partial v_s^q}\right]\mathrm{d}t=0 \tag{1-2-11}$$

经分部积分,并按惯例在时域边界 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 处,取 $\delta q_s=0$,可将式(1－2－11)变换为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[T-V+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial v_s^q}(\dot{q}_s-v_s^q)\right]\mathrm{d}t=0 \tag{1-2-12}$$

上式可以处理为一个泛函的驻值问题

$$\pi_2=\int_{t_0}^{t_1}\left[T(q_s,v_s^q,t)-V(q_s,t)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial v_s^q}(\dot{q}_s-v_s^q)\right]\mathrm{d}t \tag{1-2-13}$$

这就是完整系统的两类变量的广义变分原理的泛函。

应用类似方法,可以推导出完整系统的两类变量的广义变分原理的泛函的另一种表示形式

$$\gamma_2=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\left(q_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_s^q}+v_s^q\frac{\partial T}{\partial v_s^q}\right)-\left[T(q_s,v_s^q,t)-V(q_s,t)\right]\right\}\mathrm{d}t \tag{1-2-14}$$

这是一种与 π_2 对偶的表示形式。不难验证

$$\pi_2+\gamma_2=0 \tag{1-2-15}$$

这是一个重要的数学恒等式。

2.三类变量的广义变分原理

① 三类变量的变分问题

在分析动力学中,还可以选取参量 x_k(直角坐标)、v_k(速度)和 p_k(动量)或者 q_s(广义坐标)、v_s^q(广义速度)和 p_s^q(广义动量)作为可变函数。此时,允许出现时间 t,但时间 t 是自变量,不参加变分;也允许出现 $\dot{x}_k$ 和 $\dot{q}_s$,但它们分别是以 x_k 和 q_s 对时间的导数形式出现;还允许 $\dot{p}_k$ 和 $\dot{p}_s^q$ 出现,但它们分别是以 p_k 和 p_s^q 对时间的导数形式出现。这类问题称为三类变量的变分问题。

② 完整系统的三类变量的广义变分原理