21世纪高等院校十一五规划教材

常微分方程

内蒙古自治区数学教材编委会 组编

（上）

主 编 陈向华
白晓东

内蒙古大学出版社

21 世纪高等院校十一五规划教材

常微分方程(上)

内蒙古自治区数学教材编委会　组编

陈向华　白晓东　主编

李东平　陈向华　张炳成
杨金林　白晓东　丁立刚　编著

内蒙古大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程.上册/陈向华,白晓东主编.一呼和浩特:内蒙古大学出版社,2006.7

ISBN 7-81074-974-9

Ⅰ.常… Ⅱ.①陈… ②白… Ⅲ.常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.0175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 076592 号

常 微 分 方 程(上)

陈向华 白晓东 主编

内蒙古大学出版社出版发行

内蒙古军区印刷厂印刷

开本:850×1168/32 印张:10.625 字数:267 千

2006 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 7-81074-974-9/O·57

全二册 定价:25.00 元

(上册:14 元;下册:11 元)

序

内蒙古自治区的高等教育事业起步于20世纪50年代初。经过近50年的发展,我区的高等教育无论从规模上,还是质量上都取得了长足的发展。特别是近些年来,全区高等院校的招生数量成倍增长,部分院校的合并使得一些高校的办学规模迅速壮大,形成了几所万人大学。与此同时,各高校对各自的专业及课程设置都做了较大的调整,以适应当今日益发展变化的高等教育事业。面向21世纪,在科学技术日新月异,社会对人才的知识结构、层次要求越来越高的新形势下,我们的高等教育的教学水平,特别是教材建设都应有一个更新更高的要求。

回顾50年来的发展,虽然我区高等教育的教学科研水平有了较大的提高,但与之相应的教材建设的现状还不尽如人意,绝大多数主干课程的教材还沿用一些传统教材,有些甚至是20世纪七八十年代的版本。有些院校的教材选用则有一定的随机性,在几种版本的教材之中换来换去。其间,虽然部分院校也组织力量编写了一些基础课及专业课教材,但大都是各成体系,缺乏院校间的协作与交流,形不成规模,质量亦无法保证,常常滞后于学科的发展与课程的变化。这都与我区高等教育的发展极不协调。诚然,区外部分地区高校的教学科研水平比我区要高,一些教材的质量好,我们可以直接利用,但这并不能成为我们不搞教材建设的理由。好的教材还需要相应的教育资源条件与之相对应才能取得良好的教学效果,从而达到促进教学质量提高之目的。应当承认,由于经济发展的相对落后,我区高校所招学生的基础和学校的教学条件比起全国重点名牌大学相对要差一些。因而,我们高校的教材也

应从实际出发，结合自己学校和学生的特点，逐步探索、建立一套适合自治区教育资源条件的教材体系，促进自治区高校教学科研水平的提高，多出人才，出好人才。

值得欣喜的是，随着自治区教育科学水平的提高，我区高校教育领域的一些有识之士逐渐认识到，面向21世纪，未来高校之间的竞争就是学校的产品——学生质量的竞争。要想培养出高水平、高素质的学生，使我区的高校在这种竞争中立于不败之地，除各高校应努力提高自身的教学组织管理水平、提高教师的素质外，还应积极主动地加强与区内外高校的协作、交流，取长补短，走联合发展的道路，使我区高等教育的整体水平能够在较短的时间内得到提高。为此，在有利于规范高校教材体系，促进高校教育质量的提高，加强各高校教学科研人员之间的协作与交流的原则下，由自治区教育厅牵头，内蒙古大学出版社组办、资助，联合全区高等院校的有关专家、学者共同组建成立一些相关专业的教材编委会，以求编写适合我区高等教育特点的教材，逐步建立、完善自治区高等教育的教学、教材体系，并开展一些与教学相关的科研工作。我们希望，通过教材编委会这种工作模式，建设一批高质量的教材，带出一支高水平的师资队伍，培养出大批高素质的人才。

我坚信，在自治区教育厅的指导下，在编委会各位专家、学者的辛勤工作下，在各院校的相互理解、相互协作、相互支持下，我们一定能够克服发展过程中的困难，逐步推出一批高质量、高水平的教材，为推进内蒙古自治区高等教育事业做出重要的贡献。

2002年3月19日

前　言

自20世纪90年代后期开始，我国高等教育的改革步伐日益加快。特别是1999年以来，各地高校开始大幅度地扩大招生规模，大学教育逐步由“精英教育”向“大众教育”过渡。随着招生规模的扩大，学生情况出现了新的变化，为此，我们的教材建设也要适应这种教育形势的变化。

“常微分方程”历来是数学系各个专业的专业基础课，系统扎实地掌握好它的基本理论和方法，无疑对进一步学好后续课程是十分必要的。但是，在目前的教学实践中遇到了一些新的情况：一方面，经历大规模扩招后，重点院校和普通院校的学生的差距不断增大，甚至在同一所学校的学生也有着明显的差距，这就要求我们建立分层次，多形式地培养模式，而且每个培养模式应该有不同的教学要求，所以，教材的内容也应该为教师提供多一些的选择，为学生提供多一点自我学习的空间；另一方面，有关计算机的基本知识及其应用的课程逐渐成为数学本科生的必修课，例如“数学建模”、“数学实验”以及计算机的其它应用课程等等，使得原有的必修课或者改为选修课或者减少课时（例如“常微分方程”），再加上数学本学科不断地发展，教学内容的更新，因此，有必要对原有教材的内容进行调整和改编，以适应新的变化和要求，保证益于学生系统而扎实地掌握本课程的基本理论和方法。由于目前本学科现有的大多数教材或起点过高，或内容陈旧，已不适应大多数普通院校的教学需求，很有必要编写一部适应面较广的教材。这就是我们编写这套教材的基本指导思想。

基于以上想法，本教材在保证“常微分方程”基本内容的前提

下，力求通俗易懂，选例丰富，同时尽可能体现本学科在新领域的应用。在教材中，我们把解的存在唯一性定理等一般理论放到第五章介绍，这样做的目的是为避免学生一开始就接触较为抽象而繁难的理论。在学习了前四章的内容之后，由于有了较多的相关知识，从而也就更易于掌握这一知识。在习题的选择上，力求层次分明，以利于不同的教学需要。其中A组题作为基本练习，B组题供教学参考和学有余力的学生参考。

根据教学的需求，本教材下册每章的内容分为内容提要、例题分析和习题解答三部分。在题解中除了选编较多的计算题外，还编写了一定数量的证明题和应用题。其目的是让读者通过各种类型习题的练习，加深对本课程基本理论的理解，掌握解题的技巧和方法，从而提高解决实际问题的能力。由于解题的思路和方法是多种多样的，解法也不是唯一的，所以在题解中，我们只是为每道习题提供了一种求解的参考方法。

《常微分方程(上册)》由陈向华、白晓东主编，并负责全书的统稿和审定。李东平编写第一章；陈向华编写第二章和第六章；张炳成编写第三章的第6节；杨金林编写第三章的第7节；白晓东编写第四章和第五章；丁立刚编写第三章的1,2,3,4,5节和第七章。

《常微分方程(下册)》由杨金林、李东平主编，并负责统稿和审定。杨金林编写第一章和第二章；李东平编写第三章；张炳成编写第四章和第七章；白晓东编写第五章的1,3,4节；丁立刚编写第五章第2节；陈向华编写第六章。

本教材编写过程中参考的有关书籍在此就不一一列出了。

虽然作者有多年“常微分方程”的教学经验，但书中一定还存在一些疏漏和错误，希望广大读者提出批评和指正，我们将不胜感激！

作者

2005年12月

目　录

第一章　绪　论

§1.1　基本概念

【定义1】　含有自变量、未知函数及它的导数的关系式称为微分方程.只有一个自变量的微分方程称为常微分方程,否则称为偏微分方程.

例如

$y' = xy$,(x 为自变量,y 为未知函数)

$x\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x = 0$,($t$,$x$ 哪一个为自变量均可)

$\dfrac{d^2y}{\mathrm{d}t^2} + b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + cy = f(t)$,($t$ 为自变量,y 为未知函数)

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = x + y$,($x$、$y$ 为自变量,z 为未知函数)

$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial T}{\partial t}$,($x$,$t$ 为自变量,T 为未知函数)

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$($x$、$y$、$z$ 为自变量,u 为未知函数)

如上例中的前三个就是常微分方程,后三个就是偏微分方程.

本书主要讨论常微分方程,对偏微分方程只作简单介绍.以后再不特别说明,凡说到微分方程均指常微分方程.

【定义2】　微分方程中所含未知函数的最高阶导数的阶数称为该方程的阶.

一阶常微分方程一般形式可表示为

$$F(x,y,y')=0 \tag{1.1}$$

如果(1.1)能解出y',则得到

$$y'=f(x,y) \tag{1.2}$$

或

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1.3}$$

(1.1)称为一阶隐式方程;(1.2)称为一阶显式方程;(1.3)称为微分形式的一阶方程.

一般地,n阶显式方程具有形式

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{1.4}$$

n阶隐式方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.5}$$

【定义3】 设函数$y=y(x)$在区间$I=[a,b]$上有定义,且有直至n阶的导数,能使在该区间上成立.

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x))\equiv 0$$

则称$y=y(x)$为方程(1.5)的解,I是解$y=y(x)$的定义区间,$y=y(x)$有时由隐式方程$\phi(x,y)=0$确定,把$\phi(x,y)=0$称为方程的隐式解(或也称解).这个定义是就(1.5)在闭区间$[a,b]$上叙述的,对于其它形式的方程或区间,也可以相应地叙述,在此不重复了.

例1 判断$y=2e^{-x}+xe^{-x}$是否是方程

$$y''+2y'+y=0$$

的一个解.

解 求出y的一阶、二阶导数为

$$y'=-2e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}=-e^{-x}-xe^{-x}$$

$$y''=e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=xe^{-x}$$

将其代入微分方程得

$$y''+2y'+y=xe^{-x}+2(-e^{-x}-xe^{-x})+(2e^{-x}+xe^{-x})\equiv 0$$

其中$x\in(-\infty,+\infty)$.所以,y是该方程的一个解,它的定义区间为

$(-\infty,+\infty)$.

【定义4】 求微分方程满足某种指定条件（通常称为定解条件）的解的问题称为定解问题.

常见的定解条件是初始条件①. 当定解条件为初始条件时，相应的定解问题，就称为初值问题. 本书主要讨论初值问题.

方程(1.2)的初值问题常记为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{1.6}$$

n 阶方程(1.4)的初始条件为

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

初值问题也常称为柯希(Cauchy)问题.

【定义5】 n 阶常微分方程的含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解 $y=\phi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 称为该方程的通解. 给通解中的任意常数已定值，所得到的解称为特解.

例2 求初值问题

$$y'+y=0,y(3)=2$$

的解，已知其通解为 $y=ce^{-x}$，其中 c 为任意常数.

解 因为对任意 c 的值，$y=ce^{-x}$ 均为此微分方程的解，所以我们可以利用初始条件来求 c 的值. 由 $y(3)=ce^{-3}=2$，得 $c=2e^3$. 将 c 值代入通解 $y(x)$，得该初值问题的解.

$$y=2e^{3-x},x\in(-\infty,+\infty)$$

习题1.1 A组

1. 指出下面微分方程的阶数：

---

① 另一类定解条件为边界条件.

(1) $\frac{dy}{dx} = 4x^2 - y$;

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 + 12xy = 0$;

(3) $\frac{dy}{dx} + \cos y + 2x = 0$;

(4) $\frac{d^ny}{dx^n} = y^2 + 1$;

(5) $y^{(4)} + xy''' + x^2y'' + xy' - \sin y = 0$;

(6) $y^3\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$.

2. 验证给出的函数是否为相应微分方程的解:

(1) $\frac{dy}{dx} = p(x)y$, $p(x)$ 连续, $y = ce^{\int p(x)dx}$

(2) $(x + y)dx + xdy = 0$, $y = \frac{c^2 - x^2}{2x}$

(3) $y'' = x^2 + y^2$, $y = \frac{1}{x}$

(4) $5\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x$, $y = \frac{x^3}{5} + \frac{x^2}{2} + c$

(5) $y'' + k^2y = 0$, $y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$

3. 设 $y'' = x^2 - 1$

(1) 求方程的通解;

(2) 求满足条件:$y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$ 的特解;

(3) 求满足条件:$y|_{x=1} = 2$, $y'|_{x=2} = 1$ 的特解;.

B 组

1. 验证 $y = c\cos x$ 是方程 $y' + y\tan x = 0$ 的通解,并求满足条件 $y(\pi) = 4$ 的特解.

2. 问常数 r 应取何值时，函数 $y = e^{rx}$ 是下列方程的解？

（1）$y'' + 3y' - 4y = 0$；（2）$2y''' + y'' - 5y' + 2y = 0$.

3. 证明 $y = \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是方程

$$xy'' + y' = 0$$

的一个解，而区间 $(-\infty, +\infty)$ 不是它的定义区间.

§1.2 导出微分方程的实例

常微分方程有着深刻而生动的实际背景，它从生产实践与科学技术中产生，而又成为现代科学技术中分析问题与解决问题的一个强有力的工具. 例如化学、生物学、自动控制、电子技术等等. 都提出了大量的微分方程问题. 同样在社会科学的一些领域里也存在着微分方程的问题. 下面介绍几个例子.

例 1 受到空气阻力的自由落体.

设质量为 m 的物体，在时间 $t = 0$ 时自由下落，在空气中受到的阻力与物体的下落速度成正比，求物体下落距离与时间的关系.

解 如图 1－1 建立坐标系，设 x 为物体下落的距离，于是物体下落的速度为

$$V = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

加速度为

$$a = \frac{d^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

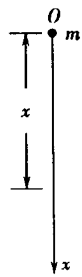

图 1－1

根据牛顿第二定律 $F = ma$，可以列出方程

$$m\frac{d^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + mg,$$

其中 k 为一正比例常数，右端第一项的负号表示阻力与速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 的

方向相反.

于是,问题归结为求满足上述方程的未知函数 $x(t)$ 的问题.若现在只考虑 $k=0$ 的情形,也就是说物体是在真空中下落,没有阻力,这时,方程就变成

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.$$

例2 $R—L$ 电路.

如图所示的 $R—L$ 电路,它由电感 L,电阻 R 和电源 E 串联而成.设 $t=0$ 时电路中没有电流,当开关 K 合上后,求电流 $I(t)$ 应满足的微分方程及初始条件,这里假定 R、L、E 都是常数.

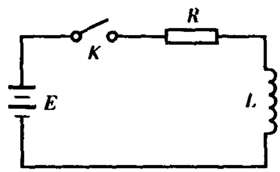

图1－2

解 为求电流 $I(t)$ 应满足的微分方程,我们引用关于电路的基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律:在闭合回路中,所有支路上的电压降的代数和为零.

当电流为 I 时,经过电阻 R 的电压降为 RI,经过电感 L 的电压降是 $L\frac{dI}{dt}$,由基尔霍夫第二定律得

$$E=RI+L\frac{dI}{dt}$$

即 $I(t)$ 满足的初值问题为

$$\begin{cases}\dfrac{dI}{dt}=\dfrac{R}{L}I+\dfrac{E}{L}\\ I(0)=0\end{cases}$$

例3 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l,试求此曲线的方程所满足的微分方程.

解 如图1－3设所求的曲线方程为 $y=f(x)$,对该曲线上任一点 (x,y),其切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

((X,Y) 为切线上点的流动坐标).

令 $Y=0$,得此切线在 x 轴上的截距.

$$A = x - \frac{y}{y'}$$

令 $X=0$,得此切线在 y 轴上,的截距

$$B = y - xy'$$

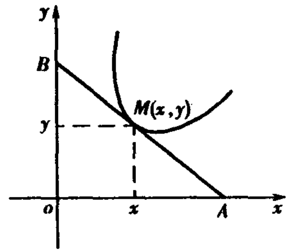

图1-3

依题意得

$$A^2 + B^2 = l^2$$

即

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2 = l^2$$

整理得

$$(xy' - y)^2 + y'^2(y - xy')^2 = l^2 y'^2$$

即

$$(1 + y'^2)(xy' - y)^2 = l^2 y'^2 \text{ 为所求的微分方程.}$$

例4　考虑一物质 A 经化学反应,全部生成另一种物质 B.

设 A 的初始质量为10公斤,在一小时内生成 B 物质3公斤,试求物质 B 的质量所满足的微分方程.

解　这是一化学问题,它遵循质量作用定律:化学反应的速度跟参与反应的物质的有效质量或浓度成正比.

设 x 表示在 t 时刻所生成 B 物质的质量,则 $M_A = 10 - x$ 是 t 时刻 A 物质参与反应的有效质量,按上述定律有

$$\frac{dM_A}{dt} = -KM_A \qquad \left(K > 0, \frac{dM_A}{dt} < 0, \text{因 } M_A \text{ 减少}\right)$$

所以得物质 B 的质量 $x(t)$ 所满足的微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = K(10 - x) \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 3 \end{cases}$$

例 5　雪球融化问题

假定一个雪球是半径为 r 的球，其融化时体积的变化率正比于雪球的表面积，比例常数为 $K > 0$，（K 与环境的相对温度，阳光，空气温度等因素有关）. 已知两小时内融化了其体积的四分之一，问其余部分在多长时间内全部融化完！

解　首先根据体积的变化率正比于雪球的表面积，列出关系式

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -K \cdot 4\pi r^2$$

因为体积 V 是单调下降的，所以 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0$，故在等式右端加负号，

$$\because V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -K \cdot 4\pi r^2$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -K, \text{解得 } r = -Kt + c.$$

令 $t = 0$ 时，$r = r_0$

$$\therefore r = r_0 - Kt \tag{1.7}$$

于是 $t = 2$ 小时的时候，$r = r_0 - 2K$. 根据题设：两小时内雪球的体积减少了四分之一，可列出下式

$$\frac{4}{3}\pi(r_0 - 2K)^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi r_0{}^3$$

得