应用数学译丛

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS
Computing and Modeling (Third Edition)

微分方程及边值问题：计算与建模

(美) C. Henry Edwards
David E. Penney 著

张 友 王立冬 袁学刚 译

www.tup.tsinghua.edu.cn

PEARSON Education

清华大学出版社

应用数学译丛

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS
Computing and Modeling (Third Edition)

微分方程及边值问题：计算与建模

（美）C. Henry Edwards
David E. Penney 著

张 友 王立冬 袁学刚 译

清华大学出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

微分方程及边值问题: 计算与建模/(美)爱德华兹(Edwards, C. H.),(美)彭尼(Penney, D. E.)著; 张友,王立冬,袁学刚译. —北京: 清华大学出版社, 2007.4

(应用数学译丛)

书名原文: Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling

ISBN 978-7-302-14246-1

Ⅰ. 微…　Ⅱ. ①爱… ②彭… ③张… ④王…　Ⅲ. ①微分方程 ②边值问题　Ⅳ. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 145020 号

责任编辑: 刘　颖　王海燕
责任校对: 赵丽敏
责任印制: 李红英
出版发行: 清华大学出版社　　**地　址**: 北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**: 100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机: 010-62770175　　**邮购热线**: 010-62786544
投稿咨询: 010-62772015　　**客户服务**: 010-62776969
印 刷 者: 清华大学印刷厂
装 订 者: 三河市金元印装有限公司
经　销: 全国新华书店
开　本: 185×230　**印　张**: 43　**字　数**: 886 千字
版　次: 2007 年 4 月第 1 版　　**印　次**: 2007 年 4 月第1 次印刷
印　数: 1~3000
定　价: 69.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话: (010)62770177 转 3103　　产品编号: 010549-01

译 者 序

微分方程与边值问题不但是数学专业的基础课，而且也是近代数学的一个十分重要的分支.微分方程无论是在工程技术、自动控制理论、物理等自然科学领域，还是在经济、金融、保险等社会科学领域中，都有着广泛的应用.因此，微分方程这门课程越来越被人们所重视.传统的微分方程课偏重自身的理论体系，强调微分方程的基本定义、定理及其证明，对微分方程的方法和应用重视不够.但互联网和计算机技术的迅速发展极大地改变了科学技术和社会生活面貌.在这样的形势下，数学也需要与时俱进.现有的微分方程课程体系，从内容到方法都需要进行改革，特别是如何把计算机技术应用到微分方程课程体系中，是微分方程课程体系改革的主流，要把握好这个主流，国际上的先进经验值得我们学习和借鉴.

这本教材从微分方程的基本概念讲起，然后分别介绍了常微分方程、常微分方程组和偏微分方程的初步理论.本书特点一是使用大量具有不同学科背景的实例，着重讲述它们在数学建模中的应用，二是介绍了如何使用计算机来求解微分方程.特别是很多章节后都专门安排了本章节的应用部分.介绍了 MATLAB，Mathematica 和 Maple 在微分方程中的应用.本书还精选了大量有趣的习题.我们相信，无论是学生还是研究人员，阅读这本教材后一定会被它的理论、广泛的应用材料和计算机技术的使用所吸引，并从中找到学习的乐趣.

基于国内很少使用图形计算器的实际情况，在此翻译版中删去了涉及图形计算器的应用和习题内容.另外，为了减少篇幅，在此中文版中略去了习题答案和索引，有需要的读者可参见影印版的相关内容，或与本书的责任编辑联系(liuy@tup. tsinghua. edu. cn).

在本书出版的过程中，我们得到了大连民族学院理学院和科技处领导的鼓励和支持，特别要感谢清华大学出版社的编辑，他们为本书的出版付出了艰辛的劳动，并提出了宝贵的意见.参加翻译工作的还有段晓东、李福霞、梁学忠、周庆健.由于译者水平和时间的限制，该译本存在不足之处，敬请广大读者批评指正.

译者

前　言

在过去一段时期，很多微分方程课程总是把重点放在微分方程的各种标准形式的形式解上，使用的方法看上去好像用归类系统求解技术的工具箱.学生在这些课程里主要是学习如何用某些特定的方法来求解特定的方程.而本书是在亲身体验的教学方法基础上的一个全新的课程.本课程更主要的是把重点放在概念和计算设计及其应用上，以使学生获得更直接和有效的解决相关问题的能力.

各种计算软件，例如 Maple，Mathematica 和 MATLAB，由于它们的实用性，在科学研究和工程中正成为微分方程计算中的主要方法，并促使了本书的形成.新的方法促使我们在学习重点上的改变，我们正从传统的手工方法改为现在的定性研究与计算机计算两种方法并用：

(1) 提供了一个更具实际应用的比较广的范围.

(2) 允许同时使用数值计算和图像可视化的方法来更好地理解概念.

(3) 鼓励在实践中对问题更深的思考和分析而不是解决标准教科书上的问题.

主要特点

本书的主要特色是以当前的微分方程课程为基础，通过对概念的领悟来讨论微分方程的传统核心技巧，并且帮助学生在以后的工作和研究中更有效地使用微分方程.

(1) 我们整理了那些很少使用的章节并增加了一些新的章节.加强了对方向场、解曲线、相位平面的描绘和动力学系统的核心技术及定性分析.并且我们在合适的地方综合使用了符号运算、图像法和数值运算这几种方法.在本书中的各种图形、例子、问题和应用中会始终贯穿一个全新的计算风格.本书中大约四分之一的例子都是全新的或新修改的.

(2) 本书在组织结构上更加重视微分方程的线性方程组部分，安排在本书的第 4，5 章中介绍(附带必要的线性代数知识).第 6 章介绍非线性方程组部分和现象(包括动力学系统中的混沌现象).

(3) 本书坚持研究和讨论真实世界中存在的例子和数学模型.学生们通过数学模型的学习和经验性的研究能够正确解决以下问题：什么样的方程能用公式求解？怎样求解它们以及一个解是否能够产生有用的信息？

(4) 我们也可以认为微分方程的第一课是一扇进入数学世界的窗户.然而我们在这个基础课程中没必要也不合适给出存在性和惟一性定理的证明.学生只需要看到这些定理简洁和清楚的描述以及它们的作用即可.我们在本书后的附录中给出了适当的存在性

和惟一性定理的证明,并且在本书的主要地方提到它们.

(5) 尽管新的计算机方法在求解微分方程时有着广泛的应用,但我们相信某些基本的求解分析方法(例如第 1,3 章)对学生来说仍然是必须学习的.其中一个原因就是有效和可靠地使用数值方法通常需要标准的基本方法来提前对问题进行分析.通常构建一个实际的数值模型是基于对一个简单分析模型的研究的基础上的.因此我们仍然需要掌握传统的求解方法(尤其要研究各种问题中的内在联系).

计算特点

以下特征突出计算技术的独特风格,而以往我们注重理论说明.

(1) 大约 700 幅电脑制成图像(其中一半以上是这个版本新增的而且大多数是使用 MATLAB 制作)将逼真的方向场、解曲线以及相位平面图展示在学生面前,使得符号化的微分方程求解变得生动有趣.例如:封面是一个三维波动方程的特征函数图像,它能够表明一个球状星体的表面波动,它是利用勒让德函数构造的.

(2) 大约 45 个应用模型分布在本书的各重要章节.大部分应用概述了"技术中立"研究,说明了专门计算系统的应用,从而鼓励学生从事新技术的应用.

(3) 通过第 2 章(数学模型与数值方法)关于数值求解方法的介绍,我们可以看出现在对数值方法的重视.第 2 章及第 4 章(微分方程组简介)中,对方程组以平行的样式引进数值算法,从图形计算器到 MATLAB,都形成了具体切实的风格.

(4) 通过一些尽可能的计算形成对概念的深刻理解.这就使第 1,3,5 章中介绍的某些传统论题(如:恰当方程和参数的变化)变得更加简洁.

模型特点

我们把数学模型作为研究微分方程的目标和持续的动力.为了说明本书的应用范围,让我们考虑以下问题:

(1) 什么能够解释通常能观测到的每天在室内和室外的温差波动延迟?(1.5 节)

(2) 什么造成了美洲鳄鱼的灭绝和世界末日的区别?(2.1 节)

(3) 独轮车和两轴的汽车在道路上颠簸有什么不同的反应?(3.7 节和 5.3 节)

(4) 你怎样确定一个新观测到的彗星通过下一个近日点的时间?(4.3 节)

(5) 为什么一场地震能彻底毁坏一个建筑而无法损坏它旁边的另一个建筑呢?(5.3 节)

(6) 什么能决定两个物种能和谐地共同生存或是竞争以至一种灭绝一种生存?

(7) 为什么并且什么时候非线性能导致生物系统和机械系统中的混沌发生?(6.5 节)

(8) 如果用一个落锤周期地击打弹簧上的一个物体,那么物体的表现是怎样依赖于落锤击打的频率?(7.6 节)

(9) 为什么旗杆是空心的而不是实心的?(8.6 节)

(10) 什么能够解释吉他、木琴和鼓的声音的不同?(9.6 节、10.2 节和 10.4 节)

编制与内容

我们对一系列题目和通常处理问题的方法引进了新的技术和新的理解.例如:

(1) 在第 1 章中,我们给出一阶方程的简单概要(同时覆盖了部分传统的经典方法)之后,第 2 章则给出关于数学模型、稳定性、微分方程定性性质和数值方法的早期介绍.这些题目的结合将渗透在后续课程中.

(2) 第 4 章和第 5 章展示了对线性方程组灵活的处理方法.在当前的科学与工程教育和实践的影响下,第 4 章对一阶系统、模型和数值近似方法提供了一个早期直观的介绍.而第 5 章则介绍了本书所需要的线性代数的知识以及线性方程组的特征值逼近法.它包括各种特征值方法的广泛应用(应用范围从火车到地震).5.5 节还包括矩阵指数的一个通用的处理办法,并且这次还增加了 5.6 节,专门介绍非齐次线性方程组.

(3) 第 6 章介绍了非线性方程组及现象(从对生态和机械系统的相位平面的分析到最后关于一阶动力系统的混沌和分支).6.5 节介绍了一些现代题目(在生物和机械系统中的周期双倍、音叉图表、洛伦兹奇特吸引子,这些都用生动的计算机图形加以说明).

(4) 拉普拉斯变换法(第 7 章)、幂级数方法(第 8 章)处理线性和非线性方程组部分,它可以放到第 3 章以后任意一部分讲.

(5) 第 9 章和第 10 章处理傅里叶级数的应用、变量分离、关于偏微分方程的施图姆-刘维尔问题和边值问题.在介绍完傅里叶级数之后,我们在第 9 章的最后三节讨论了三类方程,即波动方程、热传导方程和拉普拉斯方程.我们在第 10 章发展了施图姆-刘维尔方法,使之成为更具有深远和实际意义.

本书结构安排合理,作为教材可以用一至二学期学完.较简单的版本《微分方程:计算和模型》以第 7 章结束(不包括幂级数方法、傅里叶级数方法、变量分离和偏微分方程).

习题,应用和求解手册

在这个版本中的 1900 道题目有大约 20%是新题或新改编的,包括一些图形和定性的内容.相应地,在答案中新增加了近 300 个计算机生成图像,作为同学们的参考.

在这个版本的习题答案中,作为学习的助手增加了它的价值.解答部分包括了大部分奇数号码题目的解答和一些偶数号码题目的解答.与这本书相配套的教师解答手册(共 625 页)(0-13-047578-5)给出了这本书的大部分解答,学生解答手册(共 375 页)(0-13-047579-3)给出了大部分奇数号码题目的解答.

为了鼓励学生更进一步地探索和应用计算技术.我们增加了近 45 个习题和设计题材的应用模型.进一步的研究可以参考应用手册(共 325 页)(0-13-047577-7),它和本书相配

套,并且作为教材的补充增加了一些具有挑战性的研究.在这本手册的每一节中都有使用Maple,Mathematica,MATLAB的一小节详细说明每个系统的方法和技术,这将给学生(使用者)去比较不同计算系统的风格和优点的机会.

技术手册和网址

略

感谢

略

C. H. E
hedwards@ math. uga. edu
雅典,佐治亚,美国

D. E. P
dpenney@ math. uga. edu
雅典,佐治亚,美国

目　录

下面给出本教材所指章节的模型.大部分提供了计算设计,用以说明该章节的内容.在与本教材相配套的应用手册中包括了 Maple,Mathematica 和 MATLAB 版本.

第 1 章　一阶微分方程

1.1　微分方程与数学模型

我们可以用数学语言来描述客观世界的规律. 代数学完全可以解决静止问题，但大多数有趣的自然现象是变化的，并且仅能由涉及变量的方程来描述.

因为函数 f 的导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f'(t)$ 是一种比率，其中变量 $x=f(t)$ 相对于自变量 t 以这个比率发生变化，所以我们经常使用包含导数的方程来描述变化的客观世界. 包含未知函数和该函数一个或多个导数的方程叫做微分方程.

例 1.1.1　微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+t^2$ 含有未知函数 $x(t)$ 和它的一阶导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x'(t)$.

微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+7y=0$ 含有自变量 x 的未知函数 y 和它的两个导数 y' 和 y''. ■

研究微分方程有三个主要目的：(1)建立描述特殊物理现象的微分方程；(2)找到该方程精确的或近似的合适解；(3)解释找到的解.

在数学里，寻找未知数使其满足方程 $x^3+7x^2-11x+41=0$. 同样在解微分方程时，要找到未知函数 $y=y(x)$，使其满足 $y'(x)=2xy(x)$，即微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 在实数范围内成立. 一般地，如果可能我们希望找到微分方程的所有解.

例 1.1.2　如果 C 是一个常数，并且

$$y(x)=C\mathrm{e}^{x^2}, \tag{1.1.1}$$

那么，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C(2x\mathrm{e}^{x^2})=(2x)(C\mathrm{e}^{x^2})=2xy$，这样形如式(1.1.1)的每个函数都满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy. \tag{1.1.2}$$

特别地，式(1.1.1)给出了微分方程的无穷多个不同解. 通过分离变量的方法(见 1.4 节)可以说明微分方程(1.1.2)的每个解都具有式(1.1.1)的形式. ■

微分方程和数学模型

下面三个例子说明了把自然科学的定律和原理转化为微分方程的过程. 在每个例子中的自变量都是时间 t，但以后也有很多自变量不是时间变量 t 的例子.

例 1.1.3　牛顿冷却定律可表述为：一个物体温度 $T(t)$ 的时间变化率（相对于时间的变化率）与物体的温度 T 和它周围介质的温度 A 的差成比例（图 1.1.1），即

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-A), \tag{1.1.3}$$

其中 k 为正常数. 显然，如果 $T>A$，那么$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}<0$，因此温度 T 是时间 t 的一个减函数，从而物体会慢慢变凉；如果 $T<A$，那么$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}>0$，因此温度 T 是时间 t 的一个增函数. 这样，物理定律被转化为一个微分方程. 如果给定 A 和 k 的值，将得到 $T(t)$ 的具体表达式，从而根据这个表达式能预测物体的将来温度. ■

例 1.1.4　托里拆利定律可表述为：在排水容器中，水的体积 V 的时间变化率与容器中水的深度 y 的平方根成比例（图 1.1.2），即

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-k\sqrt{y}, \tag{1.1.4}$$

其中 k 为常数.

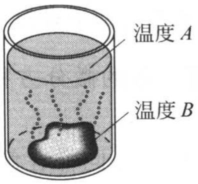

图 1.1.1　牛顿冷却定律，方程(1.1.3)描述水中热岩石的冷却过程

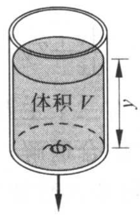

图 1.1.2　托里拆利排水定律，方程(1.1.4)描述水箱中的排水过程

如果容器是一个直圆柱且横截面积为 A，那么 $V=Ay$，所以$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=A\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 在这种情况下，方程(1.1.4)可变成为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-h\sqrt{y}, \tag{1.1.5}$$

其中 $h=k/A$ 为一个常数. ■

例 1.1.5　在出生率和死亡率都不变的情况下，人口 $P(t)$ 的时间变化率与人口的总数成比例. 即

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP, \tag{1.1.6}$$

其中 k 为一个比例常数. ■

下面进一步讨论例 1.1.5. 首先，注意到每一个形如

$$P(t)=Ce^{kt} \tag{1.1.7}$$

的函数都是微分方程$\frac{dP}{dt}=kP$的解.可以验证,对于所有的实数t,都有$P'(t)=Cke^{kt}=k(Ce^{kt})=kP(t)$.

这样,如果给定常数k的值,那么选定任意常数C,得到微分方程$\frac{dP}{dt}=kP$的一个解$P(t)=Ce^{kt}$.所以微分方程$\frac{dP}{dt}=kP$有无穷多个形如$P(t)=Ce^{kt}$的不同解.一般地,根据一些附加条件从所有解中选择一个特殊的解,使其满足要求.

例 1.1.6　假设$P(t)=Ce^{kt}$代表在时刻t时菌群的数量,在时刻$t=0$(单位: h)时是1000个,在1h时为2000个,由这个附加条件得到下面方程

$$1000=P(0)=Ce^0,\quad 2000=P(1)=Ce^k.$$

因此$C=1000$,$e^k=2$,进一步得$k=\ln 2\approx 0.693147$,所以微分方程(1.1.6)变为

$$\frac{dP}{dt}=(\ln 2)P\approx 0.693147P.$$

用$k=\ln 2$,$C=1000$代入方程(1.1.7)得到满足给定条件的特解$P(t)=1000e^{(\ln 2)t}=1000(e^{\ln 2})^t=1000\times 2^t$.可以用这个特解来预测菌群的数量.例如,在1.5h以后,菌群的数量为$P(1.5)=1000\times 2^{\frac{3}{2}}\approx 2828$. ■

因为我们经常得到的微分方程都把$t=0$当作是"开始时刻",所以例1.1.6中的条件$P(0)=1000$叫做初值条件.图1.1.3给出了当$k=\ln 2$时$P(t)=Ce^{kt}$的几个不同图形.事实上,$\frac{dP}{dt}=kP$的所有解的图形充满整个二维平面,并且没有两条曲线相交.另外,P轴上任意一点的选择就等于初值条件$P(0)$的确定.因为恰有一条解曲线通过这个点,所以在这种情况下,初值条件$P(0)=P_0$确定了惟一个适合给定条件的解.

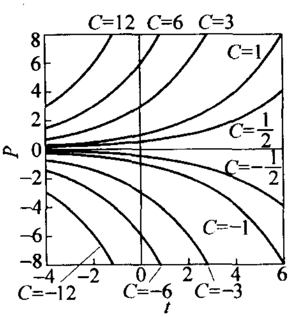

图 1.1.3　当$k=\ln 2$时,$P(t)=Ce^{kt}$的图形

数学模型

在例1.1.5和例1.1.6中,关于人口增长的讨论给出了数学建模的整个过程(图1.1.4),具体如下:

(1) 用数学语言给客观世界一个系统的阐述,也就是数学模型的构造;

(2) 对得到的数学问题进行求解或分析;

(3) 在真实的客观世界中对数学结果给予解释.

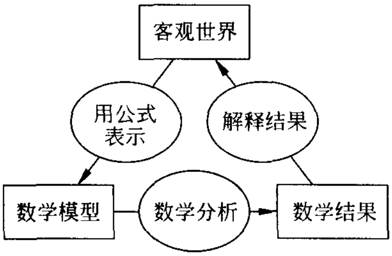

图 1.1.4 数学建模的过程

在人口的例子中，客观世界问题是确定将来某一时间的人口数量. 数学模型包括一系列用来描述已知情况的变量(P 和 t)，还包括已知的或假设能求出的一个或多个涉及这些变量的方程$\left(\frac{dP}{dt}=kP, P(0)=p_0\right)$. 数学分析就是解这些方程. 最后我们将这些数学结果应用到解决原始客观世界问题当中去.

然而，微分方程的一个解不可能满足所有的已知信息. 在这种情况下，我们一定怀疑微分方程不可能很充分地描述客观世界. 例如，方程(1.1.6)的解具有形式 $P(t)=Ce^{kt}$，其中 C 是一个正常数. 但是，不存在常数 k 和 C，使得 $P(t)$ 准确地描述过去几个世纪世界人口的实际增长. 因此，我们必须考虑下面一些因素：人口的出生率、食品供应的短缺和其他等因素，然后得到更复杂的微分方程. 但这并不意味着例 1.1.5 的模型就是失败的. 这就要求我们在研究人口增长的时候必须考虑到其他的因素. 实际上，方程(1.1.6)在一定条件下是相当准确的. 例如，在不限制食品和空间的条件下细菌数量的增长.

在人口的例子中，忽略了出生率和死亡率的变化所带来的影响. 这就使数学分析变得非常简单，但结果可能不符合实际. 一个好的数学模型应该适合两个对立的要求. 一方面，它必须在相对准确的情况下足够详细地描述客观世界；另一方面，它也必须使得数学分析变得足够简单. 如果这个数学模型如此详细以至于它完全描述客观世界，那么数学分析就可能太困难以至于根本就不能进行. 如果数学模型太简单，那么结果可能就太不准确，以至于没有什么实际意义. 这样在客观世界和数学模型之间不可避免的存在一个平衡点.

在本书中我们始终研究数学模型. 下面的例子都是简单的，而且给出了研究微分方程及其解的标准方法.

例子及术语

例 1.1.7 如果 C 是一个常数，且 $y(x)=\frac{1}{C-x}$，那么$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(C-x)^2}=y^2$. 因此如果 $x\neq C$，那么在任何不包含 $x=C$ 点的实数区间上，

$$y(x)=\frac{1}{C-x} \tag{1.1.8}$$

是微分方程

$$\frac{dy}{dx}=y^2 \tag{1.1.9}$$

的一个解. 实际上，式(1.1.8)给出微分方程$\frac{dy}{dx}=y^2$ 含有一个参数的一族解. 当 $C=1$ 时，我