

X I I N K E B I I A O 配普通高中课程标准实验教科书
CHUGAOZHONG XIANJIE JIAOCHENG

新课标

初高中 衔接教程

数学

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社

新课标

初高中衔接教程

CHUGAOZHONG XIANJIE JIAOCHENG

赢在起点——高中新课标轻松入门

书 名	定 价
新课标初高中衔接教程·数学	10.00
新课标初高中衔接教程·语文	15.00
新课标初高中衔接教程·英语	15.00
新课标初高中衔接教程·物理	10.00
新课标初高中衔接教程·化学	10.00

- 全省各大新华书店有售。邮购请支付挂号费 3 元。
- 邮购电话 025-85406265
- 邮购短信 10602585420909

ISBN 978-7-5343-7393-0



9 787534 373930 >

定价：10.00元

XI IN KE B I A O 配普通高中课程标准实验教科书
CHUGAOZHONG XIANJIE JIAOCHENG

新课标

初高中 衔接教程

主 编 李 迅

执行主编 李必成 陈德燕

编 写 (按姓氏笔划顺序排)

丘远青 陈 颖 陈德燕

李 迅 李必成 苏 健

卓道章 倪立志

数学

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

新课标初高中衔接教程. 数学/《新课标初高中衔接教程》编写组编著. —2版. —南京:江苏教育出版社,2007.4
ISBN 978-7-5343-7393-0

I. 新… II. 新… III. 数学课—初中—升学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第043134号

书 名 新课标初高中衔接教程·数学
责任编辑 杨新华
出版发行 凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社(南京市马家街31号 邮编210009)
网 址 <http://www.1088.com.cn>
集团网址 凤凰出版传媒网 <http://www.ppm.cn>
经 销 江苏省新华发行集团有限公司
照 排 南京理工出版信息技术有限公司
印 刷 江苏新华印刷厂
厂 址 南京市张王庙88号(邮编210037)
电 话 025-85521756
开 本 787×1092毫米 1/16
印 张 6.75
版 次 2007年4月第2版
2007年4月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5343-7393-0/G·7078
定 价 10.00元
批发电话 025-83260760,83260768
邮购电话 025-85400774,8008289797
短信咨询 10602585420909
E-mail jsep@vip.163.com
盗版举报 025-83204538

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
提供盗版线索者给予重奖

编 说

近年全国各地已全面进入义务教育阶段初中数学新课程教学改革实验,高中阶段数学新课程教学实验也在逐步进入,为保证高中数学新课程的教学实验能顺利进行,使初中毕业生能完成进入到高中学习的新跨越,安排好初、高中数学课程的衔接至关重要.本书将为刚升入高中的学生构建一个平台,使同学们能脚踏实地跨上一个新台阶.从知识准备到数学思想方法的养成,从数学能力的提高到创新精神的培养,逐步认识新课程的新理念,尽快适应高中的学习.

本教程的撰写坚持三条原则:(1)不脱高初中新课程,不超越初中已掌握的基础知识、基本技能及基本数学思想方法;(2)选择学习高中新课程必备的知识与方法,体现新课程的基本理念,对于在初中学习中有所欠缺的相关内容,进行拾遗补缺与梳理;(3)选材精练,使读者用最少的时间收到最好的效果.

按照上述原则,全书内容包括九讲及三个阅读材料.九讲所展示的知识与方法都是学习高中新课程不可或缺的,每讲可用一至两课时来学习.三个阅读材料可在课外学习中进行研讨,进一步激发学生对数学的兴趣,掌握数学的基本思想方法,有助于学习高中数学新课程.

本衔接教程可供升入高中的新生在课程起始阶段学习使用,也可在学习高中新课程过程中选择穿插使用,还可以作为初中毕业班学生的补充读物和辅导用书.

编者

2007年5月

目 录

第一讲 数与式的运算

知识篇 1

一、乘法公式 /1

二、根式 /2

三、分式 /4

练习 /5

拓展篇 6

第二讲 因式分解

知识篇 8

一、运用乘法公式法(立方和及立方差公式) /8

二、分组分解法 /9

三、十字相乘法 /10

四、配方法 /12

练习 /13

拓展篇 14

第三讲 一元二次方程的根与系数的关系

知识篇 16

一、一元二次方程的根的判别式 /16

二、一元二次方程的根与系数的关系 /18

练习 /19

拓展篇 20

第四讲 不等式

知识篇 24

一、一元二次不等式及其解法 /24

- 二、简单分式不等式的解法 /26
- 三、含有字母系数的一元一次不等式 /28
- 练习 /28

拓展篇 29

第五讲 二次函数的最值问题

知识篇 31

- 一、求一元二次函数的最值 /31
- 二、一元二次函数最值的应用 /33
- 练习 /35

拓展篇 36

第六讲 简单的二元二次方程组

知识篇 39

- 一、由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组 /39
- 二、由两个二元二次方程组成的方程组 /40
- 练习 /43

拓展篇 44

第七讲 分式方程和无理方程的解法

知识篇 48

- 一、可化为一元二次方程的分式方程 /48
- 二、可化为一元二次方程的无理方程 /51
- 练习 /53

拓展篇 55

第八讲 三角形的重心、垂心、外心和内心

知识篇 55

- 一、三角形的重心 /56
- 二、三角形的垂心 /58

三、三角形的外心 /59

四、三角形的内心 /60

练习 /61

拓展篇 62

第九讲 正多边形与圆

知识篇 64

一、圆与圆的内接正多边形的关系 /64

二、圆与圆的外切正多边形的关系 /65

三、圆与正多边形的综合问题 /66

练习 /67

拓展篇 68

阅读材料1 整数的基本性质

一、整数的整除性和带余除法 /71

二、最大公约数与最小公倍数 /73

三、末位数问题 /74

四、整数的分类 /75

练习 /75

阅读材料2 数形结合解题思想

一、以形助数 /76

二、以数解形 /80

练习 /81

阅读材料3 平面几何有关的定理与性质

一、与比例线段有关的定理 /83

二、与圆有关的定理 /86

三、对称问题及其应用 /89

练习 /90

参考答案 92

第一讲 数与式的运算

在初中,我们已学过了实数,并且知道用字母可以表示数,用代数式也可以表示数,我们把实数与代数式简称为数与式.代数式中有整式(包括多项式与单项式)、分式、根式.它们具有实数的属性,可以进行运算.在多项式的乘法运算中,我们学习了乘法公式(平方差公式与完全平方公式),并且知道乘法公式可以使多项式的运算简便,由于在高中学习中还会遇到更复杂的多项式乘法运算:比如 $(a+b) \cdot (a^2-ab+b^2)$ 、 $(a-b) \cdot (a^2+ab+b^2)$ 、 $(a+b+c)^2$ 等.因此本节中我们将拓展乘法公式的内容,补充三个数和的完全平方公式以及立方和、立方差公式.在根式的运算中,我们已学过被开方数是实数的根式运算,而在高中数学学习中,经常会接触到被开方数是字母的情形,但在初中却没有涉及,因此本节中要补充.

(一) 知 识 篇

一、乘法公式

公式 1 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

证明 $\because (a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca, \therefore$ 等式成立.

说明 请同学们用文字语言表述公式 1.

例 1 计算: $(x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{3})^2$.

解 原式 $= [x^2 + (-\sqrt{2}x) + \frac{1}{3}]^2 = (x^2)^2 + (-\sqrt{2}x)^2 + (\frac{1}{3})^2 + 2x^2(-\sqrt{2}x) + 2(-\sqrt{2}x) \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} \times x^2 = x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{9}$.

说明 多项式乘法的结果一般是按某个字母的降幂或升幂排列.

公式 2 $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

证明 $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.

公式 2 称为立方和公式.

说明 请同学们用文字语言表述公式 2.

例 2 计算 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

解 原式 $= [a+(-b)][a^2-a(-b)+(-b)^2] = a^3 + (-b)^3 = a^3 - b^3$.

我们得到:

公式 3 $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

公式3称为立方差公式.请读者观察立方和、立方差公式的区别与联系,公式1、2、3均称为乘法公式.

例3 计算:

$$(1) (4+m)(16-4m+m^2); \quad (2) \left(\frac{1}{5}m - \frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{25}m^2 + \frac{1}{10}mn + \frac{1}{4}n^2\right);$$

$$(3) (a+2)(a-2)(a^4+4a^2+16); \quad (4) (x^2+2xy+y^2)(x^2-xy+y^2)^2.$$

解 (1) 原式 $= 4^3 + m^3 = 64 + m^3$;

$$(2) \text{原式} = \left(\frac{1}{5}m\right)^3 - \left(\frac{1}{2}n\right)^3 = \frac{1}{125}m^3 - \frac{1}{8}n^3;$$

$$(3) \text{原式} = (a^2-4)(a^4+4a^2+4^2) = (a^2)^3 - 4^3 = a^6 - 64;$$

$$(4) \text{原式} = (x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2 = [(x+y)(x^2-xy+y^2)]^2 = (x^3+y^3)^2 = x^6 + 2x^3y^3 + y^6.$$

说明 (1) 在进行代数式的乘法、除法运算时,要观察代数式的结构是否满足乘法公式的结构.

(2) 为了更好地使用乘法公式,记住1, 2, 3, 4, ..., 20的平方数与1, 2, ..., 10的立方数,是非常有好处的.

例4 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 求 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 的值.

解 $\because x^2 - 3x + 1 = 0, \therefore x \neq 0, \therefore x + \frac{1}{x} = 3.$

$$\text{原式} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left[x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right] = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\right] = 3(3^2 - 3) = 18.$$

说明 本题若先从方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 中解出 x 的值后,再代入代数式求值,则计算较繁琐.本题是根据条件式与求值式的联系,用整体代换的方法计算,简化了计算.请注意整体代换法.

例5 已知 $a+b+c=4, ab+bc+ac=4$, 求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

解 $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 8.$

说明 $a+b+c, ab+bc+ac$ 与 $a^2+b^2+c^2$ 之间有联系,要懂得把“公式1”变形着用.

二、根式

式子 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 叫做二次根式,二次根式有下列性质:

$$(1) (\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0); \quad (2) \sqrt{a^2} = |a|;$$

$$(3) \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0); \quad (4) \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad (a > 0, b \geq 0).$$

例6 化简下列各式:

$$(1) \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}; \quad (2) \sqrt{(1-x)^2} + \sqrt{(2-x)^2} \quad (x \geq 1).$$

解 (1) 原式 $= |\sqrt{3}-2| + |\sqrt{3}-1| = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1.$

$$(2) \text{原式} = |x-1| + |x-2|.$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时, 原式} = x-1+2-x = 1;$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } x > 2 \text{ 时, 原式} = x-1+x-2 = 2x-3.$$

说明 注意性质 $\sqrt{a^2} = |a|$ 的使用;化简绝对值中含有字母的式子时,要注意绝对值符

号内式子的等号(即正、负性).

例7 计算(没有特殊说明,本节中出现的字母均为正数):

$$(1) \frac{3}{2+\sqrt{3}}; \quad (2) \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}};$$

$$(3) 2\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{x^3} + \sqrt{8x}.$$

$$\text{解} \quad (1) \text{原式} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{6-3\sqrt{3}}{2^2-3} = 6-3\sqrt{3};$$

$$(2) \text{原式} = \sqrt{\frac{a+b}{ab}} = \frac{\sqrt{a^2b+b^2a}}{ab};$$

$$(3) \text{原式} = 2\sqrt{\frac{2x}{2 \times 2}} - \sqrt{x \cdot x^2} + \sqrt{2 \times 2^2 \times x} = \sqrt{2x} - x\sqrt{x} + 2\sqrt{2x} = 3\sqrt{2x} - x\sqrt{x}.$$

说明 (1) 二次根式的化简结果应满足:①被开方数的因数是整数、因式是整式;②被开方数中各项的次数不高于1.

(2) 二次根式的化简常见类型有下列两种:①被开方数是整数或整式,化简时,先将它分解因数或因式,然后把开得尽方的因数或因式开出来;②分母中有根式(如 $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$)或被开方数有分母(如 $\sqrt{\frac{x}{2}}$).当被开方数中有分母时,可化为 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 形式[如 $\sqrt{\frac{x}{2}}$ 可化为 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$],转化为“分母中有根式”情况.化简时,要把分母中的根式化为有理式,因此我们采用分子、分母同乘以一个根式进行化简.如 $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$ 化为 $\frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$, $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$ 化为 $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$.我们把 $2+\sqrt{3}$ 与 $2-\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}$ 叫做互为有理化因式.

例8 计算:

$$(1) (\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1)(1 - \sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2; \quad (2) \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab}}.$$

$$\text{解} \quad (1) \text{原式} = (1 + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2 - (a + 2\sqrt{ab} + b) = -2a - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{b} + 1;$$

$$(2) \text{原式} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ = \frac{2\sqrt{a}}{a-b}.$$

说明 有理数的加法、乘法的运算律,以及多项式的乘法公式、分式的运算法则都适用于二次根式的运算.

例9 设 $x = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$, $y = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, 求 $x^3 + y^3$ 的值.

$$\text{解} \quad x = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 7 + 4\sqrt{3}, \quad y = 7 - 4\sqrt{3}, \quad \therefore x + y = 14, \quad xy = 1.$$

$$\text{原式} = (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] = 14[14^2 - 3] = 2702.$$

说明 有关代数式的求值问题:(1)要注意已知条件与所求值的代数式的关系,先化简后

求值；(2)当直接代入运算较复杂时，可根据结论式的结构特点，倒推几步，再代入条件，有时整体代入可简化计算量。

三、分式

形如 $\frac{A}{B}$ 的式子，若 B 中含有字母，且 $B \neq 0$ ，则称 $\frac{A}{B}$ 为分式。当 $m \neq 0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 具有下列性质：(1) $\frac{A}{B} = \frac{A \times m}{B \times m}$ ；(2) $\frac{A}{B} = \frac{A \div m}{B \div m}$ 。上述性质被称为分式的基本性质。

例10 化简 $\frac{x^2+3x+9}{x^3-27} + \frac{6x}{9x-x^3} - \frac{x-1}{6+2x}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \frac{x^2+3x+9}{(x-3)(x^2+3x+9)} + \frac{6x}{x(9-x^2)} - \frac{x-1}{2(x+3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{6}{(x+3)(x-3)} \\ &- \frac{x-1}{2(x+3)} = \frac{2(x+3)-12-(x-1)(x-3)}{2(x+3)(x-3)} = \frac{-(x-3)^2}{2(x+3)(x-3)} = \frac{3-x}{2(x+3)}. \end{aligned}$$

说明 (1)分式的乘除运算一般化为乘法进行，当分子、分母为多项式时，应先因式分解，再进行约分化简；(2)分式的计算结果应是最简分式或整式。

例11 已知 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ， $R_1 \neq R$ ，试写出用 R_1 、 R 表示 R_2 的公式。

解法一 去分母得 $R_1R_2 = RR_2 + RR_1$ ， $R_2(R_1 - R) = RR_1$ 。∵ $R_1 \neq R$ ，∴ $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$ 。

解法二 原等式化为 $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}$ ，∴ $\frac{1}{R_2} = \frac{R_1 - R}{RR_1}$ 。∵ $R_1 \neq R$ ，∴ $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$ 。

说明 公式变形是分式基本运算的应用，属于解字母系数的方程问题。公式变形在数学、物理、化学的学习中经常会涉及。

例12 商店糖果柜经过一段时间的观察，发现将一些糖果适当搭配、混合后销售，销路较好，所以准备将单价为 a 元/千克和单价为 b 元/千克的两种糖果混合在一起，按 $\frac{a+b}{2}$ 元/千克的单价出售。在如何混合时，营业员小蒋和小赵发生了争论：小蒋准备将总售价相同的两类糖果混合在一起，小赵主张将总质量相同的两类糖果混合在一起，那么该听谁的呢？哪种获利较多？

解 按照小蒋的方案，设两类糖果的总售价均为 P 元，则混合后的实际单价是 $\frac{2P}{\frac{P}{a} + \frac{P}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ (元/千克)；按照小赵的方案，设两类糖果的总质量都是 M 千克，则混合后的实际价格为 $\frac{aM + bM}{2M} = \frac{a+b}{2}$ (元/千克)，与计划的出售单价相同。∴ $\frac{2ab}{a+b} - \frac{a+b}{2} = \frac{4ab - (a+b)^2}{2(a+b)}$ $= \frac{-(a-b)^2}{2(a+b)} \leq 0$ ，于是：(1)当 $a = b$ 时，两种方案获利相同，听谁的都可以；(2)当 $a \neq b$ 时， $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$ ，故按小蒋的方案获利较多，听小蒋的。

说明 (1)用字母表示数，是数学中常用的分析方法；(2)比较 A 、 B 两数的大小常用方法： $A - B > 0$ 时， $A > B$ ； $A - B = 0$ 时， $A = B$ ； $A - B < 0$ 时， $A < B$ 。

练习

A 组

1. 二次根式 $\sqrt{a^2} = -a$ 成立的条件是 ()
 A. $a > 0$ B. $a < 0$ C. $a \leq 0$ D. a 是任意实数

2. 若 $x < 3$, 则 $\sqrt{9-6x+x^2} - |x-6|$ 的值是 ()
 A. -3 B. 3 C. -9 D. 9

3. 数轴上有两点 A 、 B 分别表示实数 a 、 b , 则线段 AB 的长度是 ()
 A. $a-b$ B. $a+b$ C. $|a-b|$ D. $|a+b|$

4. 实数 a 、 b 在数轴上的位置如图所示, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a+b > a > b > a-b$
 B. $a > a+b > b > a-b$
 C. $a-b > a > b > a+b$
 D. $a-b > a > a+b > b$



(第4题)

5. 若 $\frac{2x-y}{x+y} = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{x}{y}$ 等于 ()

- A. 1 B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{6}{5}$

6. 填空:

(1) $(2+\sqrt{3})^{18}(2-\sqrt{3})^{10} = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 将下列式子化为最简二次根式:

(1) $\sqrt{12b}$; (2) $\sqrt{2x^6y} (x < 0)$; (3) $\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$.

8. 计算:

(1) $(x-3y-4z)^2$; (2) $(2a+1-b)^2 - (a-b)(a+2b)$;
 (3) $(a+b)(a^2-ab+b^2) - (a+b)^3$; (4) $(a-4b)\left(\frac{1}{4}a^2+4b^2+ab\right)$.

9. 化简(下列 a 的取值范围均使根式有意义):

(1) $\sqrt{-8a^3}$; (2) $a \times \sqrt{-\frac{1}{a}}$;
 (3) $\frac{\sqrt{4ab}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$; (4) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}-1}$.

10. 化简:

(1) $\frac{m}{3}\sqrt{9m} + 10m\sqrt{\frac{m}{25}} - 2m^2\sqrt{\frac{1}{m}}$; (2) $\sqrt{\frac{2x-2y}{x}} \div \sqrt{\frac{x-y}{2x^2y}} (x > y > 0)$.

11. 已知 $x+y=1$, 求 x^3+y^3+3xy 的值.

12. 观察下列分母有理化的计算:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} = \sqrt{2}-\sqrt{1}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \sqrt{4}-\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} = \sqrt{5}-\sqrt{4}, \dots$$

从计算结果中找出规律,并利用这一规律计算:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2006}} \right) (\sqrt{2007}+1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

13. 已知 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 的值.

14. 若 $\sqrt{(1-a)^2} + \sqrt{(1+a)^2} = 2$, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

B 组

1. 若 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$, 则 $\frac{3x+xy-3y}{x-xy-y}$ 的值为 (\quad)

A. $\frac{3}{5}$

B. $-\frac{3}{5}$

C. $-\frac{5}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

2. 计算:

(1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})$;

(2) $1 \div \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

3. 设 $x = \frac{1}{\sqrt{3}-2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$, 求代数式 $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ 的值.

4. 当 $3a^2+ab-2b^2=0$ ($a \neq 0, b \neq 0$), 求 $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} - \frac{a^2+b^2}{ab}$ 的值.

5. 设 x, y 是实数, 且 $xy=3$, 求 $x\sqrt{\frac{y}{x}} + y\sqrt{\frac{x}{y}}$ 的值.

6. 计算 $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$.

7. 化简或计算:

(1) $\left[\sqrt{18} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \right] \div \frac{\sqrt{3}}{3}$;

(2) $2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$;

(3) $\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{xy-y^2} - \frac{x+\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}$;

(4) $\left[\sqrt{a} + \frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right] \div \left(\frac{a}{\sqrt{ab}+b} + \frac{b}{\sqrt{ab}-a} - \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \right)$.

8. 小王的爸爸和小赵的爸爸正好是同事, 假日里两家一起驾车游玩, 回家时两车仍沿同一条路返回. 小王的爸爸表示在回程中一半的路程用 v_1 千米/时的速度行驶, 一半的路程用 v_2 千米/时的速度行驶, 小赵的爸爸表示在回程中一半的时间用 v_1 千米/时的速度行驶, 一半的时间用 v_2 千米/时的速度行驶. 若 $v_1 \neq v_2$, 请你预测谁先到家.

(二) 拓展篇

有的问题, 按常规的思路去解比较麻烦. 为了化繁为简, 减少计算量, 可以利用数与式的特点, 对其进行适当的变形, 这种变形其实是一种解题技巧, 下面举两个例子予以说明.

例 14 试比较下列两个数的大小： $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ 和 $\sqrt{11}-\sqrt{10}$.

$$\text{解} \quad \because \sqrt{12}-\sqrt{11} = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{11}}{1} = \frac{(\sqrt{12}-\sqrt{11})(\sqrt{12}+\sqrt{11})}{\sqrt{12}+\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}},$$

$$\sqrt{11}-\sqrt{10} = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{1} = \frac{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{\sqrt{11}+\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}},$$

又 $\sqrt{12}+\sqrt{11} > \sqrt{11}+\sqrt{10}$, $\therefore \sqrt{12}-\sqrt{11} < \sqrt{11}-\sqrt{10}$.

说明 比较两个无理数的大小的一般方法是：通过平方，把无理数化为有理数来比较大小. 但本题是巧妙地运用有理化知识，将分子有理化后，转化为比较分母的大小，计算量小，解法简捷.

例 15 已知 $a+b+c=0$ ，求 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 的值.

解 $\because a+b+c=0$, $\therefore a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$.

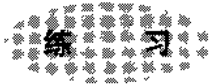
$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= a \cdot \frac{b+c}{bc} + b \cdot \frac{a+c}{ac} + c \cdot \frac{a+b}{ab} \\ &= \frac{a(-a)}{bc} + \frac{b(-b)}{ac} + \frac{c(-c)}{ab} = -\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \quad \text{①}. \end{aligned}$$

$$\because a^3+b^3 = (a+b)[(a+b)^2-3ab] = -c[c^2-3ab] = -c^3+3abc,$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3 = 3abc \quad \text{②}, \text{把②代入①式后, 得原式} = -\frac{3abc}{abc} = -3.$$

说明 注意字母的整体代换技巧的应用.

引申 同学们可以探求并证明： $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.



1. 比较大小： $2-\sqrt{3}$ _____ $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ (填“>”，或“<”).
2. 已知 $a = \frac{1}{20}x+20$, $b = \frac{1}{20}x+19$, $c = \frac{1}{20}x+21$ ，求代数式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ 的值.
3. 设 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，求 x^4+x^2+2x-1 的值.
4. 展开 $(x-2)^4$.
5. 计算 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

第二讲 因式分解

因式分解是代数式的一种重要的恒等变形,它与整式乘法是相反方向的变形.在分式运算、解方程及各种恒等变形中它都有着重要的作用.

因式分解的方法较多,除了初中教材中涉及到的提取公因式法和运用公式法(只讲平方差公式和完全平方公式)外,还有运用乘法公式法(立方和、立方差公式)、十字相乘法、分组分解法等.

因式分解的问题形式多样,富有综合性与灵活性,因此,因式分解也是一种重要的基本技能.

(一) 知 识 篇

一、运用乘法公式法(立方和及立方差公式)

在第一讲,我们已经学习了乘法公式中的立方和公式及立方差公式:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3; \text{ (立方和公式)}$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3. \text{ (立方差公式)}$$

由于多项式因式分解与整式乘法正好是互为逆变形,所以把整式乘法公式反过来写,我们就得到:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

这就是说,两个数的立方和(或者差),等于这两个数的和(或差)乘以它们的平方和与它们积的差(或者和).这两个公式分别就是立方和公式与立方差公式.运用这两个公式,可以把形式是立方和或立方差的多项式分解因式.

下面我们看几个利用立方和与立方差公式分解因式的例子.

例1 用立方和或立方差公式分解下列各多项式:

$$(1) 8 + x^3; \quad (2) 0.125 - 27b^3.$$

分析 (1)中, $8 = 2^3$; (2)中 $0.125 = (0.5)^3$, $27b^3 = (3b)^3$.

解 (1) $8 + x^3 = 2^3 + x^3 = (2+x)(4-2x+x^2)$.

$$\begin{aligned} (2) 0.125 - 27b^3 &= (0.5)^3 - (3b)^3 \\ &= (0.5 - 3b)[0.5^2 + 0.5 \times 3b + (3b)^2] \\ &= (0.5 - 3b)(0.25 + 1.5b + 9b^2). \end{aligned}$$

说明 (1)在运用立方和(或差)公式分解因式时,经常要逆用幂的运算法则,如 $8a^3b^3 = (2ab)^3$, 这里逆用公式 $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; (2)在运用立方和(或差)公式分解因式时,一定要弄准

因式中各项的符号.

例 2 分解因式:

$$(1) 3a^3b - 81b^4;$$

$$(2) a^7 - ab^6.$$

分析 (1)中多项式为两项式,观察有公因式 $3b$,应先提取公因式,再进一步分解;(2)中提取公因式 a 之后,括号内出现 $a^6 - b^6$,可看成 $(a^3)^2 - (b^3)^2$ 或 $(a^2)^3 - (b^2)^3$.

$$\text{解 } (1) 3a^3b - 81b^4 = 3b(a^3 - 27b^3) = 3b(a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2).$$

$$(2) a^7 - ab^6 = a(a^6 - b^6)$$

$$= a(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$$

$$= a(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a(a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

二、分组分解法

通过学习,我们已经知道,能够直接运用公式法分解的多项式,主要是二项式和三项式,对四项以上的多项式,如果不能直接用公式法分解,且无公因式可以提取,该怎么分解呢?如多项式 $ma + mb + na + nb$,这是四项式,无法用我们已经学过的几种方法来分解,但我们发现,这四项中,若把它们中的某两项为一组,可以分成两组,前2项为一组,并提出公因式 m ,后两项为另一组,可提取出公因式 n ,由于 $m(a + b)$ 与 $n(a + b)$,又有公因式 $a + b$,于是可提出 $a + b$,从而得到 $(a + b)(m + n)$ (还可以进行其他分组吗?).这种利用分组来分解因式的方法叫做**分组分解法**.分组分解法的关键在于如何分组.

1. 分组后能提取公因式

例 3 把 $2ax - 10ay + 5by - bx$ 分解因式.

分析 把这个多项式的四项按前两项与后两项分成两组,并使两项的项按 x 的降幂排列,然后从两组分别提出公因式 $2a$ 与 $-b$,这时另一个因式正好都是 $x - 5y$,这样就可继续提公因式.

$$\text{解 } 2ax - 10ay + 5by - bx = 2a(x - 5y) - b(x - 5y) = (x - 5y)(2a - b).$$

说明 用分组分解法时,一定要想想分组后能否继续完成因式分解,由此合理选择分组的方法.本题也可以将一、四项为一组,二、三项为一组,读者可以试一试.由此你能得到什么规律?

例 4 把 $ab(c^2 - d^2) - (a^2 - b^2)cd$ 分解因式.

分析 按照原先分组方式,无公因式可以提取,不能直接因式分解,需要把括号打开后重新分组,然后再分解因式.

$$\text{解 } ab(c^2 - d^2) - (a^2 - b^2)cd = abc^2 - abd^2 - a^2cd + b^2cd$$

$$= (abc^2 - a^2cd) + (b^2cd - abd^2)$$

$$= ac(bc - ad) + bd(bc - ad)$$

$$= (bc - ad)(ac + bd).$$

说明 本题还可以展开后按一、四项与二、三项分别为一组.

由例3、例4可以看出:分组时运用了加法结合律;而为了合理分组(能因式分解),我们先运用了加法交换律.分组后,为了提公因式,又运用了分配律.由此可以看出运算律在因式分解中所起的作用.

2. 分组后能直接运用公式

例 5 把 $x^2 - y^2 + ax + ay$ 分解因式.