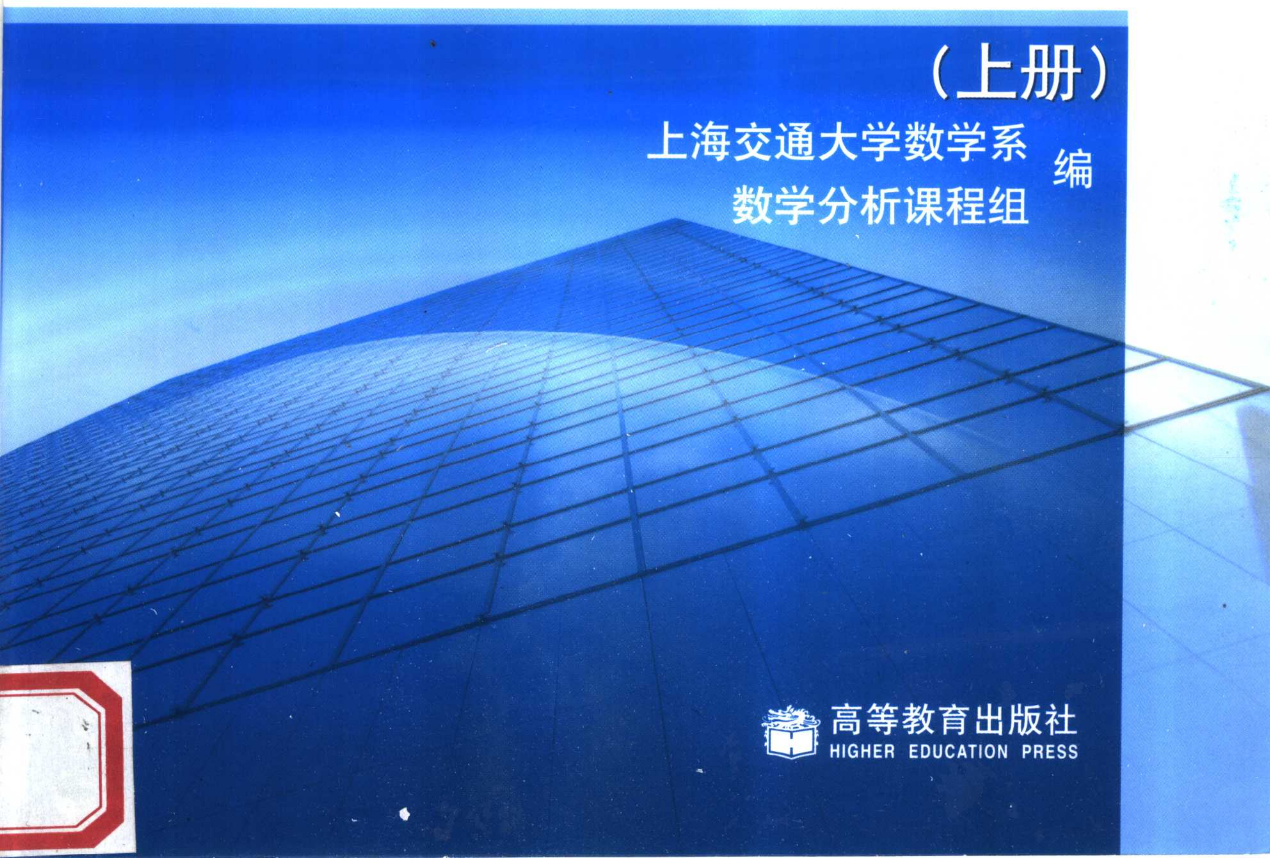
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学
数学分析

（上册）

上海交通大学数学系
数学分析课程组 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学

数学分析

（上册）

上海交通大学数学系
数学分析课程组　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材"大学数学"系列教材之一，本着培养高素质综合性人才，贯彻"工科专业、理科基础"的总体指导思想，特为计算机、电信、管理等工科专业学生编写的。

从总体框架和结构上看，教材仍保持数学分析课程的原貌，主要具有如下特色：作为定位于理科和工科之间的教材，在概念引入、方法应用与例题介绍中尽可能联系应用问题或借用工程实例；加强了对基本概念的分析训练，同时着重介绍定理和例题证明的分析思路，使学生能逐步学会和掌握数学证明的思想和方法；对数学分析的重要思想和典型方法予以充分关注，对课程难点适当予以分散；相当一部分内容出自编者们自己的教学研究成果和教学经验总结；例题与习题都经过精选，有不少选自新引进的国外教材以及近年来本校和其他高校的考试题、考研题，题型较为新颖，覆盖面广。

本书为上册，内容包括集合与函数、极限与连续、实数及连续性、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、广义积分等八章。教材力图既体现数学分析本身的系统性、严密性，又符合好看易学、简洁精练的原则，使之既能适用于具有较高数学基础要求的非数学类专业，同时也可以作为数学专业的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学．数学分析．上册／上海交通大学数学系数学分析课程组编．—北京：高等教育出版社，2007.5
ISBN 978-7-04-021207-5

Ⅰ.大… Ⅱ.上… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材②数学分析－高等学校－教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 038827 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宝旺印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787 × 960　1/16	版　　次	2007 年 5 月第 1 版
印　　张	19.75	印　　次	2007 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	370 000	定　　价	20.90 元

物料号　21207-00

前　言

数学分析是近代数学的基础，在科学技术中有着广泛的应用。作为高校数学专业重要的入门课程之一，它对于后续课程的学习乃至对学生素质的训练和培养起着举足轻重的作用。

随着时代进步和形势发展，科技创新成果和科学创新理论中的数学含量日益凸现和增强，数学分析也由昔日的“王榭堂前燕”开始飞入“寻常百姓家”，为更多非数学类专业的科技工作者所了解和熟悉，而数学分析在对学生思想训练中起到的作用也越来越受到人们重视。

上世纪80年代中期，本校开设了教改试点班和本硕联读班。本着培养高素质综合性人才，贯彻“工科专业、理科基础”的总体指导思想，学校从一开始就将数学分析作为主课导入部分工科专业的课程计划，以加强学生对数学思想与方法的认识，强化对学生的逻辑思维与科学规范的训练。近年来，数学分析的授课范围更延展到多个院系，并且还有进一步扩大的势头。

这一教改举措取得明显成效，不但提升了非数学类专业学生的数学水平，更培养了这些学生严谨、细致的作风和对新事物执著的探索精神。

由于授课对象、教学时数以及对课程的具体要求各有不同，本书编者们在长期教学实践的基础上对现有的教材作了细致比较与取舍，集众家之长，抒一己之见，经两年多时间的努力反复推敲终成此书。

我们编写本书的指导思想是，力图使教材既体现数学分析本身的系统性、严密性，又符合好看易学、简洁精练（全部内容在两学期内用216学时授完（含空间解析几何与常微分方程初步），其中带*号的为选学部分，可灵活掌握）的原则，使之既能适用于要求具有较高数学基础的非数学类专业，同时也可以作为数学专业的学习参考书。

基于这一思想，编者们对课程内容作了精心安排与挑选，力求内容有新意，方法有典型性和启发性。对一些基本概念和重要问题，就我们所想到的作了必要的注记：说明问题的背景，解题思想的分析，应注意的关键之点以及与其他内容的联系等等。

在总体框架和结构上，我们仍保持了数学分析课程原有的风貌，也不打算在基础训练阶段过多地引入更深刻的后续课程内容，但在以下几个方面我们作了很大的努力：

一、作为定位于理科和工科之间的教材，在概念引入、方法应用与例题介绍中都尽可能联系应用问题或借用工程实例。比如，在引进曲边梯形面积概念时，不惜花费较多笔墨加以描述，以使学生对定积分概念以及可积性条件有比较自然的理解，同时又在其后的定积分应用中作必要的呼应。

二、加强了对基本概念的分析训练，同时着重介绍定理和例题证明的分析思路，使学生能逐步学会和掌握数学证明的思想和方法。此外，习题配置既保证相当数量，难度上也呈梯次递进，以保证足够的训练量和训练强度，并且兼顾到各类学生的实际需要。

三、对数学分析的重要思想和典型方法予以充分关注，对课程难点适当予以分散。比如，在函数极限介绍了 Heine 归并定理后，即用这一定理证明了一系列函数极限的性质，并在对原命题作推广后进一步用于 L'Hospital 法则的证明中。

闭区间上连续函数性质的证明，按通常的习惯做法是将它们全放在实数连续性定理这一章中，而本书是在课程开头已引入确界原理的条件下，提前用确界原理加以论证。其中“介值性”作为区间上连续函数性质已先行作了介绍，而后又用同一思想证明了闭区间上连续函数的“有界性”。这样处理的好处是减轻了后一章“实数连续性定理”的难度与强度，也使学生对如何用确界原理证明问题有所理解和熟悉。

四、相当一部分内容出于编者们自己的教学研究成果和教学经验总结。比如，用 Stolz 定理和 Heine 归并定理证明 L'Hospital 法则，证法十分简洁而不失严谨；用 Duhamel 定理（一个典型的定积分习题）直接导出定积分以及曲线、曲面积分中若干重要的计算公式，从而无须借助于“ε-δ”语言的繁复叙述；对某些典型例题处理方法的改进与简化等等。有些内容尽管略去繁复的证明（如 Euler 积分中 Γ 函数与 B 函数的转换公式），但指出了解决问题的不同思想与途径以及相关资料出处，可供有兴趣、有余力的学生进一步学习钻研。

值得指出的是，教材在个别问题处理上却是“舍近求远”，反其道而行之，比如，对定积分 Riemann 引理的介绍，我们没有采用常规的证法，而是将 $f(x)$ 先定义为常数，再定义为阶梯函数，最后定义为一般可积函数。由浅入深，由易转难，用前一结果论证后一问题。这并不仅仅是为了得出应用上更为广泛的推广命题，而是我们认为这更符合人们对客观规律的认识过程——从特殊到一般，从简单到复杂，从具体到抽象。

五、例题与习题都经过精选，有不少选自新引进的国外教材以及近年来本校和其他高校的考试题、考研题，题型较为新颖，覆盖面齐全。

在编排习题时，我们尽可能考虑和体现将其作为课程内容的延展。针对大一新生的特点，在本书上册（函数、极限、连续等章）特地安排了相似例题，以让学生从“模仿”入手逐步适应，再继而学习“创新”。此外，本书的概念和定理之

后一般都有补充说明,其中既有需要进一步叙述清楚的地方,也提供可深入思考的问题。

本教材由上海交通大学数学系数学分析课程组集体讨论定稿,乃兵、陈克应、陈贤峰、邵国年、汪静、章仰文、裘兆泰(以姓氏笔画为序)等同志参与编写。初稿完成后,以胶印讲义形式在本校电信学院、软件学院和管理学院经两轮使用,并根据反馈信息作了适当的增补和删改。数学系系主任王维克教授仔细审阅了全书,并提出不少中肯的意见,高等教育出版社的李艳馥以及本书责任编辑李华英等老师为本书出版付出辛勤的努力,在此一并表示衷心的感谢。

囿于编者们的经验和学识,尽管竭诚而为之,但仍难免挂一漏万,书中的错误与失当之处也自然难免,敬请专家与广大读者不吝指正。

编　者

2006 年 11 月于上海交通大学

目　录

第一章　集合与函数

数学是一门研究数量关系和空间形式的科学,数学分析是讲述变量间最本质的联系——函数理论的基础课程,是几乎所有后继数学课程的奠基石.在培养学生具有良好的数学素质方面,它所起的作用是任何其他课程都无法相比的.

1.1　集合及其运算

集合论是当今数学各个分支的理论基础,具有无可比拟的重要作用.在本节中我们只是初步介绍在本课程中所涉及的有关集合的一些基本概念.

1.1.1　集合的概念

所谓一个"集合"(或"集"),是指在一定范围内可以互相区别的事物的全体.构成一个集合的每一事物称为该集合的*元素*或*点*.

若 x 是构成集合 A 的事物之一,则称 A 含有 x,或称 x 属于 A,记作 $x\in A$.

若 x 不是构成集合 A 的事物,则称 A 不含有 x,或称 x 不属于 A,记作 $x\notin A$.

对事物 x 与集合 A 来说,关系"$x\in A$"与"$x\notin A$"中有且只有一个成立.

为了方便,我们引进所谓不含任何元素的集合,称之为空集,记为 $\varnothing$.

注意,一个集合中的各个元素必须是彼此互异的,在集合的表示中相同的元素只出现一次.

表示集合的方法通常有两种:枚举法与条件法.

例如,由 a,b,c 这三个字母组成的集合 A 可表示为

$$A=\{a,b,c\}.$$

又如,$\{x\mid x^2+1=0,x$ 为实数$\}=\varnothing$;$\{x\mid x^2+1=0,x$ 为复数$\}=\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\}$.

注意,$\{x\mid x$ 为高个子人$\}$不能表示集合,因为我们无法区分每一个具体的人是否为"高个子".

集合 $\{\varnothing\}$ 不是空集,该集合含有元素 $\varnothing$.

以下是本书中常见的一些集合的记号:

自然数集 $\mathbf{N}$①;整数集 $\mathbf{Z}$;有理数集 $\mathbf{Q}$;实数集 $\mathbf{R}$;正实数集 $\mathbf{R}_+$.

若集合 A 由 n 个元素组成,此处 n 是一个确定的自然数,则称 A 为有限集;特别地,当 $n=1$ 时,即仅由一个元素组成的集合称为单点集.

不是有限集的集合称为无限集.

若无限集 A 中元素可根据某一规律按序表示为

$$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\},$$

则称之为可列集.

不是可列集的无限集称为不可列集.

例 1 证明有理数集是可列集.

证明 有理数集 $\mathbf{Q}$ 中每个元素均可表示为 $x=\frac{p}{q}$,其中 $p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}$,且互质. 现将满足 $q+|p|=n,n=1,2,\cdots$ 的所有有理数 $\frac{p}{q}$ 作一一排列,满足 $q+|p|=1$ 的有理数只有一个 0;满足 $q+|p|=2$ 的有理数只有 $\frac{1}{1},\frac{-1}{1}$ 两个;满足 $q+|p|=3$ 的有理数为 $\frac{2}{1},\frac{-2}{1},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}$ 四个;……;满足 $q+|p|=n$ 的有理数为 $\frac{n-1}{1},\frac{-(n-1)}{1},\frac{n-2}{2},\frac{-(n-2)}{2},\cdots,\frac{1}{n-1},\frac{-1}{n-1}$ 共 $2(n-1)$ 个;……. 这样可将有理数集 $\mathbf{Q}$ 中元素按此规律无一遗漏地一一排列出来,故有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列集.

1.1.2 若干逻辑记号

设 P,Q 为两个命题.

"$P\Rightarrow Q$"表示"由命题 P 可推出命题 Q",或"P 蕴涵 Q",此时称 P 为 Q 的充分条件,相应地称 Q 为 P 的必要条件.

"$P\Leftrightarrow Q$"表示"$P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow P$",此时称 Q 为 P 的充要条件,即 $P\Rightarrow Q$ 为必要性,$Q\Rightarrow P$ 为充分性.

记号"$\exists$"意指"存在";记号"$\forall$"意指"每一个"、"任意的"或"任意给定的";记号":"意指"有"或"使得".

例如,可将命题"对任意 $M>0$,存在 $n\in\mathbf{N}$,使得 $|x_n|\geqslant M$"用逻辑记号简单表述为"$\forall M>0,\exists n\in\mathbf{N}:|x_n|\geqslant M$".

命题 P 的否命题称为 P 的否,记为 $\neg P$,$\neg P$ 的正面叙述在以后的学习中是非常有用的.

现设命题 P 为"对任意 $M>0$,存在 $n\in\mathbf{N}$,使得 $|x_n|\geqslant M$",我们先试着将 P

① 本书中的自然数集 $\mathbf{N}$ 不包含零.

的否命题写出：

$\neg P$ 应为"并非对所有 $M>0$，都存在 $n\in\mathbf{N}$，使得 $|x_n|\geqslant M$"，即"存在 $M>0$，不存在 $n\in\mathbf{N}$，使得 $|x_n|\geqslant M$"，即"存在 $M>0$，对任意 $n\in\mathbf{N}$，使得 $|x_n|<M$".

再用逻辑记号分别表示 P 和 $\neg P$，则有

$$P\text{ 为“}\forall M>0,\exists n\in\mathbf{N}:|x_n|\geqslant M\text{”}.$$

$$\neg P\text{ 为“}\exists M>0,\forall n\in\mathbf{N}:|x_n|<M\text{”}.$$

一般地，一个命题的否命题的正面叙述用逻辑记号表示遵循如下规律：首先将原命题 P 用逻辑记号表示，而否命题 $\neg P$ 只要将 P 中的"$\forall$"改为"$\exists$"，"$\exists$"改为"$\forall$"，并将最后结论改成否定形式即可.

为进一步熟悉逻辑记号的运用，下面我们看几个简单命题的证明.

例 2 设 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $a\leqslant b\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0:a<b+\varepsilon$.

证明 "$\Rightarrow$"为显然. 下面用反证法证明"$\Leftarrow$". 事实上，若 $a>b$，则

$$\exists\varepsilon=\frac{a-b}{2}>0:a>\frac{a+b}{2}=b+\varepsilon.$$

由此即得所证.

例 3 设 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $a\leqslant b\Leftrightarrow\forall n\in\mathbf{N}:a<b+\dfrac{1}{n}$.

证明 由例 2，我们只需证明

$$\forall\varepsilon>0:a<b+\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad\forall n\in\mathbf{N}:a<b+\frac{1}{n}.$$

"$\Rightarrow$"为显然. 下证"$\Leftarrow$". 事实上，

$$\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbf{N}:n>\frac{1}{\varepsilon}\quad\Rightarrow\quad 0<\frac{1}{n}<\varepsilon\quad\Rightarrow\quad a<b+\frac{1}{n}<b+\varepsilon.$$

例 4 设 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $a=b\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0:|a-b|<\varepsilon$.

证明 事实上，$a=b\quad\Leftrightarrow\quad|a-b|=0\quad\Leftrightarrow\quad|a-b|\leqslant 0$

$$\Leftrightarrow\quad\forall\varepsilon>0:|a-b|<\varepsilon\text{（由例 2）}.$$

在以上的证明中，注意以下三点：

(1) 在例 2 的充分性证明中，事实上是证明了与原命题等价的逆否命题，即

$$\text{“}Q\Rightarrow P\text{”}\quad\Leftrightarrow\quad\text{“}\neg P\Rightarrow\neg Q\text{”}.$$

这是一种常用的证明方法.

(2) 在例 3 的证明中，我们利用了等价关系的所谓"传递性"，即

$$\text{“}P\Leftrightarrow R\text{”且“}Q\Leftrightarrow R\text{”}\quad\Rightarrow\quad\text{“}P\Leftrightarrow Q\text{”}.$$

同时，例 3 证明中所得的等价关系本身也很重要.

(3) 在例 4 的证明中，我们利用了例 2 的结论，这种探究"已知"与"未知"的联系、"由点及面"的思考方法值得重视.

1.1.3 集合的相等与包含关系

若集合 A 的元素均为集合 B 的元素，即

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B,$$

则称 A 为 B 的子集，并称 A 包含于 B，或 B 包含 A，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

若 A 与 B 的元素完全一致，即

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in B,$$

则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称 A 为 B 的真子集.

规定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

关系“$\subset$”满足：

(1) $A \subset A$;

(2) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则 $A = B$;

(3) 若 $A \subset B$, $B \subset C$，则 $A \subset C$.

1.1.4 集合的运算

由集合 A 中的所有元素与集合 B 中的所有元素所构成的集合称为 A 和 B 的并集，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由集合 A 和 B 的一切共有元素所构成的集合称为 A 和 B 的交集，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

特别地，若 $A \cap B = \varnothing$，即 A 和 B 无共有元素，则称 A 和 B 不相交.

由一切属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A \setminus B$，即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

若 $A \subset X$，则 $X \setminus A$ 称为 A 关于 X 的余集（或补集），记为 $\complement_X A$，如果没有必要标出 X，也可简记为 A^c. 由此可知，若 $A, B \subset X$，则有 $A \setminus B = A \cap B^c$.

关于“并”、“交”和“余”有以下运算性质：

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(4) 对偶律(De Morgan 公式) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1.1.5 集族

若集合 C 的元素本身都是集合 X 的子集，则称 C 为集合 X 上的一个集族.

设有一个集合 Λ(称为指标集),使得对于指标集 Λ 中的每一个元素 λ,有 X 的一个子集 A_λ 与之对应,这样就得到 X 上的一个集族

$$C=\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda, A_\lambda\subset X\},$$

简记为 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,称之为由指标集 Λ 所确定的 X 上的集族.

指标集 Λ 一般是一个数集,它可以是有限集,也可以是无限集,可以是可列集,也可以是不可列集. 例如,可以取 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$;$\Lambda=\mathbf{N}$;$\Lambda=[0,1]$ 中有理数;$\Lambda=[a,b]$ 等等. 假如我们设 $A_n=\left(a+\dfrac{1}{n}, b-\dfrac{1}{n}\right), n\in\mathbf{N}$, 记 $\Lambda=\mathbf{N}, X=(a,b)$,则 $C=\{A_n \mid n\in\Lambda, A_n\subset X\}$ 就是由指标集 $\Lambda=\mathbf{N}$ 所确定的 $X=(a,b)$ 上的一个集族.

对于由指标集 Λ 所确定的 X 上的集族中的元素,也可作相应的并与交运算,记为

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{a \mid \exists\,\lambda\in\Lambda \text{ 使得 } a\in A_\lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{a \mid \forall\,\lambda\in\Lambda \text{ 有 } a\in A_\lambda\}.$$

特别地,若 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$,则其并与交分别记为

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k \quad \text{与} \quad \bigcap_{k=1}^{n}A_k.$$

又若 Λ 为自然数集 $\mathbf{N}$,则记 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\{A_n\}$,其并与交分别记为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \quad \text{与} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

$\{A_n\}$ 通常称为集合序列,简称为集列.

若 n 为自然数,则记号 $\{A_k\}_{k\geqslant n}$, $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 以及 $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 的意义是显而易见的.

需要特别指出的是,在集族的表示中并不要求当 $\alpha\neq\beta$ 时有 $A_\alpha\neq A_\beta$,对集合序列也有同样的说明.

例 5 设 $A_n=\left\{x \,\middle|\, x\geqslant\dfrac{1}{n}\right\}=\left[\dfrac{1}{n},+\infty\right)(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\mathbf{R}_+$.

证明 由于 $\forall\, n\in\mathbf{N}: A_n\subset\mathbf{R}_+$,于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset\mathbf{R}_+$.

反之,

$$\forall\, x\in\mathbf{R}_+ \quad\Rightarrow\quad x>0 \quad\Rightarrow\quad \exists\, n\in\mathbf{N}: x\geqslant\frac{1}{n} \text{ 即 } x\in A_n$$

$$\Rightarrow \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_+ \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

例 6 设 $A_n = \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)(n = 1,2,\cdots)$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [a,b]$.

证明 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbf{N}: x \in A_n$ 即 $a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \quad a \leqslant x \leqslant b$，即 $x \in [a,b]$（由例 3）.

1.1.6 集合的直积(集)

设 A,B 是两个集合，令

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\},$$

称之为集合 A 和 B 的直积集(Cartesian 积集). 规定

$$(a_1,b_1) = (a_2,b_2) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 = b_2.$$

类似地，n 个集合 $A_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 的直积定义为

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_k \in A_k, k = 1,2,\cdots,n\}.$$

特别地，记 $\mathbf{R}^2$ 为平面上点 (x,y) 的全体；$\mathbf{R}^3$ 为空间中点 (x,y,z) 的全体.

例 7 设 $A = [a,b], B = [c,d], C = [e,f]$ 为三个闭区间，则

$$A \times B = [a,b] \times [c,d]$$

表示平面上的一个闭矩形；而

$$A \times B \times C = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$$

表示空间中的一个闭长方体.

类似地，$(a,b) \times (c,d)$ 表示平面上的开矩形；$(a,b) \times (c,d) \times (e,f)$ 表示空间中的开长方体.

习题 1.1

1. 证明：整数集 $\mathbf{Z}$ 为可列集.

2. 证明：

(1) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right) = \varnothing$； (2) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right] = \{0\}$； (3) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right) = [1,2]$；

(4) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n},3-\frac{1}{n}\right] = (1,3)$； (5) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},n\right] = (0,+\infty)$.

3. 对下列命题 P 用逻辑记号写出 $\neg P$ 的正面叙述：

(1) P 为 $\forall a \in A: a \in B$；

(2) P 为 $\forall k \in \mathbf{N}, \exists N_k \in \mathbf{N}, \forall n > N_k: |x_n - a| < \frac{1}{k}$.