全国硕士研究生入学统一考试

数学考试分析

2008年版

教育部考试中心

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试数学考试分析:2008年版/教育部考试中心. —北京:高等教育出版社,2007.7

ISBN 978-7-04-021305-8

Ⅰ.全… Ⅱ.教… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第096916号

策划编辑 刘 佳 **责任编辑** 雷旭波 **封面设计** 王凌波
版式设计 余 杨 **责任校对** 王效珍 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2007年7月第1版
印　　张	17.75	**印　　次**	2007年7月第1次印刷
字　　数	430 000	**定　　价**	30.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 21305-00

目　录

一、数学科考试说明

（一）考试性质

全国硕士研究生入学统一考试数学科考试（以下简称数学考试）是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有常模参照性的水平考试.

一方面，从数学考试成绩的使用功能上看，它是常模参照性的考试.所谓常模参照考试是指依据考生的成绩在全体考生成绩量表中的位置来评价考生成绩的优劣，离开考生群体解释考生的成绩意义不大.我国硕士研究生招生初试是从高分到低分择优确定参加复试人选，这种优胜劣汰的方式是常模参照考试的主要特征.数学考试成绩对于工学、经济学和管理学各专业的考生是否被录取起着至关重要的作用.从这个意义上讲，数学考试具有明显的选拔功能，是常模参照考试.

另一方面，从数学考试测量功能上看，数学考试又是水平考试.水平考试是用来测量考生是否达到一定的水平，从而决定是否适应将来的某项任务的考试，其主要特征是命题不以《教学基本要求》和某一指定的教材为依据，而是以《考试大纲》为依据.《考试大纲》规定考试内容和考试要求，与《教学基本要求》没有直接的关系.数学考试是测量工学、经济学、管理学各专业的考生是否具备为完成相应专业研究生阶段的学习任务以及胜任工作后的研究任务所必需的数学知识和能力.数学《考试大纲》规定的考试内容和考试要求与《教学基本要求》不完全相同，《教学基本要求》中规定的有些教学内容《考试大纲》不要求考查，而《考试大纲》中的有些考试要求要略高于教学要求.可见，数学考试也符合上述水平考试的特征，因而是水平考试.

为了体现工学、经济学、管理学不同学科专业对硕士研究生入学应具备的数学知识和能力的不同要求，数学考试分为四个卷种，即数学一、数学二、数学三和数学四，对不同卷种的考试内容有不同的要求.这种对不同学科、专业考生提出不同的考试要求的特征也是水平考试的重要标志.

（二）指导思想

根据数学考试的性质和目的，数学科考试的命题工作一直坚持两个“有利于”的指导思想，即既有利于国家对高层次人才的选拔，又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高，在这两个“有利于”中，重点是有利于为国家选拔高层次的人才.

有利于国家对高层次人才的选拔，就是要求这项考试具有较高的信度和效度，能对考生群体进行有效的测量和甄别，从而区分出考生成绩的优劣，并将数学基础好、有发展潜力并具有一定创新能力的考生选拔出来，进入更高层次的教育阶段学习、深造.

有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高，要求数学考试试题的编制能结合高等学校的教学实际，试题水平既能反映教学的实际水平，也能考查研究生新生应当具备的知识和能力，同时，正确利用考试这根“指挥棒”引导高校教学向培养学生应用数学能力的方向发展，使得学生学而有用，学而会用，从而对数学教学质量的提高起到积极的促进作用.

（三）基本原则

（1）严格按照《2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（以下简称《考试大纲》）规定的考试内容和考试要求进行命题.

《考试大纲》主要包括以下内容：考试性质、考试的基本要求、考试方法和考试时间、试卷分类以及各类试卷适用的招生专业、考试内容、考试要求、试卷结构（包括内容比例和题型比例）和参考试题等，它是法规性文件，是命题工作和考生复习的唯一依据.

按照《考试大纲》命题是指考查的内容不超过大纲的规定，各科目在试卷中的占分比例、题型比例与大纲要求基本一致，试卷的难易度与参考试题的难易度基本一致，试卷中不出现超纲题、偏题和怪题.

（2）试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题的能力的考查.

（3）试题编制要符合各种题型编制原则.

（4）保持历年试题难度的稳定.

（5）试题编制应科学、公正、规范.

（四）参考答案及评分参考的制订说明

制订参考答案及评分参考是命题工作的一个重要组成部分，它为全国范围内统一的评卷工作提供了一个公正、科学的量表和尺度，是考试公平性的重要保证.

数学填空题要求答案是确定的和唯一的，参考答案只给出应填的结果，不给出推导计算过程. 一般每题 4 分，答对 4 分，答错 0 分. 对于四选一的选择题有 A、B、C、D 四个备选项，其中三个是干扰项，一个是正确选项，参考答案只给出正确选项前的字母，不给出推导过程. 选对得满分，选错得 0 分，不倒扣分，鼓励考生在不会作答时猜测选项. 对于计算题、证明题以及其他解答题，一般提供一至两种参考解答和证明，有些试题有更多的解法甚至包括初等解法，但所提供的参考解答必须是与《考试大纲》规定的考试内容和考试目标相一致的解法和证明方法. 参考答案的文字表述必须规范，推理过程必须表述清楚，避免因参考答案表述不清而造成评分误差. 每题分值的设置与完成该题所花费的平均时间以及考核目标的层次有关. 一般地说，综合性较强的试题、推理过程较多的试题和应用性的试题赋分的权重较大，分值较高；基本计算题、常规性试题和简单应用题的分值较低. 各题的分值设定之后，就需要确定评分参考，即运算过程中关键步骤的赋分权重. 计算题和证明题的评分标准是按照计算或推理的过程连续赋分的，比如，完成一道分值为 10 分的计算题需要三个关键步骤，完成到第一步骤给 3 分，完成到第二步骤给 6 分，三个步骤全部完成给 10 分. 对于文科试题常常是按照要点单独赋分. 为什么数学题不宜按每个步骤单独给分呢？这是考虑到对于数学计算或证明题，只有做对了前面步骤，才能完成后面的步骤这一特点. 对于有多个解法的试题，一般到达同一结果给相同的分数，每一步骤分的给定不是随意的，如同确定每题分值一样，需要考虑该步骤在解答和证明过程中的复杂和重要程度，关键的步骤分值较高，反之较低.

参考答案与评分参考是评分的原则依据，一般各地在试卷评阅前要组织专家依照参考答案

与评分参考对部分考卷进行试评，对评分参考作进一步的细化，制订评分细则，使评卷工作更具可操作性.

评分参考的制订直接关系到试卷的平均分，一份由很难的试题构成的试卷，可以通过较松的评分参考使其平均分较高，反之亦然. 因此，评分参考制订的科学性和逐年稳定性是试卷质量的重要组成部分.

(五) 试题、试卷和考试质量的评价指标

根据研究生入学数学考试的性质，它是常模参照性的水平考试. 对于常模参照性考试，通常用难度和区分度评价试题的质量；用平均分和标准差反映考生成绩的分布情况，同时也作为评价试卷质量的重要指标；用信度和效度评价考试的质量.

1. 试题的评价指标

试题难度是反映试题难易程度的指标，它是考生在该题上的得分率，即考生在该题上的平均得分与该题满分之比，通常以小写的 p 表示，取值范围在 0 到 1 之间. 由于不同的考生群体水平是有差异的，他们在同一题上的平均得分也不同，因此，同一题目相对于不同的考生群体，其难度值是不同的，也就是说题目难度依赖于考生样本.

但对于全国统一考试而言，由于参加考试的考生群体的水平是相对稳定的，可以把每年的考生群体视作基本不变的(实际上每年考生水平是存在一定差异的)，这样试题的统计难度值或估计值就可以用于比较和控制试卷质量.

对于数学考试而言，难度值在 0.3 以下的为难题，难度值在 0.3 ~ 0.8 之间的视为中等难度的试题，难度值在 0.8 以上的视为易题. 试卷难度一般控制在 0.5 左右，一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

在命题过程中，为了保证试题的质量，需要估计题目难度. 根据难度的定义，估计难度不仅要考虑题目自身的内容难度，而且要考虑考生群体的水平以及该题的评分参考的设计.

试题区分度是指题目对不同水平的考生加以区分的程度或鉴别的能力. 区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数，用 D 表示，一般 $-1 < D < 1$. 对于主观性试题，一般用积矩相关系数；对于客观性试题，如填空题和选择题，一般用双列相关计算公式. 该公式比较复杂，可参考有关教育测量书籍，在此不作介绍.

一种近似的、适合于主观性试题区分度的计算方法是先将考生群体分出一个高分组和一个低分组，然后分别计算出高分组、低分组的得分率 $p(H)$、$p(L)$，$D = p(H) - p(L)$. 高分组一般是考生群体中成绩在前面的 27% 的考生，低分组一般是考生群体中成绩在后面的 27% 的考生. 这种方法适合较小规模的考试，不适用于大规模的考试.

一般认为区分度在 0.3 以上的试题为合格，0.2 ~ 0.3 之间的试题应予以修正，0.2 以下的试题为不合格，应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系，难度越大或难度越小的试题其区分度通常较小，难度中等的试题区分度通常较大. 为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价，我们通常将试题分为六类，如表 1 - 1 所示.

表 1-1　试题的六大类型分类表

类型＼特征	p	D	试题特征
Ⅰ	(0,0.3)	(0,0.3)	难度大且区分能力差
Ⅱ	[0.3,0.8]	(0,0.3)	难度适中但区分能力差
Ⅲ	(0.8,1)	(0,0.3)	难度小且区分能力差
Ⅳ	(0,0.3)	(0.3,1.0)	难度大但区分能力强
Ⅴ	[0.3,0.8]	(0.3,1.0)	难度适中且区分能力强
Ⅵ	(0.8,1)	(0.3,1.0)	难度小但区分能力强

在上述分类中，我们没有考虑区分度小于零的情况，因为这种试题一般不会出现. 我们认为，第Ⅴ类试题是测量效果较好的试题，在试卷中应占较大比例(达 80% 以上). 第Ⅰ类试题属于"题太难谁都不会做"，第Ⅲ类试题属于"题太易谁都会做"，它们在试卷中仅起到降低或提高平均分、降低标准差的作用，因此，命题中我们严格控制出现这两类试题. 同时，我们也不要求出现太多的第Ⅱ类和第Ⅵ类试题. 第Ⅳ类试题在选拔性的研究生入学数学考试中具有非常重要的作用，它对区分中、高水平的考生十分有效，通过多年对试题的分析，这类试题往往是考查考生综合应用能力的试题.

2. 试卷的评价指标

若将一份试卷看作一个题目，则像计算题目难度一样，也有一个试卷难度指标，即全体考生的平均分与试卷满分之比. 在某项考试的满分逐年保持不变的情况下，全体考生的平均分成为衡量试卷难易程度的重要指标，试卷的平均分反映全体考生的平均得分. 试卷的标准差是反映考生成绩离散程度的指标，标准差愈大，说明考生成绩分布得愈广，该考试将不同水平的考生区分开来的效果愈强；标准差越小，说明考生成绩都集中在平均分附近，没有把不同水平的考生拉开.

试卷平均分和标准差是反映试题难易度是否稳定的非常重要的指标. 因为不同年份的同一科试卷是否稳定主要看考后考生成绩的分布是否稳定，在大规模考试中，一般情况下考生的成绩近似服从正态分布，而正态分布由均值和标准差决定，试卷的平均分和标准差是考生成绩总体均值和标准差的良好估计. 因此，控制试卷的难易度的稳定性，关键是控制试卷的平均分和标准差.

试卷的平均分与构成试卷的试题的难度有一种确定的关系式，即试卷的平均分等于每题的题分乘以该题的难度值后的相加值，在命题过程中可以通过有经验的命题教师对试题难度进行估计，就可以利用上述关系式估计出试卷的平均分，从而达到控制试卷难度的目的. 试题的区分度与试卷的标准差虽然没有确定的关系，但一般来说，试题的区分度愈大，该题对试卷标准差的贡献值就愈大. 特别地，中等难度、区分度较大的第Ⅴ类试题对标准差的贡献最大. 因此，在命题中应尽量使第Ⅴ类试题在卷中占分比例较大.

试卷的及格率是指获得满分的 60% 以上成绩的考生占考生总人数的比例，它是考生成绩分布曲线下大于 90 分的面积，此面积与成绩分布的均值和标准差有关，在命题中难以单独控制，把它作为评价考试情况的一个粗略的指标是可以的，但一般情况下，不把它作为试卷质量的评价指标.

3. 考试质量的评价指标

教育测量学认为考试的信度和效度是评价考试质量的重要指标. 信度是反映考试可靠性的指标,可形象地解释为:只要测量对象本身没有变化,用同样的“尺子”去测量总可以得到相同的结果. 常用的信度类型主要有再测信度、复本信度、分半信度和内部一致性信度. 由主观性试题构成的考试的内部一致性系数又称为 α 系数. 目前我们采用的是分半信度和 α 系数. 效度反映一个考试是否测量了想要测量的东西. 常用的效度类型主要有内容效度、效标关联效度和构想效度. 关于信度和效度的计算公式可参照有关教育测量书籍.

在后面的试卷分析和试题分析部分将应用上述关于试题和试卷的评价指标.

二、2007 年数学考试分析

(一) 试卷分析

1. 总体评价

(1) 数学一至数学四共四份试卷严格按照《考试大纲》命题,无超纲的题目;各卷种试题覆盖了《考试大纲》中几乎所有的内容,分值分布也基本合理恰当,见表 2-1.

表 2-1　2007 年数学各卷种试卷结构

卷种 / 分值 / 内容	数学一	数学二	数学三	数学四
函数、极限、连续	8	16	12	12
一元函数微分学	19	44	33	33
一元函数积分学	8	19	4	4
多元函数微分学	15	8	4	4
多元函数积分学	18	15	15	15
无穷级数	10		10	
微分方程	4	14	4	14
线性代数	34	34	34	34
概率论	23		23	23
数理统计	11		11	11
总分	150	150	150	150

(2) 试卷难度适中并有台阶,无偏题、怪题.

首先,每份试卷的基本题占有较大比例:至少有 4 个填空题考查最基础的计算,如定积分的凑微分与分部积分法、二元复合函数求一阶偏导数、高阶导数、常微分方程求特解以及矩阵求秩等;选择题中也有一半是考查基本概念的,如等价无穷小量、函数图形的渐近线、定积分的几何意义、向量组的线性相关性与古典概率等. 此外,数学一第 17、18 题,数学二第 17、18、19、20 题,数学三第 17、19 题,数学四第 17、20 题,都是高等数学中的常规计算题. 概率统计的两个主观题也只涉及基本概念与基本计算.

其次,每份试卷都安排了部分有一定难度的试题以及个别上手容易,但要得满分则需要对内容深入理解、全面复习的基本题. 有一定难度的试题如数学一第 5、6、20 题,数学二第 6、7 题等;四份试卷中共有的证明题(数学一、三、四的第 19 题,数学二的第 21 题)虽不是很难,但考生一向畏惧证明题,所以得分率不高;四份试卷中的多元函数积分题(数学一第 18 题,数学二第 22 题,数学三、四第 18 题)属于得满分不易的试题.

(3) 试题具有一定的综合性,体现了硕士生的选拔要求.

(4) 试题文字叙述清楚,条件明确,所求或欲证无误.

(5) 参考答案及评分参考基本科学与合理,可操作性强.

总之,2007 年硕士研究生入学统一考试数学试卷较好地贯彻了命题指导思想和命题原则,是较为成功的试卷.

2. 统计数据分析

(1) 难度分析

2007 年数学各卷种的抽样统计数据如表 2-2 所示. 与 2006 年相比,各卷种难度值都有不同程度的下降,数学一下降 0.11,数学二下降 0.10,数学三下降 0.04,数学四下降 0.08. 从表 2-3的试题难度分布可以看出,中等难度的试题分值占到 80% 左右,数学一在四份试卷中难题占分比例最高,故试卷整体难度值最低.

表 2-2 2007 年数学各卷种抽样统计数据

卷种	样本量	平均分	难度	标准差	α 信度
数学一	3 647	62.20	0.415	29.29	0.876
数学二	3 090	72.28	0.482	30.47	0.861
数学三	3 067	68.59	0.457	30.92	0.877
数学四	3 003	67.38	0.449	31.96	0.878

表 2-3 2007 年数学各卷种难度分布表

难度区间	数学一	数学二	数学三	数学四
0.8 以上	2.7%	2.7%	8%	5.3%
0.3 ~ 0.8	78%	81.3%	79.3%	79.4%
0.3 以下	19.3%	16%	12.7%	15.3%

表 2-4 2007 年数学各卷种在三种题型上的难度值

题型	数学一	数学二	数学三	数学四
选择题	0.520	0.514	0.585	0.575
填空题	0.522	0.575	0.481	0.436
解答题	0.336	0.441	0.391	0.394

表 2-4 为数学各卷种在三种题型上的难度值,可以看出,各卷种三种题型的难度值均在中等难度范围内,但选择题、填空题的难度值都较解答题高,这体现了不同题型不同的考查功能. 选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解,要求考生能进行简单的推理、判定、计算和比较;填空题主要考查三基及数学的重要性质,一般不考省去解答过程的大计算题;解答题除考查基本运算外,主要考查考生的逻辑推理能力和综合运用能力,因而对考生来说试题难度相对较大.

(2) 区分度分析

从考生分数分布直方图(图 2－1 至图 2－4)可以看出,数学二近似服从正态分布,数学一、三、四呈正偏态,各卷的标准差均在 30 左右,说明数学各卷种对考生进行了有效的区分. 从表 2－5可以看出,区分度在 0.2 以下的只有两道题,其余试题均在 0.2 以上,数学一有 97.3%、数学二有 84%、数学三、四分别有 89.3% 的试题都达到了 0.3 以上的合格水平,试题的区分性能良好.

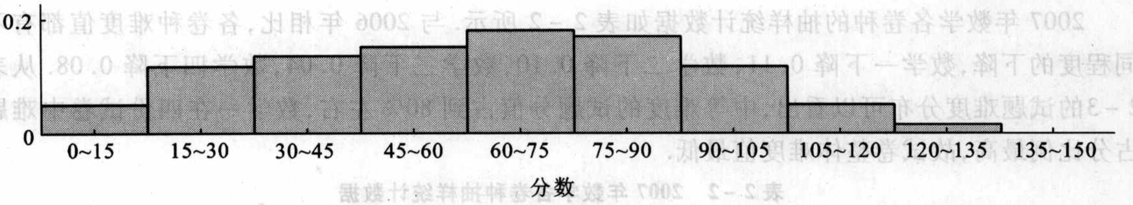

图 2－1　数学一考生分数分布直方图

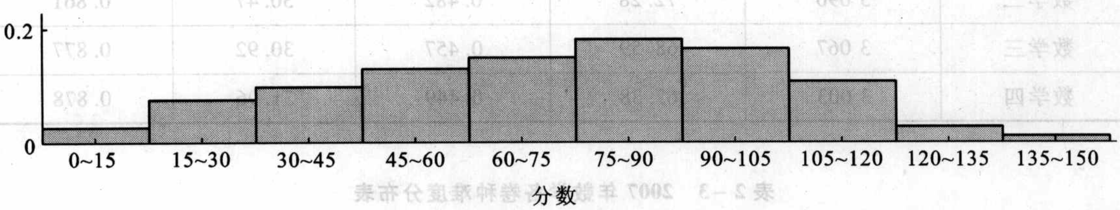

图 2－2　数学二考生分数分布直方图

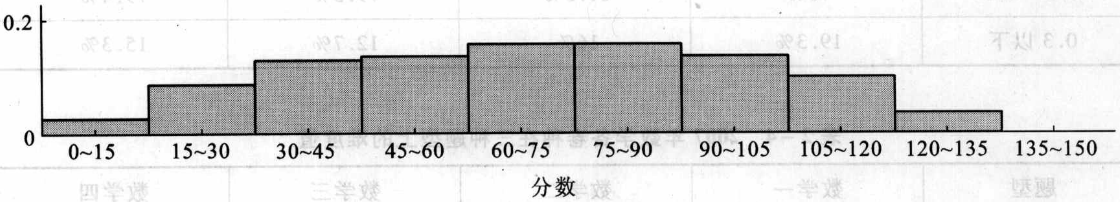

图 2－3　数学三考生分数分布直方图

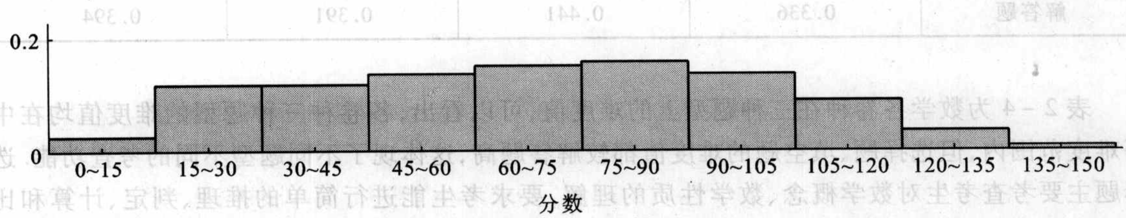

图 2－4　数学四考生分数分布直方图

表 2-5　2007 年数学各卷种区分度分布表

区分度区间	数学一	数学二	数学三	数学四
0.2 以下	0%	2.7%	0%	2.7%
0.2 ~ 0.3	2.7%	13.3%	10.7%	8%
0.3 以上	97.3%	84%	89.3%	89.3%

3. 考生和教学问题分析

2007 年四份试卷的平均分比 2006 年下降了 10 多分，分析其原因有：

(1) 从考生答题情况看，表现出对基本概念理解不透，对基本运算掌握不熟，综合能力训练不够等特点.

例如四份试卷都有的一个选择题：判定曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(a+e^x)$ 渐近线的条数. 这本是一道基本题，但得分率都小于 0.2，说明考生对概念理解不透，没有区分 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 的情况. 又如四份试卷的第 3 题，利用定积分的几何意义及函数的奇偶性即可得到正确的结果，但得分率均在 0.35 左右，说明考生对知识的掌握不够灵活.

再如，填空题中的大多数题属于"送分题"，但得分率也不高，甚至在计算定积分、二元函数求一阶偏导数这样的基本计算题时，也得出多种错误的答案，充分说明考生对基础知识掌握得不够扎实.

(2) 从考生答题情况也可以看出教与学中的一些偏差. 考生在平时学习中对基本功不够重视，不下工夫，导致基础知识掌握不扎实，不少考生指望在考研复习班通过"猜题"获取高分. 此外，教学过程中不重视基本功的训练，习题课学时少也是导致考生基础知识不扎实的原因之一.

(二) 数学一试题分析

1. 选择题

(1) 当 $x\to0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

【答】 应选(B).

【分析】 本题主要考查几个重要的等价无穷小量，也考查用洛必达法则求极限，属于基本题.

【解法 1】 排除法. 考生应对几个常用的等价无穷小量很熟悉. 当 $x\to0^+$ 时，$1-e^{\sqrt{x}}\sim(-\sqrt{x})$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x$，不选(A)、(C)、(D)，所以选(B).

【解法 2】 利用等价无穷小量的传递性，直接可验证如下：当 $x\to0^+$ 时，$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\Big(1+$

$\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\Big)\sim\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim x+\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$,选(B).

【解法 3】 也可用洛必达法则验算如下:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)=1,$$

选(B).

上面三种解法中,解法 1 最快捷,可见熟记几个常用的等价无穷小量非常重要. 本题难度值为 0.572.

(2) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【答】 应选(D).

【分析】 求铅直渐近线、水平渐近线、斜渐近线分别有一定的方法(公式),只要按照这些方法逐个讨论即可. 本题是基本题.

【解】

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty,$$

所以 $x=0$ 是一条铅直渐近线. 而

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=+\infty,$$

所以沿 $x\to+\infty$ 方向没有水平渐近线. 又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\ln(1+e^x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln[e^x(e^{-x}+1)]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}[x+\ln(e^{-x}+1)]=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x+\ln(e^{-x}+1)-x]=0,$$

所以沿 $x\to+\infty$ 方向有斜渐近线 $y=x$.

再看沿 $x\to-\infty$ 方向:

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0,$$

所以沿 $x\to-\infty$ 方向该曲线有水平渐近线 $y=0$. 既然沿 $x\to-\infty$ 方向已有水平渐近线,此曲线当然不可能再有斜渐近线. 故共有 3 条渐近线,应选(D).

【典型错误】 很多考生选了(C),少了一条渐近线. 其原因可能是疏忽大意,只考虑了 $x\to+\infty$ 方向(或 $x\to-\infty$ 方向),而忘了讨论另一方向;或者可能错误地认为有了水平渐近线(或斜渐近线),必然没有斜渐近线(或水平渐近线). 这种看法是错误的. 对于此,正确的说法应该是:如果曲线 $y=f(x)$ 沿 $x\to+\infty$ 方向有水平渐近线(或斜渐近线),那么沿同一方向必然没有斜渐近线(或水平渐近线),而沿 $x\to-\infty$ 方向必须另行考虑,仍可能有斜渐近线(或水平渐近线). 考生

在使用某些结论时,应十分注意得到该结论的前提.

本题的难度值为 0.197.

(3) 如图 2-5,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2,0]$,$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周.设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$,则下列结论正确的是

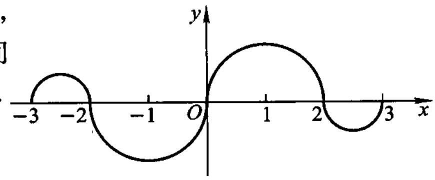

图 2-5

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.　　(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.　　(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.

【答】 应选(C)

【分析】 本题主要考查定积分的几何意义以及奇、偶函数变上限定积分所表示的函数的奇偶性.

【解】 由所给条件,$f(x)$ 为 x 的奇函数,故 $F(x)$ 为 x 的偶函数,所以 $F(-3)=F(3)$.再利用定积分的几何意义,用半圆面积表示所要计算的定积分,于是有

$$F(3)=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3}{8}\pi,$$

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},$$

所以 $F(3)=\frac{3}{4}F(2)$,选(C).

【注 1】 本题也可以不经计算直接选(C).理由如下:$F(3)$ 是直径为 2 的半圆面积减去直径为 1 的半圆面积,而 $F(2)$ 是直径为 2 的半圆面积,所以 $F(2)>F(3)>0$,只能选(C).

【注 2】 若不会用定积分的几何意义,也不知道利用奇偶性去考虑,而采用直接计算,将增加很多计算量.

本题的难度值是 0.354.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.　　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

【答】 应选(D).

【分析】 本题主要考查利用给定极限的存在性讨论与此有关的另一极限的存在性,还考查根据给定极限的存在性按导数定义讨论相应函数在指定点的可导性.本题所涉及的内容既很基本,又很重要,用到的概念较多,有一定的综合性.

【解】 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,要讨论 $f(0)$ 的值,自然想到利用 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.对于(A),由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,于是

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot x\right]=0,$$

所以命题(A)正确.

对于(B),将$f(x)+f(-x)$看成(A)中的$f(x)$,于是

$$\lim_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=0,$$

即有$f(0)+f(-0)=0$,故$f(0)=0$,命题(B)正确.

对于(C),由(A)已知$f(0)=0$,按导数定义,有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

由(C)之条件知$f'(0)$存在,故命题(C)亦正确.

于是余下只有(D)不正确,选(D).

可以举例说明(D)不正确,例如设$f(x)=|x|$,满足条件$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=0$(存在),但$f'(0)$不存在.

本题难度值为0.415.

(5) 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数,且$f''(x)>0$,令$u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是

(A) 若$u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必收敛. (B) 若$u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必发散.

(C) 若$u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必收敛. (D) 若$u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必发散.

【答】 应选(D).

【分析】 由$f''(x)>0$及各选项所给条件($f(1)>f(2)$或$f(2)>f(1)$),要讨论数列$\{f(n)\}$的敛散性,首先想到利用拉格朗日中值定理将$f(x)$转化为$f'(x)$,再由$f''(x)>0$知$f'(x)$单调增加,最后讨论$\{f(n)\}$的敛散性.这是下面解法1的思路.或者直接由带拉格朗日余项的泰勒公式,建立起$f(x)$与$f'(x)$,$f''(x)$的关系,然后讨论$\{f(n)\}$的敛散性,这是解法2的思路.又由于所讨论的是一个抽象函数对应的数列,若能举出反例排除其中三个选项,那么余下一项便是所选.如何举反例呢?$f''(x)>0$有明显的几何意义,所以可以从几何入手举出具体的函数表达式,这就是下面的解法3.

【解法1】 由拉格朗日中值定理,有

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n),$$

其中$\xi_n\in(n,n+1)$,$n=1,2,\cdots$.由$f''(x)>0$知,$f'(x)$单调增加,故

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots,$$

所以

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=u_1+\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_1+\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)>u_1+nf'(\xi_1)\\&=u_1+n(u_2-u_1),\end{aligned}$$

于是当$u_2-u_1>0$时,推得$\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=+\infty$,选(D).

由以上推导可见,若$u_2-u_1<0$,就推不出$\{u_n\}$的敛散性了.

【解法2】 由带拉格朗日余项的泰勒公式,有

$$f(k+1)=f(k)+f'(k)(k+1-k)+\frac{1}{2}f''(\xi_k)(k+1-k)^2$$
$$>f(k)+f'(k).$$

将上式自 $k=2$ 至 $k=n$ 累加，消去左、右相同的项，并由 $f'(x)$ 单调增加，$f'(n)>f'(n-1)>\cdots>f'(2)$，可得

$$f(n+1)>f(2)+\sum_{k=2}^{n}f'(k)>f(2)+(n-1)f'(2).$$

再由泰勒公式，得

$$f(1)=f(2)+f'(2)(1-2)+\frac{1}{2}f''(\xi)(1-2)^2$$
$$>f(2)-f'(2),$$

所以 $f'(2)>f(2)-f(1)=u_2-u_1$，于是当 $u_2-u_1>0$ 时，推得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=+\infty$. 选(D).

【解法3】 排除法. 由 $f''(x)>0$ 的几何意义，取 $f(x)=\frac{1}{x}-x$，在区间 $(0,+\infty)$ 内，有 $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$，$f(1)=0$，$f(2)=\frac{1}{2}-2<0=f(1)$，满足(A)的条件 $u_1>u_2$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-n\right)=-\infty$，发散，故(A)不成立. 取 $f(x)=\frac{1}{x}$，$f''(x)>0$，$f(1)=1>\frac{1}{2}=f(2)$，满足(B)的条件 $u_1>u_2$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$，收敛，(B)不成立. 取 $f(x)=x^2$，$f''(x)=2>0$，$f(1)=1<2^2=f(2)$，满足(C)的条件，但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\infty$，发散，(C)不成立. 只有选(D).

【注】 级数中有一条十分重要而其证明却很容易的定理："级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在". 利用此定理也可方便地解答本题，讨论如下：由拉格朗日中值定理，有

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n)>f'(\xi_1)$$
$$=u_2-u_1.$$

当 $u_2-u_1>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)\neq0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 发散，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在，选(D).

本题的难度值为 0.656.

(6) 设曲线 $L:f(x,y)=1$（$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数）过第Ⅱ象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N，Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是

(A) $\int_\Gamma f(x,y)\,dx$.　　(B) $\int_\Gamma f(x,y)\,dy$.

(C) $\int_\Gamma f(x,y)\,ds$.　　(D) $\int_\Gamma f'_x(x,y)\,dx+f'_y(x,y)\,dy$.

【答】 应选(B).

【分析】 计算曲线积分（不论是第一型曲线积分还是第二型曲线积分）时，可以而且应该将曲线方程代入，于是立刻可将(A)、(B)、(C)化简. 而(D)的积分表达式为 $f(x,y)$ 的全微分，于是由原函数法可求得该曲线积分的值. 本题是一道基本概念题.

【解】 记 $M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，$x_M<0$，$y_M>0$，$x_N>0$，$y_N<0$，按分析所指，有

(A) $\int_{\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma} \mathrm{d}x = x\Big|_{x_M}^{x_N} = x_N - x_M > 0.$

(B) $\int_{\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} \mathrm{d}y = y\Big|_{y_M}^{y_N} = y_N - y_M < 0$,选(B)

若再计算下去,有:

(C) $\int_{\Gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma} \mathrm{d}s = l > 0$,其中 l 为 Γ 自 M 到 N 的长.

(D) $\int_{\Gamma} f'_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} \mathrm{d}f(x,y) = f(x,y)\Big|_{(x_M,y_M)}^{(x_N,y_N)}$

$= f(x_N,y_N) - f(x_M,y_M) = 1 - 1 = 0.$

【典型错误】 由于是利用一般的曲线和函数考查曲线积分的概念和计算,结果使得部分考生无从下手,这从考生答卷中的选项分布就可以看出.每个选项都有部分考生选择,而错选(A)和(D)的比较多,说明考生运用概念计算的能力较差.

本题的难度值为 0.416.

(7) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

【答】 应选(A).

【分析】 本题考查向量组的线性相关性,是一道简单题.事实上,选项(A)中的3个向量之和$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,即这3个向量是线性相关的.至于其他3个向量组是否线性无关,可由以下的结论做检验:设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关,则向量组

$$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)\boldsymbol{A}$$

线性无关的充要条件是 r 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.选项(B),(C),(D)中的向量组分别有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},$$

不难算出:

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0,\quad \begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}=-7\neq 0,\quad \begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=9\neq 0,$$

可知选项(B),(C),(D)的向量组都是线性无关的.事实上,选项(A)的向量组也有相应的表示: