研究生用教材

非线性固体力学及其有限元法

FEIXIANXING GUTILIXUE JIQI YOUXIANYUANFA

何蕴增 杨丽红 编著

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

哈尔滨工程大学“十五”研究生教材建设专项资金资助出

非线性固体力学及其有限元法

何蕴增　杨丽红　编著

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书共分六章。首先简单介绍了张量理论，然后系统地介绍了连续介质力学、固体材料非线性本构理论、几何非线性问题有限元法、材料非线性问题有限元法和简单结构非线性问题有限元分析。

本书是专门为力学专业本科生和相关专业研究生36~54学时的非线性固体力学及其有限元法课程编写的教材。本书力求叙述简练，编撰细腻，诠释形象，以期便于阅读、理解。

拟定的读者群主要是力学专业高年级本科生和相关专业研究生，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性固体力学及其有限元法/何蕴增，杨丽红编著.—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2007.10

ISBN 978-7-81133-047-2

Ⅰ.非… Ⅱ.①何…②杨… Ⅲ.①连续介质力学②非线性-有限元法 Ⅳ.033 0242.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第150844号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 12.25
字 数 250千字
版 次 2007年10月第1版
印 次 2007年10月第1次印刷
定 价 20.00元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

本书主要针对力学专业本科生和相关专业研究生 36～54 学时非线性固体力学及其有限元法课程要求，量体编写。鉴于课程学时较少，信息量较大，抽象程度较高，需对内容选材和加工进行精细的雕琢。本书系统借鉴了相关著述的体系和阐述，结合编者的教学体验编撰而成。力求叙述简练，详略有致，诠释形象，以期收到较好的教学效果。

固体力学的学科研究需解决两方面的问题：建立理论和正确求解。非线性固体力学理论包括牛顿力学、大变形几何描述和材料本构模型三方面规律。牛顿力学是成熟的；大变形几何描述也有一百多年的积累，材料本构理论由于计算机技术发展的促进，近年来有了飞跃发展。

基于学生已有的弹塑性力学知识，本书旨在介绍大变形几何描述和非线性固体本构理论的基础，并简述非线性固体力学问题有限元法的方法、格式和技巧，为进一步深入研究和探索打下基础。

本书分两部分：第 1 章至第 3 章介绍连续介质力学非线性几何理论和固体本构理论基础（由何蕴增执笔）；第 4 章至第 6 章讨论非线性固体力学问题的有限元法的实现（由杨丽红执笔）。

由于本书编写时间仓促，作者水平有限、实际工程积累不多，编撰中的错误和不当之处在所难免，敬请专家、同行和读者指正、赐教！

编　者

2007 年 7 月

目　录

引　言

非线性固体力学包括几何非线性(大变形)问题和物理非线性(非线性本构理论)问题。

由于计算科学和计算技术的发展,力学研究需要更接近真实的本构理论。

材料受力后,先产生弹性变形和塑性变形,弹性变形和塑性变形的累计引发大应变及损伤,损伤至一定程度导致破坏。

传统的本构理论不适用于大应变问题,如金属、岩土、粒状、高强钢管等材料的大应变问题。这时,塑性势理论中的正交法则和体积不变等假设有待修正。

大应变本构关系研究需要下述基础:

(1)张量理论(数学工具);

(2)连续介质力学(有限变形应力应变理论和大应变本构理论)。

第1章 张量理论

数和量及其运算是代数学研究的主要内容。

人们对事物多少、大小、优劣等属性,常选择适当参量来描述,即以确定的统一标准来度量所得的数量来衡量(例如:某人身高 1.8 m,某地气温 20 ℃)。通过数的比较、运算、分析,深刻地认知事物。随着人们对数和量认识的拓展,数和量经历了自然数、分数、实数、复数,和数量、矢量、张量的扩充。

对于数量的运算,我们已经熟练掌握,本章主要介绍矢量和张量的有关知识。

矢量和张量就是约定好顺序的有限个数(元素)的集合。矢量为一维数集,对应一列有序数;张量为多维数集,对应多维有序数,例如二维张量对应一个二维矩形点阵(矩阵),高维张量对应相应高维点阵。

研究一个矢量的变化,等同于同时研究多个数量的变化;研究一个二阶张量的变化,等同于同时研究多个矢量的变化,等等。

1.1 矢量和张量

1.1.1 矢量

在本章中,矢量一般用小写字母表示,张量用大写字母表示。

1. 矢量度量

矢量 $\boldsymbol{a}$ 具有大小和方向,由确定坐标系下投影值 $\{a_i\}(i=1,2,3)$ 或 $\{a_1,a_2,a_3\}^{\mathrm{T}}$ 来度量或描述,上标“T”表示转置。

2. 坐标变换

由投影定理,笛卡尔正交坐标系 $x_i(i=1,2,3)$ 下的 $\{a_1,a_2,a_3\}^{\mathrm{T}}$ 变换为 $x_{i'}(i'=1,2,3)$ 下的 $\{a_{1'},a_{2'},a_{3'}\}^{\mathrm{T}}$,有

$$a_{i'}=\beta_{i'j}a_j(i',j=1,2,3) \tag{1-1}$$

其中,$\beta_{i'j}$ 是 $x_{i'}$ 与 x_j 之间的方向余弦。

易证

$$\beta_{i'j} = \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_{i'}} = \delta_{i'j} \qquad \text{（称为 kronecker delta 张量）} \tag{1-2}$$

$$\beta_{i'j}\beta_{i'k} = \delta_{jk} \tag{1-3}$$

由式(1-3)可知

$$a_j = \beta_{i'j}a_{i'}$$

3.分量式

设 $\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_{i'}$ 为坐标系基矢，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{i'} = \beta_{i'j}\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{e}_j = \beta_{i'j}\boldsymbol{e}_{i'} \end{cases} \tag{1-4}$$

$$a_{i'}\boldsymbol{e}_{i'} = \beta_{i'j}a_j\beta_{i'k}\boldsymbol{e}_k = a_j\delta_{jk}\boldsymbol{e}_k = a_k\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{a} \tag{1-5}$$

方法可推广至高维张量。上述投影规则，实质是几何学中的合向量投影定理。熟练记忆和运用正交系坐标变换的技巧和记法的哑标约定规则，是研究向量、张量代数的基础。

理解抽象表述的有效方法是与已熟悉的形象模型相联系。譬如，我们对应力的转角变换较熟悉：$[\sigma_N] = [R]^{\mathrm{T}}[\sigma][R]$，可认为由原坐标系基矢向新坐标系基矢作两次投影的合成。分析材料力学应力转角公式推导过程：一是单元体微面元的坐标变换，二是各应力分量的坐标变换，两次投影决定了新坐标系下的各应力分量。

1.1.2 张量

1.张量表述

(1)正交系二阶张量

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{1-6}$$

$T_{i'j'} = \beta_{i'k}\beta_{j'l}T_{kl}$ 和 $T_{kl} = \beta_{i'k}\beta_{j'l}T_{i'j'}$ 定义同一张量。

张量分量记法

$$\boldsymbol{T} = T_{i'j'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1-7}$$

称 $\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}$ 和 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 为并基矢，某些文献记为 $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$，它是二阶张量的基本度量量，是矢量中基矢概念的延拓，与两个坐标轴方向相联系。

(2)高阶张量

$$\boldsymbol{T} = T_{i'j'k'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}\boldsymbol{e}_{k'} = T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$$

(3)曲线坐标

以 x^i 表示曲线坐标，$\boldsymbol{g}_i$ 表示协变矢量，$\boldsymbol{r}$ 为 P 点的矢径，如图 1-1 所示。

$$g_i = \frac{\partial r}{\partial x^i} \tag{1-8}$$

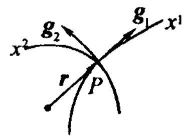

图 1-1 曲线坐标示意图

例如，极坐标为

$$\begin{cases} x^1 = r \\ x^2 = \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} |g_1| = 1 \\ |g_2| = r \end{cases}$$

由对偶性可知

$$g^i \cdot g_j = \delta^i_j \tag{1-9}$$

可派生出逆变基 g^i。曲线基矢间一般不正交，又非单位矢，运算较复杂。对应式(1-4)有

$$\begin{cases} g_{i'} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} g_j = \beta^j_{i'} g_j \\ g_j = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} g_{i'} = \beta^{i'}_j g_{i'} \end{cases} \tag{1-10}$$

$$\begin{cases} g^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} g^j = \beta^{i'}_j g^j \\ g^j = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} g^{i'} = \beta^j_{i'} g^{i'} \end{cases} \tag{1-11}$$

同一矢量可用协变和逆变基表示

$$a = a^i g_i = a_i g^i \tag{1-12}$$

二阶张量

$$T = T^{ij} g_i g_j = T_{ij} g^i g^j = T^i_j g_i g^j = T_i^j g^i g_j \tag{1-13}$$

2.张量坐标变换

(1)矢量分量变换

$$a_{i'} = \beta^j_{i'} a_j, \quad a_j = \beta^{i'}_j a_{i'}, \quad a^{i'} = \beta^{i'}_j a^j, \quad a^j = \beta^j_{i'} a^{i'} \tag{1-14}$$

(2)二阶张量分量变换

$$\begin{cases} T_{i'j'} = \beta^k_{i'} \beta^l_{j'} T_{kl} \quad & T_{kl} = \beta^{i'}_k \beta^{j'}_l T_{i'j'} \\ T^{i'j'} = \beta^{i'}_k \beta^{j'}_l T^{kl} \quad & T^{kl} = \beta^k_{i'} \beta^l_{j'} T^{i'j'} \\ T^{j'}_{i'} = \beta^k_{i'} \beta^{j'}_l T^l_k \quad & T^l_k = \beta^{i'}_k \beta^l_{j'} T^{j'}_{i'} \\ T^{i'}_{j'} = \beta^{i'}_k \beta^l_{j'} T^k_l \quad & T^k_l = \beta^k_{i'} \beta^{j'}_l T^{i'}_{j'} \end{cases} \tag{1-15}$$

本书以研究笛卡尔正交系为主，下文不再区分上、下标，一律写为下标。

1.2 张量代数

研究各类数或量之间的相关性及函数关系，可通过定义数的各种代数运算法则，研究运算

规律，进而确定更复杂的运算规则来实现。这些规则都是针对某些特定的实际问题提出的。研究解决相关问题，引申和拓展原有的规则研究，并解决更为复杂的实际问题是代数学的任务。

学习各类量的运算规则和技巧，应该注意其中的传承和拓展关系，联系实际问题体验其内涵及内在联系，这样有助于由简入深地理解、记忆和掌握各类数或量的代数学规律。

1.2.1 运算法则

1.数乘

(1)数乘矢量

设 $\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{b}=b_i\boldsymbol{e}_i$，若 $\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}$，$\alpha$ 是数量，则

$$b_i=\alpha a_i \tag{1-16}$$

(2)数乘张量

设 $\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{S}=S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，若 $\boldsymbol{T}=\alpha\boldsymbol{S}$，$\alpha$ 是数量，则

$$T_{ij}=\alpha S_{ij} \tag{1-17}$$

2.加法

(1)矢量

若 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则

$$c_i=a_i+b_i \tag{1-18}$$

(2)张量

若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}$，则

$$B_{ij}=T_{ij}+S_{ij} \tag{1-19}$$

3.点乘

(1)矢量点乘

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(b_j\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i \tag{1-20}$$

点乘只对两个具有相同阶数的矢量才有意义。

(2)二阶张量点乘矢量

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=(T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)(a_k\boldsymbol{e}_k)=T_{ij}a_k\boldsymbol{e}_i\delta_{jk}=T_{ij}a_j\boldsymbol{e}_i$$

即

$$b_i=T_{ij}a_i \tag{1-21}$$

(3)二阶张量的迹

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=T_{ij}\delta_{ij}=T_{ii} \tag{1-22}$$

(4)二阶张量间点乘

记 $\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{S}=S_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l$，则

$$U = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \cdot S_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l = T_{ij}S_{jl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_l$$

即

$$U_{il} = T_{ij}S_{jl} \tag{1-23}$$

张量点乘只对参与点乘运算的基矢具有相同阶数的两个二阶张量才有意义。

(5)二阶张量间双点乘

$$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{S} = (T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j) : (S_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l) = T_{ij}S_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} = T_{ij}S_{ij} \tag{1-24}$$

$$\boldsymbol{T} \cdot\cdot\, \boldsymbol{S} = (T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j) \cdot\cdot\, (S_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l) = T_{ij}S_{kl}\delta_{il}\delta_{jk} = T_{ij}S_{ji} \tag{1-25}$$

双点乘只对具有相同对应的阶数和排列的两个二阶张量才有意义。

(6)单位张量(1张量)点乘

$$\boldsymbol{1} = \delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

性质： $\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{1} = \boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{1} = \boldsymbol{A}$

4. 并乘

(1)矢量并乘

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} = (a_i\boldsymbol{e}_i)(b_j\boldsymbol{e}_j) = a_ib_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \quad T_{ij} = a_ib_j \tag{1-26}$$

(2)矢量并乘张量

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{aT} = (a_i\boldsymbol{e}_i)(T_{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k) = a_iT_{jk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k \quad w_{ijk} = a_iT_{jk} \tag{1-27}$$

5. 叉乘

(1)置换张量

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & (i,j,k\text{ 中含有相同下标}) \\ 1 & (i,j,k\text{ 顺序排列}) \\ -1 & (i,j,k\text{ 逆序排列}) \end{cases} \tag{1-28}$$

(2)矢量叉乘

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_j\boldsymbol{e}_j) \times (b_k\boldsymbol{e}_k) = e_{ijk}a_jb_k\boldsymbol{e}_i$$

即

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} : (\boldsymbol{ab}) \tag{1-29}$$

易证

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k = e_{ijk}\boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{e}_i = \dfrac{1}{2}e_{ijk}\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k \end{cases} \tag{1-30}$$

应将此定义与熟知的叉乘右旋法则相联系。

6. 转置

(1)二阶张量的转置

设 $\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{S} = S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，若 $S_{ij} = T_{ji}$，称两张量互为转置，记作 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{S} = T_{ji}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = T_{ij}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i$。

性质 1:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}, & T_{ij}a_j=a_jT^{\mathrm{T}}_{ji} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{c}, & c_iT_{ij}=T^{\mathrm{T}}_{ji}c_i \end{cases} \tag{1-31}$$

性质 2:二阶张量

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A} \tag{1-32}$$

(2)对称、反对称张量

张量 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 称为对称张量(如应力、应变等),对称张量有相互正交的主方向;

张量 $\boldsymbol{T}=-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 称为反对称张量,其主对角线元素为零。张量可化为标准型

$$N=N_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+N_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+N_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\quad (N_1,N_2,N_3\ \text{称为张量主值}) \tag{1-33}$$

7.求逆

(1)张量求逆

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{1} \end{cases} \begin{cases} T_{ij}T^{-1}_{jk}=\delta_{ik} \\ T^{-1}_{ij}T_{jk}=\delta_{ik} \end{cases} \quad (\text{称 } \boldsymbol{T}^{-1}\text{与 } \boldsymbol{T}\text{ 互为逆张量}) \tag{1-34}$$

性质:交换律

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$$

反身律

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A} \tag{1-35}$$

(2)正交张量

$\boldsymbol{R}=R_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 对应正交系的转角变换。

性质 1:$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{1}$,即

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}^{-1} \tag{1-36}$$

性质 2:若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a}$,可证 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$,且 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{b})$,长度不变。

8.商判则

若某量与任一张量点乘为张量,此量必为张量。

如 $\boldsymbol{a}$ 为矢量,有

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \tag{1-37}$$

且 $b_i=b_{j'}\beta_{j'i}$,即 $\boldsymbol{b}$ 也是矢量,则 $\boldsymbol{T}$ 必为张量。

1.2.2 张量分解

1.加法分解(和分解)

(1)张量对称和分解

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{\Omega},\quad \begin{cases} \boldsymbol{N}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})(\text{对称}) \\ \boldsymbol{\Omega}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})(\text{反对称}) \end{cases} \tag{1-38}$$

(2)球张量、偏张量和分解

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{D}, \quad N_{ij} = P_{ij} + D_{ij}$$

其中

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{3} N_{kk} \boldsymbol{1} \tag{1-39}$$

对称分解在研究结构对称简化、运动分解时有用;球分解在研究应力作用效应时有用。

2.乘法分解(极分解)

二阶张量

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R}_2 \tag{1-40}$$

上式的前后两式分别称为右极分解和左极分解,其中,$\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 为正交张量。可证用 $\boldsymbol{T}$ 表示材料运动和变形时,$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}$ 为转角变换,表示材料转角刚体位移;$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 为对称正定张量,表示材料变形。

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{a} \tag{1-41}$$

前式表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 先变形后转角;后式表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 先转角后变形。

下面分析右极分解

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}) \cdot (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^2 \tag{1-42}$$

设 $\boldsymbol{T}$ 可逆,$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T}$ 正定($\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a} > 0; \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$)且对称。可写为

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{U}^2 (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0)$$

$$\boldsymbol{U} = \sqrt{\lambda_1} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 + \sqrt{\lambda_2} \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 + \sqrt{\lambda_3} \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3 \tag{1-43}$$

由 $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{R}$ 可求 $\boldsymbol{R}$,类似可求 $\boldsymbol{V}$。这一技术在研究大变形问题时使用。

1.3 张量分析

1.3.1 张量微分

1.标量微分学

设 $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ 为标量场。$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{i'}} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j} \dfrac{\partial x_j}{\partial x_{i'}} = \beta_{i'j} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ 为一矢量。

由算符 ∇(nabla),记

$$\begin{cases} \varphi \nabla = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{i'}} \boldsymbol{e}_{i'} \\ \nabla \varphi = \boldsymbol{e}_i \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \boldsymbol{e}_{i'} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{i'}} \end{cases} \tag{1-44}$$

可知 $\varphi\nabla=\nabla\varphi$,称其为标量 φ 的梯度(矢量)场。记

$$\begin{cases}(\varphi\nabla)_i=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\varphi\partial_i\\(\nabla\varphi)_i=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\partial_i\varphi\end{cases}\tag{1-45}$$

式中算子$\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$。

2.矢量微分学

(1)矢量梯度场

设 $\boldsymbol{V}(x_1,x_2,x_3)$为矢量场,$\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i$,则

$$\nabla\boldsymbol{V}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j=\frac{\partial}{\partial x_j}(V_i\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j=\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=V_{i,j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=(\nabla\boldsymbol{V})_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\tag{1-46}$$

矢量梯度$(\nabla\boldsymbol{V})_{ij}=\partial_iV_j$ 为二阶张量,且 $\boldsymbol{V}\nabla=(\nabla\boldsymbol{V})^{\mathrm{T}}$。

(2)矢量散度场

称 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\nabla)$为 V 的散度。

$$\begin{cases}\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}\nabla)=\boldsymbol{V}\cdot\nabla=\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x_j}\cdot\boldsymbol{e}_j=V_{i,j}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=V_{i,j}\delta_{ij}=V_{i,i}\\\mathrm{tr}(\nabla\boldsymbol{V})=\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x_i}\cdot\boldsymbol{e}_i=\partial_iV_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\partial_iV_j\delta_{ij}=\partial_iV_i\end{cases}\tag{1-47}$$

(3)矢量旋度场

记$\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{e}_i\times\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x_i}=\partial_iV_j\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\partial_iV_je_{ijk}\boldsymbol{e}_k$,则

$$\boldsymbol{V}\times\nabla=-\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x_j}\times\boldsymbol{e}_j=-V_{i,j}\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=-V_{i,j}e_{ijk}\boldsymbol{e}_k=-\nabla\times\boldsymbol{V}\tag{1-48}$$

3.张量微分学

记 $\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=T_{i'j'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}$,前述规则推广至张量,有

(1)梯度场

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}\nabla=\dfrac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k=T_{ij,k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k=T_{i'j',k'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}\boldsymbol{e}_{k'}\\\nabla\boldsymbol{T}=\partial_kT_{ij}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\partial_iT_{jk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k=\partial_{i'}T_{j'k'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}\boldsymbol{e}_{k'}\end{cases}\tag{1-49}$$

(2)散度场

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}\cdot\nabla=\dfrac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_k}\cdot\boldsymbol{e}_k=T_{ij,k}\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k)=T_{ij,j}\boldsymbol{e}_i\\\nabla\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_i\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_i}=\partial_iT_{jk}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k=\partial_iT_{ik}\boldsymbol{e}_k\end{cases}\tag{1-50}$$

(3)旋度场

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{T}\times\nabla=\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_k}\times\boldsymbol{e}_k=T_{ij,k}\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)=T_{ij,k}e_{jkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_l \\
\nabla\times\boldsymbol{T}=\partial_i T_{jk}(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_k=\partial_i T_{jk}e_{ijm}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_k
\end{cases}
\tag{1-51}
$$

1.3.2 张量的积分

设 $\boldsymbol{T}$ 是张量，v 为三维域，a 是其闭表面，$\boldsymbol{n}$ 是其外法矢，记 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$。可证 $\int_v \mathrm{d}v\,\nabla\cdot\boldsymbol{T}=\oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T}$，此公式称为 Green 公式。若 $\boldsymbol{\varphi}$ 为任意阶的张量场，易得

$$
\begin{cases}
\int_v \mathrm{d}v\,\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}=\oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\varphi}, \quad \int_v \mathrm{d}v\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla=\oint_a \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \\
\int_v \mathrm{d}v\,\nabla\boldsymbol{\varphi}=\oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\varphi}, \quad \int_v \mathrm{d}v\boldsymbol{\varphi}\nabla=\oint_a \boldsymbol{\varphi}\mathrm{d}\boldsymbol{a} \\
\int_v \mathrm{d}v\,\nabla\times\boldsymbol{\varphi}=\oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\varphi}, \quad \int_v \mathrm{d}v\boldsymbol{\varphi}\times\nabla=\oint_a \boldsymbol{\varphi}\times\mathrm{d}\boldsymbol{a}
\end{cases}
\tag{1-52}
$$

设 a 为开口曲面，l 是其闭边线，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 为弧元，l 与外法矢成右旋。可证 $\int_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{T})=\oint_l \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{T}$，此公式称为 Stokes 公式。可推广为

$$
\int_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\varphi})=\oint_l \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\varphi}, \quad \int_a(\boldsymbol{\varphi}\times\nabla)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=-\oint_l \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}
\tag{1-53}
$$

容易理解，张量的代数运算和微积分运算多可视为数量代数运算和微积分运算形式上的推广。