概率论与数理统计精讲精练

高等学校数学学习指导丛书

与浙江大学《概率论与数理统计》（第三版）同步

编著 谢贤衍

系统梳理知识体系
全面总结方法技巧
细致解答疑惑难点
精心配置分层练习

北京师范大学出版社

高 等 学 校
数学学习指导丛书

概率论与数理统计精讲精练

与浙江大学《概率论与数理统计》（第三版）同步

编著 谢贤衍

北京师范大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计精讲精练／谢贤衍编著.－北京：北京师范大学出版社，2007.03
ISBN 978－7－303－08037－3

Ⅰ.概…　Ⅱ.谢…　Ⅲ.①概率论－高等学校－教学参考资料－②数理统计－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第033791号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
出 版 人：赖德胜
印　　刷：北京京师印务有限公司
装　　订：三河小王各庄装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：184mm × 260 mm
印　　张：17
字　　数：432千字
印　　数：1～5 000
版　　次：2007年4月第1版
印　　次：2007年4月第1次印刷
定　　价：24.00元

责任编辑：王松浦　美术编辑：孙　琳
责任校对：李　菡　责任印制：董本刚

前言

概率论与数理统计是研究大量随机现象统计规律的数学学科，它是近代数学的重要组成部分，其理论与方法已广泛地应用于工业、农业、经济、军事和科学技术中．它又是信息论、控制论、可靠性理论和人工智能等新学科的理论基础．

在高等学校中，不仅理、工、农、医各专业学生需要学习它，而且经济管理类各专业的学生也需要学习这门课程．

由于这门科学理论上非常严谨，研究它的方法又有其独特之处，联系的知识面又广，所以，初学者往往感到它的基本概念抽象，定理深奥，习题难解，方法不易掌握．有的学生对某些习题望而生畏，不知从何入手．

其实，只要引导学生把基本概念的内涵搞清楚，揭示这门学科的内在规律，把握住关键性问题，启发学生的解题思路，在学习方法上加以指导，学生是可以学好这门课程的．基于这个目的，编者根据多年来的教学体会，编写了这本“概率论与数理统计精讲精练”，以教师的职责及爱心期望能帮助学生学好这门课程．

本书是以工科类各专业“概率论与数理统计”的教学大纲为准绳，以浙江大学的教材《概率论与数理统计》（第三版）为主要蓝本，兼顾到经济管理类各专业的较高要求的需要，并参考了近年来的考研题的基础上编写的．因此，本书选讲的例题内容多样、难易不一，讲解由简到难、由浅入深、分析透彻、文字通俗、解答详细、针对性强，既能满足本科生的阶段复习与提高，也能满足硕士生的入学考试前的复习．

全书共八章（见目录），各章由四个部分组成：

一、主要内容提要：用简练、通俗的语言，高度概括本章的基本

内容．读后不仅起到复习的作用，而且加深了各章、节知识的内在联系，使读者产生新的见解与体会，从中受益，得到提高．

二、设问答疑：根据编者的教学经验，针对学生在学习的过程中可能会提出来的疑难问题，或有目的地引导学生探索某些有意义的问题，精心拟定题目并作出解答．读者从这些解答中不仅能消除疑惑，而且能深化对基本内容的理解．

三、解题引导：编者以自编、改写内容丰富的典型题为例，通过详尽地分析，引导学生探索由“已知”到“结论”的思路．分析时，紧紧地与基本概念、定理挂钩，使读者领悟到分析问题的方法．解题过程严密．书中的例题有一定的难度，经分析与解答后，发人深醒．有很多例题是从编者最近十多年来的讲义中筛选出来的富有启发性的例题，能帮助学生拓宽思路．“题后话”帮助读者总结解题的经验，指出解本题的关键，告诉读者区别什么概念，进一步需要探索什么问题．“题后话”或许能使你思想豁然开朗，解题时能够举一反三．这部分内容占的篇幅最大．

四、综合练习：这部分题目内容浓缩了前面学习过的内容．学生通过“练习”检查自己对本章的内容掌握了什么，理解了什么，还存在什么问题，从而了解到自己提高了多少．

本书在编写过程中得到北京师范大学出版社编审同志的热情支持，特别是理科编辑室主任王松浦同志尽心尽责的工作尤使我敬佩．特此对他（她）们表示衷心地感谢．由于时间仓促、水平有限，对书中的可能不妥之处，恳请读者提出宝贵意见，以便再版时修改．

编著者

2007 年春　北京

目 录

第一章 概率论的基本概念

一、主要内容提要

1 随机试验、样本空间和事件

(1)随机试验　具有下述三个特点的试验称为随机试验:

①可以在相同条件下重复地进行;

②每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

③进行每次试验之前不能确定哪个结果会出现.

随机试验简称试验,记为 E.

(2)样本空间　随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,用 S 表示,样本空间的每个元素 ω,即 E 的每个可能结果称为样本点.

(3)事件　试验 E 的样本空间 S 中具有某种特性的样本点所组成的集合,即样本空间的子集,称为 E 的随机事件,简称事件,用 A,B,C_1,D_2 等表示.

样本空间的单个样本点 ω 组成的集合 $\{\omega\}$ 称为基本事件.

事件 A 所包含的样本点中有一个出现时,就称 A 发生.

S 是每次试验中一定会发生的事件,称为必然事件;不包含任何样本点的空集,是在每次试验中一定不会发生的事件,称为不可能事件,记为 $\varnothing$.

2 事件的关系、运算及运算律

设试验 E 的样本空间为 S,而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是它的子集(即 E 的事件).

(1)若 $A\subset B$,即 A 发生必然导致 B 发生,称为 A 包含于 B(或 B 包含 A),仍记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

(2)若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

(3)若 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互不相容(或互斥).

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都互不相容,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容.

(4)若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$,则称 A 与 B 互为逆事件,或互为对立事件.

记 A 的逆事件或对立事件为 $\overline{A}$.显然 $\overline{A}=S-A$,且 $\overline{S}=\varnothing,\overline{\varnothing}=S,\overline{\overline{A}}=A$.

(5)若 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=S,A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组.

显然,A 与 $\overline{A}$ 是一个完备事件组.

(6)$A\cup B$ 称为 A 与 B 的和事件.当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,$A\cup B$ 发生.

类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一

个发生;称$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和事件,表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生.

(7)$A\cap B$(或记为 AB)称为 A 与B 的积事件.当且仅当 A,B 同时发生时,$A\cap B$ 发生.

类似地,称$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为n 个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生;称$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积事件,表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生.

(8)$A-B$ 称为A 与B 的差事件.当且仅当 A 发生而B 不发生时,$A-B$ 发生.显然

$$A-B=A\overline{B}=A-AB.$$

(9)进行事件运算时,经常要用到下述定律:设 A,B,C 是试验E 的事件,则有

交换律:$A\cup B=B\cup A,AB=BA$;

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$;

分配律:$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C),A(B\cup C)=AB\cup AC$;

摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

3 概率的定义与性质

(1)设试验 E 的样本空间为S,对 S 的每个事件A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,如果$P(A)$满足下列3个条件,则称 $P(A)$为 A 的概率:

①对每个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$(非负性);

②$P(S)=1$(规范性);

③对两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$(即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$),有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k).$$

(2)概率有以下性质:设 $A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是试验E 的事件,则

①$P(\varnothing)=0$;

②当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容时,有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\text{(有限可加性)};$$

③当 $A\subset B$ 时,有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(A)\leqslant P(B);$$

④$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

⑤$P(\overline{A})=1-P(A)$;

⑥$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$,

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

以上公式称为概率的加法公式.

4 古典概型及其事件的概率

若试验 E 有如下两个特点,则称为古典概型:
①E 的样本空间 S 只有有限个样本点,即 $S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;
②E 的每个基本事件发生的可能性相同,即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})=\frac{1}{n}.$$

若 A 是古典概型 E 的包含了其中 k 个样本点的事件,则 $P(A)=\frac{k}{n}$.

5 条件概率

设 A,B 是事件,且 $P(A)>0$,则称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为 A 发生条件下 B 发生的条件概率.

条件概率 $P(\cdot|A)$ 符合概率定义中的 3 个条件,即
①对于每个事件 B,有 $P(B|A)\geqslant 0$;
②$P(S|A)=1$;
③对两两互不相容事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\mid A\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k\mid A),$$

所以,条件概率具有概率的一切性质.

6 概率的乘法公式

设 A,B 是事件,则有

$$P(AB)=\begin{cases}P(A)P(B|A), & P(A)>0,\\ P(B)P(A|B), & P(B)>0.\end{cases}$$

设 A,B,C 是事件,且 $P(ABC)>0$,则有

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件,且 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

7 事件的独立性

(1)设 A,B 是事件,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称 A,B 相互独立.若事件 A,B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 这三组事件也相互独立.

(2)设 A,B,C 是事件,如果它们满足

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\ P(AC)=P(A)P(C),\\ P(BC)=P(B)P(C),\end{cases}$$

则称 A,B,C 两两独立;如果 A,B,C 两两独立,且满足

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A,B,C 相互独立.

显然, A,B,C 相互独立必有 A,B,C 两两独立, 但反之未必成立.

8 全概率公式与贝叶斯公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一个完备事件组, 且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$, 则对事件 A, 有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)\quad(\text{全概率公式}).$$

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一个完备事件组, 且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$, 则对满足 $P(A)>0$ 的事件, 有

$$P(B_k\mid A)=\frac{P(B_k)P(A\mid B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}(k=1,2,\cdots,n)\quad(\text{贝叶斯公式}).$$

9 n 重贝努利试验及其事件的概率

设随机试验 E 在相同条件下, 重复进行 n 次, 每次试验的可能结果为 $A,\overline{A}$, 且 $P(A)=p(0<p<1)$, 并设各次试验出现的结果互不影响, 这样的 n 次独立重复试验称为 n 重贝努利试验.

在 n 重贝努利试验中, 事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_k(A)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n).$$

二、设 问 答 疑

问 1 三个事件至少有一个发生, 可以表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$, 也可以表示为 $A\cup B\cup C$, 为什么?

答 这是因为两者相等, 证明如下:

$$\begin{aligned}
&A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC\\
&=(A\overline{B}\,\overline{C}\cup AB\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}BC)\cup(\overline{A}\,\overline{B}C\cup A\overline{B}C)\cup(AB\overline{C}\cup ABC)\cup(A\overline{B}C\cup\\
&\quad ABC)\cup(\overline{A}BC\cup ABC)\\
&=A\overline{C}(\overline{B}\cup B)\cup\overline{A}B(\overline{C}\cup C)\cup\overline{B}C(\overline{A}\cup A)\cup AB(\overline{C}\cup C)\cup AC(\overline{B}\cup B)\cup BC(\overline{A}\cup A)\\
&=A\overline{C}\cup\overline{A}B\cup\overline{B}C\cup AB\cup AC\cup BC\\
&=(A\overline{C}\cup AC)\cup(\overline{A}B\cup AB)\cup(\overline{B}C\cup BC)\\
&=A(\overline{C}\cup C)\cup B(\overline{A}\cup A)\cup C(\overline{B}\cup B)=A\cup B\cup C.
\end{aligned}$$

问 2 设 A,B 为事件, 则 $AB,A\overline{B},\overline{A}B,\overline{A}\,\overline{B}$ 是否为一个完备事件组?

答 $AB,A\overline{B},\overline{A}B,\overline{A}\,\overline{B}$ 是一个完备事件组, 这是因为它们满足

(1)
$$\begin{aligned}
AB\cup A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}&=(AB\cup A\overline{B})\cup(\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B})\\
&=A(B\cup\overline{B})\cup\overline{A}(B\cup\overline{B})=A\cup\overline{A}=S;
\end{aligned}$$

(2) $(AB)(A\overline{B})=(AA)(B\overline{B})=A\varnothing=\varnothing$, 同样可得

$$(AB)(\overline{A}B)=\varnothing,\quad(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=\varnothing,\quad(A\overline{B})(\overline{A}B)=\varnothing,$$
$$(A\overline{B})(\overline{A}\,\overline{B})=\varnothing,\quad(\overline{A}B)(\overline{A}\,\overline{B})=\varnothing,$$

即 $AB, A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{A}\,\overline{B}$ 两两互斥.

问 3　如何计算事件 A, B 的和事件 $A \cup B$、积事件 AB 及差事件 $A-B$ 的概率?

答　使用概率加法公式 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 计算和事件 $A \cup B$ 的概率,特别当 A, B 互斥时, $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

使用概率乘法公式 $P(AB)=\begin{cases}P(A)P(B \mid A), P(A)>0, \\ P(B)P(A \mid B), P(B)>0\end{cases}$ 计算积事件 AB 的概率,特别当 A, B 相互独立时, $P(AB)=P(A)P(B)$.

使用概率减法公式 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ 计算差事件 $A-B$ 的概率,特别当 $B \subset A$ 时, $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

问 4　对事件 A, B, C, 当 $ABC=\varnothing$ 时, $P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$ 是否成立?

答　由图 1.1 可知, $ABC=\varnothing$ 未必能推出 A, B, C 两两互不相容,从而 $P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$ 未必成立.

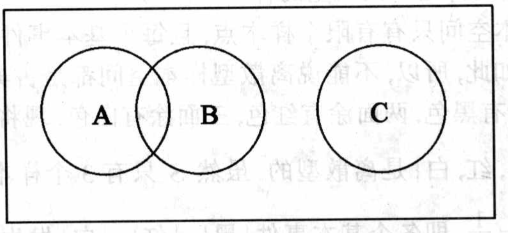

图 1.1

问 5　设 A, B 是事件,则 $P(AB)$ 与 $P(A \mid B)$ 有什么不同?

答　$P(AB)$ 是 A, B 同时发生的概率;而 $P(A \mid B)$ 是在 B 发生的条件下 A 发生的概率. 现以古典概型中的概率问题加以说明.

设 $S=\{a, b, c, d, e, f, g\}, A=\{a, b, c\}, B=\{b, c, d, e, f\}$. 由于 $AB=\{b, c\}$ 含有 2 个样本点,所以

$$P(AB)=\frac{AB \text{ 中含有的样本点个数}}{S \text{ 的样本点个数}}=\frac{2}{7}.$$

但是, $P(A \mid B)$ 必须在 $B=\{b, c, d, e, f\}$ 上进行考虑: B 中样本点个数为 5, B 中所含的 A 的 2 个样本点 b, c,所以

$$P(A \mid B)=\frac{B \text{ 中所含的} A \text{ 的样本点个数}}{B \text{ 的样本点个数}}=\frac{2}{5}.$$

因此,通俗地讲, $P(A \mid B)$ 是在"缩小了的样本空间 B"中 A 发生的概率.

问 6　设 A, B 是事件,则 A, B 相互独立与 A, B 互斥有何区别与联系?

答　两个事件的相互独立与互斥是从不同的角度定义的概念,其中 A, B 相互独立是从某事件的发生与否会不会影响到另一事件的发生概率的角度提出来的,而 A, B 互斥是从事件 A, B 是否有共同的样本点,即是否有同时发生的可能的角度提出来的.

但是这两个不同的概念也有一定的联系. 当 $P(A)>0, P(B)>0$ 时,(i)若 A, B 相互独立,则 A, B 不互斥;(ii)若 A, B 互斥,则 A, B 不相互独立. 现证明如下:

(i)若 A, B 相互独立,则 $P(B \mid A)=P(B)>0$,所以 $P(AB)=P(A)P(B \mid A)>0$,由此得到 $AB \neq \varnothing$,即 A、B 不互斥.

(ii)命题(ii)是命题(i)的逆否命题.于是由(i)正确得到(ii)也正确.

问7 “有放回抽取”与“无放回抽取”在概率上有何区别?

答 举例说明如下:

一批产品有 N 件正品,M 件次品.现从中抽取两次,每次取1件.

设 $A_i=\{$第 i 次取得正品$\}$, $i=1,2$.

(i)有放回抽取:

由 $P(A_2|A_1)=P(A_2|\overline{A_1})=\dfrac{N}{M+N}$ 知,第1次抽取结果不影响“第2次取得正品”的概率.

(ii)无放回抽取:

由 $P(A_2|A_1)=\dfrac{N-1}{M+N-1}$, $P(A_2|\overline{A_1})=\dfrac{N}{M+N-1}$ 知,第1次抽取结果影响“第2次取得正品”的概率.

问8 离散型样本空间都是古典概型的样本空间吗?

答 古典概型的样本空间只有有限个样本点,且每个基本事件发生的概率都相等,但离散型样本空间未必都能如此,所以,不能说离散型样本空间都是古典概型样本空间.例如,一个正六面体,其中一面涂有黑色,两面涂有红色,三面涂有白色,现将其投掷一次,则这个随机试验的样本空间 $S=\{$黑,红,白$\}$ 是离散型的.虽然 S 只有3个样本点,但是 $P(\{黑\})=\dfrac{1}{6}$, $P(\{红\})=\dfrac{1}{3}$, $P(\{白\})=\dfrac{1}{2}$,即各个基本事件$\{$黑$\}$,$\{$红$\}$,$\{$白$\}$发生的概率并不相等,从而 S 不是古典概型.

三、解 题 引 导

事件及其概率的题大致可分为4类:

1 样本空间和事件运算

例1.1 用事件 A,B,C 表示下列事件:

(1)A,B,C 不都发生(记为 F);

(2)A,B,C 都不发生(记为 G);

(3)A,B,C 至少有两个不发生(记为 H);

(4)A,B,C 至多有一个不发生(记为 I).

解 (1)A,B,C 不都发生,即至少有一个不发生,所以 $F=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

(2)A,B,C 都不发生,即 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 同时发生,所以 $G=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(3)A,B,C 至少有两个不发生,即 $\overline{A}\,\overline{B},\overline{A}\,\overline{C},\overline{B}\,\overline{C}$ 至少有一个发生,所以 $H=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$.

(4)A,B,C 至多有一个不发生,即为 A,B,C 中至少有两个发生,或者理解为 AB,AC,BC 中至少有一个发生,所以 $I=AB\cup AC\cup BC$.

例1.2 袋里有3个球,它们分别标号1,2,3.试根据下列3种不同的随机试验,写出对

应的样本空间：

(1)从袋中任取 1 球且不放回，再从袋中任取 1 球，记录取球的结果；

(2)从袋中任取 1 球后放回，再从袋中任取 1 球，记录两次取球的结果；

(3)一次从袋中任取 2 个球，记录取球的结果．

解　(1)由于不放回地依次取两次球，所以两次取得的球号不可能重复．从而样本空间为

$$S_1=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}.$$

(2)由于有放回地依次取两次球，所以两次取得的球的标号可以相同．从而样本空间为

$$S_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

(3)因为一次取 2 个球，所以取得的球不分先后，只有标号的区别，$(1,2)$与$(2,1)$是同一个样本点．从而样本空间为

$$S_3=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}.$$

例 1.3　从一批含有正品、次品的产品中，随机地取 5 个产品，用 ω_1 表示其中的正品数，用 ω_2 表示其中的次品数，求以(ω_1,ω_2)为样本点的样本空间 S 及“所取的 5 个产品中至多有 2 个正品”的对立事件．

解　由于 $\omega_1+\omega_2=5$，所以

$$S=\{(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}.$$

记 $A=\{$所取的 5 个产品中至多有 2 个正品$\}$，则 $A=\{(0,5),(1,4),(2,3)\}$，所以 A 的对立事件 $\overline{A}=\{(3,2),(4,1),(5,0)\}$，即 $\overline{A}=\{$所取 5 个产品中至少有 3 个正品$\}=\{$所取 5 个产品中至多有 2 个次品$\}$．

2 计算古典概型中事件的概率

掌握这类事件的概率计算，是学好本章的基础，其中涉及较多的排列组合的计算．

例 1.4　李、刘、赵、王、张 5 人站成一排照相，求王、张 2 人必须相邻排列且张在王的右边的概率．

解　把 5 人的不同排法看作样本点，则样本点的个数为 A_5^5 个．按照题中要求，即将王、张相邻排列，且张在王的右边的不同排法应等于将王、张看成一个人，与李、刘、赵去排队的不同排法种数 A_4^4．因此所求的概率为 $P=\dfrac{A_4^4}{A_5^5}=\dfrac{1}{5}$．

例 1.5　北京的电话号码由 8 位数字组成，且前两位不含 0，它的后 6 位可以是由 $0,1,2,\cdots,9$的任一个数字组成．求电话号码由完全不同的数字组成的概率．

解　前两位不含 0，只能从 $1,2,\cdots,9$ 数字中可重复地选 2 个排列，共有 9^2 种不同排列法；后 6 位从 $0,1,2,\cdots,9$ 数字中可重复地选 6 个排列，共有 10^6 种不同排列法．因此电话号码总共有 $9^2\times10^6$ 个．

“由完全不同数字所组成的电话号码”可以这样组成：前两位从不含 0 的 9 个数字中任选两个作不重复排列，有 A_9^2 种不同排列法；后 6 位不能用前面用过的两个数字，它们是从包含 0 的 8 个数字中任选 6 个作不重复排列，共有 A_8^6 种不同排列法．因此这样电话号码总共有 $A_9^2\cdot A_8^6$个．

因此所求的概率为

$$P=\frac{A_9^2\cdot A_8^6}{9^2\times 10^6}=\frac{56}{3125}\approx 0.0179.$$

例 1.6 设每个人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的. 随机调查 $n(n\leqslant 365)$ 个人, 求:

(1) 他(她)们生日各不相同的概率 p_1;

(2) n 个人中至少有两人生日相同的概率 p_2.

解 (1) 由于 n 个人中的每一个人的生日都可能是 365 天中的任一天, 所以 n 个人的生日共有 365^n 种, 而 n 个人各不相同的生日共有 A_{365}^n 种. 因此

$$p_1=\frac{A_{365}^n}{365^n}.$$

(2) "n 个人中至少有两个人生日相同"是"n 个人的生日各不相同"的对立事件, 所以

$$p_2=1-p_1=1-\frac{A_{365}^n}{365^n}.$$

例 1.7 有 n 个人, 每个人都以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 被分配在 $N(n\leqslant N)$ 间房间的任一间中, 试求"某个指定房间中恰有 $m(m\leqslant n)$ 个人"这一事件 A 的概率.

解 n 个人等可能地分配到 N 个房间共有 N^n 种不同分配方法. 某个指定的房间要分配进去 m 个人, 这 m 个人从 n 个人中选共有 C_n^m 种不同选法, 剩下的 $n-m$ 个人, 等可能地分配到剩下的 $N-1$ 间房中, 共有 $(N-1)^{n-m}$ 种不同分配方法, 从而要使"某个指定房间中恰有 m 个人"共有 $C_n^m(N-1)^{n-m}$ 种不同分配方法. 所以

$$P(A)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

注 每一个人分配到这 N 个房间中的任一间是一次随机试验, n 个人分配到这 N 个房间中去是 n 次独立重复试验. 由于 $B=\{$每一个人分配到某个指定房间$\}$ 的概率 $P(B)=\frac{1}{N}$, "某个指定房间中恰有 m 个人"即上述的 n 次独立重复试验中 B 恰好发生 m 次. 于是

$$P(A)=C_n^m\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}.$$

例 1.8 盒中有 6 种不同颜色的粉笔各一支, 现从中随机地每次取一支, 有放回地连续取 3 次, 求:

(1) 所取 3 次得到 3 支不同颜色粉笔的概率;

(2) 所取 3 次恰有 2 次得到相同颜色粉笔的概率;

(3) 所取 3 次至少有 2 次得到相同颜色粉笔的概率.

解 由于是有放回地取 3 次, 所以任取 3 次, 所取粉笔颜色共有 6^3 种不同情形:

(1) 记 $A=\{$所取 3 次得到不同颜色粉笔$\}$, 由于所取 3 次得到不同颜色粉笔共有 A_6^3 种不同情形, 所以

$$P(A)=\frac{A_6^3}{6^3}=\frac{5}{9}.$$

(2) 记 $B=\{$所取 3 次恰有 2 次得到的粉笔相同颜色$\}$, 如果所取 3 次中, 第一次和第二次