国家示范性软件学院系列教材

本书为教师配有电子教案

离散数学及算法

曹晓东　原旭　编著
大连理工大学

离散数学基本理论与相关算法实现相结合

- 内容深入浅出，结构安排合理，讲解通俗易懂
- 算法与理论相结合，变抽象思维为感性思维
- 提供考研例题解析，助考研同学一臂之力

机械工业出版社
China Machine Press

离散数学及算法

国家示范性软件学院系列教材

离散数学及算法

曹晓东 原旭 编著
大连理工大学

离散数学基本理论与相关算法实现相结合

- 内容深入浅出，结构安排合理，讲解通俗易懂
- 算法与理论相结合，变抽象思维为感性思维
- 提供考研例题解析，助考研同学一臂之力

机械工业出版社
China Machine Press

本书主要介绍离散数学的基本理论及算法实现，分为两大部分，第一部分介绍计算机科学中广泛应用的离散结构基本概念和基本原理，包括以下内容：数理逻辑、集合论、二元关系、函数、代数系统和图论。第二部分给出了与各章内容密切相关的算法和程序，使理论在计算机上得到具体实现。附录部分给出了近年来考研试题的分析。

本书条理清晰，阐述深入浅出，适合作为高等学校计算机及相关专业离散数学课程的本科生教材，也可供计算机科学工作者和科技人员阅读与参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学及算法/曹晓东等编著. -北京：机械工业出版社 2007.8
（国家示范性软件学院系列教材）

ISBN 978-7-111-21876-0

Ⅰ. 离… Ⅱ. 曹… Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材 Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 108372 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）
责任编辑：王春华
北京慧美印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2007 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 16.75 印张
定价：28.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换
本社购书热线：（010）68326294

前言

计算机科学发展迅速，应用广泛，已成为科学之林的佼佼者。计算机科学之所以能取得这样辉煌的成就，与其具有雄厚的理论基础——离散数学是分不开的。离散数学不仅是计算机科学基础理论的核心课程，也是人工智能的数学基础之一。

本书介绍离散数学的结构体系，包括：

- 数理逻辑
- 集合论
- 关系
- 函数
- 代数系统
- 图论

其中，数理逻辑是用数学方法研究判定和推理的一门学科，它使用特指的表意符号构成一套形式化语言。使用这套形式化语言可以准确地描述集合的并集、交集、笛卡儿乘积等概念。关系是笛卡儿乘积的子集，函数又是关系的子集。利用函数可以定义运算，利用集合和运算可以定义代数系统，半群与群、环和域、格与布尔代数则是代数系统的特例。图也是一个特殊的代数系统，而且是计算机科学应用领域中最活跃的一个分支。

从离散数学的结构体系不难看出，离散数学内容丰富，涉及的知识面广泛，各部分的内容既是独立的又是相关的。离散数学与计算机科学中的数据结构、数据库原理、操作系统、编译原理和软件工程等密切相关。

本书共分为两大部分，第一部分介绍离散数学的基本理论，共分七章，分别是命题逻辑、谓词逻辑、集合论、关系、函数、代数系统和图论。第二部分给出离散数学中涉及的主要算法的程序实现，使学习者在学习基本理论、建立抽象思维能力和逻辑思维能力的同时，有一个与实践结合的平台，使理论落到实处，同时对提高学习者的程序设计能力也有一定帮助。

附录中给出了近年来考研的例题解析，这对考研的学生会有很大帮助。

曹晓东主编了全书，原旭担任副主编并且实现了所有算法的程序设计，刘文杰和栾青对计算机辅助教学部分作出了极大的贡献。侯蕾对公式和图表的编辑作了大量工作。

本书不仅可以作为高等院校计算机科学与技术及相关专业的教材，也可作为考研及计算机工作者的参考书。

由于编者水平有限，书中错误和疏漏之处在所难免，恳请读者不吝指正。

最后，再一次感谢为本书出版作出积极贡献和支持的同志们。

目录

第一篇　计算机科学中的离散结构

第 1 章

■ 命题逻辑

1.1 引言

命题逻辑与谓词逻辑统称为**数理逻辑**(又名**符号逻辑**),是用数学方法研究推理的一门科学。旧逻辑学的创始人是公元前4世纪的希腊思想家亚里士多德(Aristotle);新逻辑学的创始人是17世纪的德国哲学家莱布尼茨(Leibniz)和19世纪中叶的英国数学家乔治·布尔(George Boole)。

逻辑学的主要目的是要探索出一套完整的规则,按照这些规则可以确定任何特定的论证是否有效。这种规则称为推理规则。要想把这种推理规则应用到各个学科领域中去,就必须使用一种概括性较强,并且又是独立于任何特定的论证或者所涉及的学科的语言。这种语言是一种符号化的形式语言,它没有二义性。使用这种形式化语言可以将推理过程公式化,并且依据推理规则可以机械地确定论证的有效性。

本章将介绍这套符号化形式体系的制定,以及它在命题逻辑中的应用。

1.2 命题及命题逻辑联结词

1.2.1 命题

一个具有真假意义的陈述句称为一个**命题**。也就是说,一个命题的真值只能是真或是假,不能兼而有之,也不能是疑问句或是祈使句等其他类型的句子。如果一个命题的真值是真,则用1或T(Ture)来表示;如果一个命题的真值是假,则用0或F(False)来表示。

命题用大写的英文字母,如$P,Q,R\cdots$来表示。

例 1.2.1 下面所举均是命题:

(1)2008奥运会在美国举行。

(2)$2\times2=5$。

(3)闪电比雷声传播得快。

(4)$1+101=110$。

(5)程序的始祖是拜伦的独生女儿爱达。

以上命题(1)和(2)的真值是F;(3)的真值是T;(4)的真值则取决于采用哪种数制,若采用二进制,则取值为T,其他进制则取值为F;(5)的真值则取决于考证的结果。

例 1.2.2 下面所举均不是命题:

(1)我们的祖国多辽阔呀!

(2)明天开会吗?

(3)真好啊!

(4)我正在说谎。

因为(1)、(2)和(3)不是陈述句,所以它们不是命题。(4)是悖论。因为,如果他确实是说谎,那么"我在说谎"便是真,于是就会得出,如果他是说谎,那么他是讲真话;另一方面,如果他确实说的是真话,那么"我正在说谎"便是假,于是会得出,如果他是讲真话,那么他是说谎。从以上分析我们只能得出这样的结论——他必须既不说谎又不讲真话,这显然是矛盾的。也就是说,对于陈述句"我正在说谎"已无法指定它的真值。这样的陈述句称为**悖论**,不是命题。

若一个命题不能再分解为更简单的命题,则这个命题称为原子命题。

例 1.2.1 中的命题均是原子命题。原子命题用大写的英文字母 $P,Q,R,\cdots$ 表示。

1.2.2 逻辑联结词

使用逻辑联结词和圆括号可以把原子命题组合成一个新的命题。这种命题称为**复合命题**或**分子命题**。例如,

P:今天下午有篮球比赛

Q:北京是中国的首都

利用逻辑联结词——否定、合取、析取、单条件和双条件等,可以分别构成新的命题如下。

$\neg P$:今天下午没有篮球比赛

$P\wedge Q$:今天下午有篮球比赛,并且北京是中国的首都

$P\rightarrow Q$:如果今天下午有篮球比赛,那么北京是中国的首都

$P\leftrightarrow Q$:今天下午有篮球比赛,当且仅当北京是中国的首都

在代数式 $x+y$ 中,x 和 y 称为运算对象,$+$ 称作运算符,$x+y$ 则表示运算结果。在命题演算中,也有同样的术语,联结词就是命题演算中的运算符,称为**逻辑运算符**或**逻辑联结词**。逻辑联结词和复合命题密切相关。下面给出 6 个常用的逻辑联结词的定义和符号表示。

1. 逻辑联结词否定——"¬"

设 P 是一个命题,则 P 的否定是一个新的命题,记作"$\neg P$",读作"非 P"。其真值是这样定义的,若 P 的真值是 T,那么 $\neg P$ 的真值是 F;若 P 的真值是 F,则 $\neg P$ 的真值是 T。命题 P 与其否定 $\neg P$ 的关系如表 1-1 所示,它指明如何用运算对象的真值来决定一个应用运算符(即逻辑联结词)的命题的真值。这样的表称为**真值表**。利用真值表可以求出任一复合命题的真值,并判断两个复合命题是否等价,以及一个命题是否是某些命题的逻辑结果等,这种方法称为**真值表技术**。

表 1-1 逻辑联结词"¬"的定义

P	$\neg P$		P	$\neg P$
F	T	或	0	1
T	F		1	0

真值表的左边列出运算对象真值所有可能的组合,结果命题的真值在最右边的一列给出。

例 1.2.3

(1)令 P:所有的素数都是奇数。于是 $\neg P$:并非所有的素数都是奇数。

注意 翻译成"所有的素数都不是奇数"是错误的。这是因为否定是对整个命题进行的。

(2)令 Q:大连是座海滨城市。于是 $\neg P$:大连不是座海滨城市。

逻辑联结词否定是一元运算符。

2. 逻辑联结词合取——“∧”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，那么“P 合取 Q”是一个命题，记作“$P \wedge Q$”，读作“P 与 Q”或“P 并且 Q”。它的真值是这样定义的：当且仅当 P 和 Q 的真值都为 T 时，$P \wedge Q$ 的真值才为 T，否则，$P \wedge Q$ 的真值为 F。逻辑联结词“∧”的定义如表 1-2 所示。

表 1-2 逻辑联结词“∧”的定义

P	Q	$P \wedge Q$		P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.2.4 令 P：今天有雨。

令 Q：王平是三好学生。

于是 $P \wedge Q$：今天有雨并且王平是三好学生。

在自然语言中，上述命题是没有意义的，因为 P 和 Q 毫不相关。但是，在数理逻辑中，P 和 Q 的合取 $P \wedge Q$ 仍可成为一个新的命题。只要 P 和 Q 的真值给定，$P \wedge Q$ 的真值即可确定。

逻辑联结词“∧”是二元运算符。

3. 逻辑联结词析取——“∨”

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，于是“P 析取 Q”是一个新的命题，记作“$P \vee Q$”，读作“P 或 Q”或“P 析取 Q”。其真值是这样的定义的：当且仅当 P 和 Q 的真值均为 F 时，$P \vee Q$ 的真值为 F，其余情况均为 T。逻辑联结词“∨”的真值表如表 1-3 所示。

表 1-3 逻辑联结词“∨”的定义

P	Q	$P \vee Q$		P	Q	$P \vee Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	T		1	1	1

从析取的定义不难看出，逻辑联结词“∨”和自然汉语中的“或”的意义并不完全相同。因为汉语中的“或”可表示“排斥或”，也可表示“可兼或”，而逻辑联结词析取指的仅仅是“可兼或”，并不表示其他意义的“或”。

例 1.2.5 令 P：大连电视台第三套节目今晚七点播放电视剧。

令 Q：大连电视台第三套节目今晚七点播放女排比赛。

于是命题“大连电视台第三套节目今晚七点播放电视剧或播放女排比赛”不能用 $P \vee Q$ 来表示。因为这里自然语言陈述的或是排斥或，这种意义的或我们用另一个逻辑联结词“异或”（“$\overline{\vee}$”）来表示，后面我们将给出它的定义。

例 1.2.6 令 P：张亮是跳高运动员。

令 Q：张亮是跳远运动员。

于是命题“张亮可能是跳高或跳远运动员”就可以用 $P \vee Q$ 来表示，因为这里的或是可兼或。

逻辑联结词析取也是二元运算符。

4. 逻辑联结词单条件——"$\rightarrow$"

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，那么"如果 P 则 Q"是一个新的命题，记作"$P\rightarrow Q$"，读作"如果 P 则 Q"或"如果 P 那么 Q"。其中 P 称为**前件**，Q 称为**后件**。$P\rightarrow Q$ 的真值是这样定义的：当且仅当 $P\rightarrow Q$ 的前件 P 的真值为 T，后件 Q 的真值为 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值为 F，否则，$P\rightarrow Q$ 的真值为 T。单条件逻辑联结词"$\rightarrow$"的真值表如表 1-4 所示。

表 1-4 逻辑联结词"$\rightarrow$"的定义

P	Q	$P\rightarrow Q$		P	Q	$P\rightarrow Q$
F	F	T		0	0	1
F	T	T	或	0	1	1
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.2.7

(1) 令 P：天不下雨。

令 Q：草木枯黄。

于是 $P\rightarrow Q$：如果天不下雨，则草木枯黄。

(2) 令 R：他学习用功。

令 S：他成绩优秀。

于是 $R\rightarrow S$：如果他学习用功，那么他成绩优秀。

(3) 令 U：大海的颜色是蓝色的。

令 V：李老师是大学教授。

于是 $U\rightarrow V$：如果大海的颜色是蓝色的，那么李老师是大学教授。

此例中(1)和(2)是有因果关系的，而(3)在自然语言中是毫无道理的，是风马牛不相及的事情。但在命题演算中，一个单条件逻辑联结词的前件并不需要联系到它的后件，它给出的是一种实质性的因果关系，而不单单是形式上的因果关系。也就是说，只要前件 P 和后件 Q 的真值确定下来，命题 $P\rightarrow Q$ 的真值就可以确定。

逻辑联结词单条件是二元运算符。

5. 逻辑联结词双条件——"$\leftrightarrow$"

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，于是，"P 等值于 Q"是一个新的命题，记作"$P\leftrightarrow Q$"，读作"P 当且仅当 Q"或"P 等值于 Q"。$P\leftrightarrow Q$ 的真值是这样定义的：当且仅当 P 和 Q 有相同的真值时，$P\leftrightarrow Q$ 的真值为 T，否则，$P\leftrightarrow Q$ 的真值为 F。$P\leftrightarrow Q$ 的真值表如表 1-5 所示。

表 1-5 逻辑联结词"$\leftrightarrow$"的定义

P	Q	$P\leftrightarrow Q$		P	Q	$P\leftrightarrow Q$
F	F	T		0	0	1
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.2.8

(1) 程序是错的，当且仅当苹果是红的。

(2) 电灯不亮，当且仅当灯泡发生故障或开关发生故障。

(3)王宏是三好学生,当且仅当他德、智、体全优。

令P:程序是错的。

Q:苹果是红的。

于是(1)可表示为:$P \leftrightarrow Q$。

令R:电灯不亮。

S:灯泡发生故障。

T:开关发生故障。

于是(2)可表示成:$R \leftrightarrow (S \vee T)$。

令A:王宏是三好学生。

B:王宏德育是优。

C:王宏体育是优。

D:王宏智商是优。

于是(3)可表示为:$A \leftrightarrow (B \wedge D \wedge C)$。

从上面的例子可以看出,等值式也和前面的逻辑联结词$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$一样可以毫无因果关系,而其真值仅仅从等值的定义而确定。

逻辑联结词双条件也是二元运算符。

6. 逻辑联结词异或——“∇”

设P是一个命题,Q是一个命题,于是“P异或Q”是一个新的命题,记作“$P \nabla Q$”,读作“P异或Q”。其真值是这样定义的:当且仅当P和Q有不同的真值时,$P \nabla Q$的真值为T,否则,$P \nabla Q$的真值为F。$P \nabla Q$的真值表如表1-6所示。

表1-6 逻辑联结词“∇”的定义

P	Q	$P \nabla Q$		P	Q	$P \nabla Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	F		1	1	0

例1.2.9

令P:大连电视台三套节目今晚八点播放电视剧。

令Q:大连电视台三套节目今晚八点播放女排比赛。

于是$P \nabla Q$:大连电视台三套节目今晚八时播放电视剧或播放女排比赛。

从逻辑联结词“∇”的定义和逻辑联结词“$\leftrightarrow$”的定义不难看出,它们之间有如下的关系:

$$P \nabla Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$$

也就是说,逻辑联结词异或可以用双条件逻辑联结词及逻辑联结词否定来代替。

以上我们介绍了五个基本的逻辑联结词:$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$。它们运算的优先级为:$\neg$优先级最高,其次是$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$。如果有括号,则括号优先,在括号里从左往右依然遵守这个顺序。

习题

1. 给出下列命题的否定命题:

   (1)大连的每条街道都临海。

   (2)每一个素数都是奇数。

2. 对下述命题用中文写出语句:

   (1) $(\neg P\wedge R)\to Q$

   (2) $Q\wedge R$

3. 给定命题 $P\to Q$,我们把 $Q\to P$、$\neg P\to\neg Q$、$\neg Q\to\neg P$ 分别称为命题 $P\to Q$ 的逆命题、反命题、逆反命题。给出下列命题的逆命题、反命题和逆反命题。

   (1)如果天不下雨,我将去公园。

   (2)仅当你去我才逗留。

   (3)如果 n 是大于2的正整数,那么方程 $x^n+y^n=z^n$ 无整数解。

   (4)如果我不获得更多的帮助,那么我不能完成这项任务。

4. 给 P 和 Q 指派真值 T,给 R 和 S 指派真值 F,求出下列命题的真值。

   (1) $(\neg(P\wedge Q\vee\neg R)\vee((Q\leftrightarrow\neg P)\to(R\vee\neg S)))$

   (2) $Q\wedge(P\to Q)\to P$

   (3) $(P\vee(Q\to(R\wedge\neg P)))\leftrightarrow(Q\vee\neg S)$

   (4) $(P\to R)\wedge(\neg Q\to S)$

5. 构成下列公式的真值表:

   (1)$Q\wedge(P\to Q)\to P$

   (2) $\neg(P\vee Q\wedge R)\leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

   (3)$(P\vee Q\to Q\wedge P)\to P\wedge\neg R$

   (4)$\neg(P\to P\wedge\neg Q\to R)\wedge Q\vee\neg R$

6. 使用真值表证明:如果 $P\leftrightarrow Q$ 为 T,那么 $P\to Q$ 和 $Q\to P$ 都为 T,反之亦然。

7. 使用真值表证明:对于 P 和 Q 的所有值,$P\to Q$ 与 $\neg P\vee Q$ 有同样的真值。

8. 一个有两个运算对象的逻辑运算符,如果颠倒其运算对象的次序,产生一逻辑等价命题,则称此逻辑运算符是**可交换的**。

   (1)确定所给出的逻辑运算符哪些是可交换的:$\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$。

   (2)用真值表证明你的判断。

9. 设 $*$ 是具有两个运算对象的逻辑运算符,如果 $(x*y)*z$ 和 $x*(y*z)$ 逻辑等价,那么运算符 $*$ 是可结合的。

   (1)确定逻辑运算符 $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ 哪些是可结合的?

   (2)用真值表证明你的判断。

10. 令 P 表示命题“苹果是甜的”,Q 表示命题“苹果是红的”,R 表示命题“我买苹果”。试将下列命题符号化:

    (1)如果苹果甜而红,那么我买苹果。

    (2)苹果是酸的。

    (3)我没买苹果,因为苹果不红也不甜。

1.3 命题变元和合式的公式

在上一节中我们曾指出,不可再分的命题称为原子命题。换句话说,不包含任何逻辑联结词的命题称为原子命题。应该指出的是,这里所说的原子命题,是指其中的原子是有了确定的

真值的;否则,原子没有确定的真值指派,而其原子的取值是在{T,F}这个域上的,则称此原子为**命题变元**。由命题变元、逻辑联结词及圆括号可以构成合式公式。下面给出命题演算中合式公式的递归定义。

(1)单个命题变元是合式公式。

(2)如果 A 是合式公式,那么 $\neg A$ 是合式公式。

(3)如果 A 和 B 均是合式公式,那么 $(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$ 和 $(A\leftrightarrow B)$ 都是合式公式。

(4)当且仅当有限次地应用(1)、(2)和(3),由逻辑联结词、圆括号所组成的有意义的符号串是合式公式。

以上定义方法称为**递归定义法**。其中(1)称为**递归定义的基础**,(2)和(3)称为**递归定义的归纳**,(4)称为**递归定义的界限**。

今后我们还会经常使用这种递归定义的方法。

按照上面的定义,下面的字符串都是合式公式:

(1)$\neg(P\wedge Q)$

(2)$\neg(P\rightarrow Q)$

(3)$(P\rightarrow(P\wedge\neg Q))$

(4)$((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\leftrightarrow(S\leftrightarrow T)$

下面的字符串则不是合式公式:

(1)$(P\rightarrow Q)\rightarrow(\wedge Q)$

(2)$(P\rightarrow Q$

(3)$(P\wedge Q)\rightarrow Q)$

今后,我们把合式公式简称为命题公式。一般一个命题公式的真值是不确定的,只有当用确定的命题去取代命题公式中的命题变元,或对其中的命题变元进行真值指派时,命题公式才成为具有确定真值的命题。

给定两个命题公式,若对其中变元的所有可能的真值指派两个命题公式具有相同的真值,则称它们是相互等价的。可以利用真值表技术来判定两个命题公式的等价性。

例 1.3.1

(1)给出命题公式 $\neg((P\vee Q)\wedge P)$ 的真值表。

(2)使用真值表技术证明:命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 与 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$ 是相互等价的。

解 构造(1)的真值表如表 1-7 所示。

表 1-7

P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

对于(2)构造真值表,如表 1-8 所示。

表 1-8

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

从真值表可以清楚地看出，命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 与 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$ 对于变元 P 和 Q 的各种真值指派，它们的真值表完全一致。所以它们是相互等价的。

1.4 重言式(或永真式)和永真蕴涵式

1.4.1 有关重言式的讨论

通过前面对命题公式真值表的讨论，可以清楚地看出，对于命题公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ $(n\geqslant 1)$，命题变元的真值有 2^n 种不同的组合。每一种组合称为一种真值指派，也就是说，命题公式含有 n 个变元时有 2^n 种真值指派。而对应于每一组真值指派，命题公式将有一个确定的值，从而使命题公式成为具有确定真值的命题。

例 1.4.1 给出命题公式 $P\vee\neg P$、$P\wedge\neg P$ 与 $P\rightarrow Q$ 的真值表。

解 三个命题公式的真值表如表 1-9 所示。

表 1-9

P	$P\vee\neg P$	$P\wedge\neg P$	P	Q	$P\rightarrow Q$
0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1
			1	0	0
			1	1	1

在例 1.4.1 中，命题公式 $P\vee\neg P$ 和 $P\wedge\neg P$，虽然都仅含一个命题变元，都有两组真值指派，但是对应于每一组真值指派，命题公式 $P\vee\neg P$ 均取值为 1(即 T)，而命题公式 $P\wedge\neg P$ 却取值为 0(即 F)。之所以有这样的结果是因为这些命题公式的真值与其变元的真值指派无关，而根本问题在于它们的自身结构。命题公式 $P\rightarrow Q$ 含有两个命题变元，有 4 组真值指派。对于第 1、第 2 和第 4 这三组真值指派，公式取值为 1(即 T)；而对于第 3 组真值指派，公式却取值为 0(即 F)。

通过上面对有关公式真值表的讨论，我们总结出如下的定义，即 1.4.2 节中给出的诸概念。

1.4.2 重言式与恒等式

不依赖于命题变元的真值指派，而总是取值为 T(即 1)的命题公式，称为**重言式**或**永真式**。

不依赖于命题变元的真值指派，而总是取值为 F(即 0)的命题公式，称为**永假式**或**矛盾式**。

至少存在一组真值指派使命题公式取值为 T 的命题公式,称为**可满足的**。

在有限步内判定一个命题公式是永真式、永假式或是可满足的问题称为命题公式的判定问题。我们主要研究重言式,因为它最有用。重言式有以下特点:

(1)重言式的否定是一个矛盾式,一个矛盾式的否定是重言式,所以只研究其中之一即可。

(2)重言式的析取、合取、单条件和双条件都是重言式。于是可由简单的重言式推出复杂的重言式。

(3)由重言式可以产生许多有用的恒等式。

设 $A:A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 和 $B:B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 是两个命题公式,这里 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不一定在两个公式中同时出现。

如果 $A\leftrightarrow B$ 是重言式,即 A 与 B 对命题变元的任何真值指派都有相同的真值,则称 A 和 B 是**逻辑恒等式**(或称为等价式),记作"$A\Leftrightarrow B$",读作"A 恒等于 B",或"A 等价于 B"。

注意:符号"$\leftrightarrow$"与符号"$\Leftrightarrow$"的意义是有区别的。符号"$\leftrightarrow$"是逻辑联结词,是运算符;而符号"$\Leftrightarrow$"是关系符,$A\Leftrightarrow B$ 表示 A 和 B 有逻辑等价关系。

常用的逻辑恒等式如表 1-10 所示。

表 1-10 常用逻辑恒等式

$$\left.\begin{array}{ll} E_1 & P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P \\ E_2 & P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P \\ E_3 & P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow Q\leftrightarrow P \end{array}\right\}\text{交换律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} E_4 & (P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R) \\ E_5 & (P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R) \\ E_6 & (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R\Leftrightarrow P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \end{array}\right\}\text{结合律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} E_7 & P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R) \\ E_8 & P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R) \\ E_9 & P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R) \end{array}\right\}\text{分配律}$$

E_{10} $\neg\neg P\Leftrightarrow P$ 双重否定律

$$\left.\begin{array}{ll} E_{11} & \neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q \\ E_{12} & \neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q \end{array}\right\}\text{德・摩根律}$$

E_{13} $\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\overline{\vee}Q$

E_{14} $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$ 逆反律

E_{15} $\neg P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$

$$\left.\begin{array}{ll} E_{16} & P\wedge P\Leftrightarrow P \\ E_{17} & P\vee P\Leftrightarrow P \end{array}\right\}\text{等幂律}$$

E_{18} $P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$

E_{19} $P\vee\neg P\Leftrightarrow T$

E_{20} $P\wedge T\Leftrightarrow P$

E_{21} $P\wedge F\Leftrightarrow F$

E_{22} $P\vee T\Leftrightarrow T$

E_{23} $P\vee F\Leftrightarrow P$