离散数学

（第二版）

张汝元　张健清　谢　红　魏晴宇　编著

中国人民大学出版社

离散数学（第二版）

张汝元　张健清　谢　红　魏晴宇　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/张汝元编著．2版．
北京：中国人民大学出版社，2007
ISBN 978-7-300-08776-4

Ⅰ．离…
Ⅱ．张…
Ⅲ．离散数学-高等学校-教材
Ⅳ．O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 187312 号

离散数学（第二版）

张汝元　张健清
谢　红　$\boxed{\text{魏晴宇}}$　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京雅艺彩印有限公司	**版　　次**	1993 年 3 月第 1 版
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本		2007 年 12 月第 2 版
印　　张	29.75 插页 1	**印　　次**	2007 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	546 000	**定　　价**	38.00 元

前　言

离散数学是计算机科学和信息技术专业的必修课程。这门课程之所以称为离散数学，是因为它的内容虽然是数学，但相对于以微积分为代表的黎曼数学而言，它并不是从黎曼数学的连续概念出发，而是从离散的点集合开始的。另外，选编的内容由集合论、代数系统、数理逻辑和图论等数学分支组成，内容相当分散。从数学的角度看，离散数学各分支选编的内容与代数学、数理逻辑等专业课程相比，其深度和广度有限，从应用数学的角度看，离散数学又不像运筹学一样可以直接解决实际问题。实际上，计算机的出现促成了离散数学的诞生。由于计算机又促进了信息技术的发展和更新，所以离散数学成为了计算机科学和信息技术等专业的数学基础课。

中国人民大学信息学院的计算机系和信息工程与管理系一直将离散数学作为必修课程，实践证明，学习了离散数学，再学习其他专业课程，衔接比较自然，为学生进一步的学习奠定了基础。

本教材第一版于 1993 年出版，参加编写的老师有魏晴宇、张汝元、张健清.该版教材发行至今已经 10 多年，由于需要增加专业基础课程的强度，我们对第一版作了一系列的修改，增加了这本教材的广度和深度。第二版作者有张汝元、张健清、谢红。本教材仍然分为集合论、代数结构、数理逻辑和图论四部分，但调整了全书的章节，并在集合论中增加了“形式语言”一章；在代数结构中增加了“群码”一章；在数理逻辑中增加了“递归函数”一章；重新编写了“图论”共 12 章；其余各章都作了必要的修改和错误校正。

本教材是按 9 学分的课程编写的，如果只有 8 学分，有“※※”记号的章节可以不讲；如果只有 7 学分，有“※”和“※※”记号的章节都可以不讲；如果少于 7 学分，那么教师可酌情选取一些篇章进行教学。

目　　录

第一篇　集合论

第二篇 代数结构

第三篇 数理逻辑

第四篇　图　论

第一篇 集合论

集合这个概念在现代数学中非常重要，几乎所有数学分支都与集合论有关，我们关注集合论，不仅因为它是离散数学的基础，更重要的是它在其他许多学科中，特别是计算机科学和信息科学中要用到．我们只介绍集合论初步，而避免公理集合论的讨论．

我们先介绍集合论的符号并定义一些运算．在讨论了集合代数之后，再讲关系、有序和函数等概念．

第1章　集　合

1.1　集合的基本概念

集合是数学中最基本的概念之一，但是我们无法给集合下一个严格精确的定义，而只能作一个描述. 一般地讲，具有某种属性的事物，其全体就构成一个**集合**. 构成这个集合的那些事物，就称为该集合的**元**或**元素**. 根据所给的属性，我们总是能判断任一事物是否属于某个集合，而不会含糊不清.

例 1.1.1

(1) 某大学图书馆现存的全部图书资料.

(2) 1950 年出生于北京，现在仍然住在北京的所有人.

(3) 所有实数.

(4) 一个给定平面上的所有点.

在(1) 和(2) 中，虽然我们可能说不出集合中元的准确个数，但它总是有限的. 因此，我们称元的个数有限的集合为**有限集**. 在(3) 和(4) 中，集合中的元都是无限多个，这样的集合称为**无限集**.

我们通常用大写字母 A，B，C，… 来表示集合，而用小写字母 a，b，c，… 来表示集合的元.

表示一个集合的方法一般有两种:列举法和描述法.

列举法是列举集合中的元，将元用一对括号括起来，元之间用逗号隔开.

例 1.1.2　$S_1 = \{-1, 1\}$，$S_2 = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

这里 S_1，S_2 就是采用列举法表示的集合，S_1 是具有两个元(-1 和 1) 的集合，S_2 则表示所有正整数的集合.

列举法是有局限性的，有时甚至根本不能使用. 例如，无法用这种方法来表示例 1.1.1 的(3) 和(4). 因此，常常采用描述法:设 $P(x)$ 是一个与 x 有关的条件，凡满足这个条件的所有元 x 组成的集合 S 就表示为:

$$S = \{x \mid P(x)\}.$$

例 1.1.3

$$S_3 = \{ x \mid x^2 - 1 = 0 \};$$
$$S_4 = \{ x \mid -\infty < x < \infty \};$$
$$S_5 = \{ x \mid 5 < x < 1 \};$$
$$S_6 = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 9,\ x \text{ 是实数} \}.$$

这里 S_3，S_4，S_5，S_6 就是采用描述法表示的集合，S_3 和例 1.1.2 中的 S_1 相同，S_4 是所有实数的集合，S_5 中没有任何元，S_6 表示闭区间$[0,9]$中所有实数的集合.

从 S_5 可以看到，存在着这样的集合，它没有任何元. 这样的集合称为**空集**，空集用符号 $\varnothing$ 来表示.

从 S_6 可以看到，在有些场合，要求我们明确所讨论的对象的范围. 例如，这里就明确要求 x 是实数，否则也可能理解为 x 是整数. 如果 x 是整数，那就是另一个集合了，即由整数 0，1，2，…，9 所构成的集合. 实际上，对于任何一个集合，都有一个讨论对象的范围问题，即我们所说的元是在哪个范围中取，不过在不会引起误解时，我们不必去明确说它. 这个范围通常是用空间这个词来表示. 所以，空间是我们所讨论的所有元的集合. 如果我们讨论的是关于实数的某些性质，那么 S_4 就是我们的空间. 如果我们讨论的是某个平面上的几何图形，那么这个平面上的所有点的集合，就构成我们的空间. 空间用符号 E 来表示.

集合可以用文氏图(Venn Diagram) 来形象表示，即用矩形圈起来的平面上的点表示 E，用封闭曲线圈起来的点表示集合. 例如，图 1.1.1 就是集合$\{a, b, c, d\}$ 的文氏图.

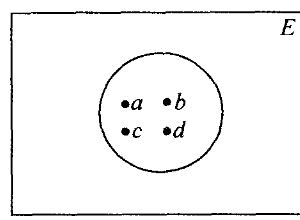

图 1.1.1

当给定集合 A 和空间中任一个元 x 时，如果 x 是集合 A 中的一个元，我们就称 x 是**属于** A 的，并记为 $x \in A$. 如果 x 不是 A 中的元，就称 x **不属于** A，并记为 $x \notin A$.

定义 1.1.1 给定集合 A 和 B，如果集合 A 的任何一个元都是集合 B 中的元，则称集合 A **包含于** B，或 B **包含** A，记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，并且称 A 为 B 的一个**子集**(见图 1.1.2).

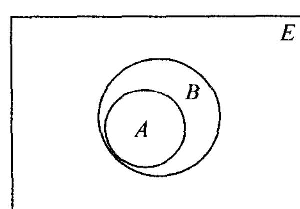

图 1.1.2

集合的包含关系具有传递性，即当 $A \subseteq B$，并且 $B \subseteq C$ 时，则有 $A \subseteq C$.

根据定义 1.1.1，对于任何集合 A，我们都有 $A \subseteq A$，并且当 $A \subseteq B$ 时，有

$x \notin B$，则 $x \notin A$.

对于空集 $\varnothing$，因为 $x \notin \varnothing$ 永远成立，所以对任何集合 A，都有 $\varnothing \subseteq A$，即空集是任何集合的子集.

如果集合 A 和 B 满足 $A \subseteq B$，但 B 中有元不属于 A，则称集合 A **真包含于** B，记为 $A \subset B$，并且称 A 为 B 的一个**真子集**.

定义 1.1.2 给定集合 A 和 B，如果 $A \subseteq B$，并且 $B \subseteq A$，则称 A，B 两集合**相等**，记为 $A = B$.

定义 1.1.3 给定集合 A，以 A 的所有子集为元构成一个集合，这个集合称为 A 的**幂集**，记为 $\rho(A)$ 或 2^A.

例 1.1.4 $A = \{a, b, c\}$，则

$$\rho(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

可以看出，当集合 A 中有 n 个元时，$\rho(A)$ 中有 2^n 个元.

习题 1.1

1. 根据子集的定义证明：若 $A \subseteq B$，并且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$.
2. 若 a 是集合 A 中的一个元，下列各式哪些是正确的？哪些是错误的？

$a \in A$ $\quad$ $a \in \{a\}$ $\quad$ $a \subseteq A$ $\quad$ $a \subset \{a\}$

$\{a\} \subseteq A$ $\quad$ $\{a\} \in A$ $\quad$ $\{a\} \subseteq a$

3. 下列各式哪些正确？哪些错误？

$\varnothing \in \{\varnothing\}$ $\quad$ $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ $\quad$ $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$

$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing\}\}$ $\quad$ $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$ $\quad$ $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$

1.2 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差、补和对称差.

定义 1.2.1 设 A 和 B 是两个集合，则包含 A 和 B 的所有元，但不包含其他元的集合，称为 A 和 B 的**并集**，记为 $A \cup B$.

图 1.2.1 是 $A \cup B$ 的文氏图.

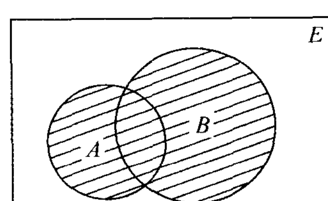

图 1.2.1

例 1.2.1 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{3, 4, 5, 6\}$，则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

对于集合的并，我们可以证明下列性质成立. 对任何集合 A，B，C，D，有：

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$；

(2) 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；

(3) 等幂律　$A \cup A = A$；

(4) 同一律　$\varnothing \cup A = A$；

(5) $A \subseteq A \cup B$；

(6) 若 $A \subseteq C$，并且 $B \subseteq C$，则 $A \cup B \subseteq C$；

(7) 若 $A \subseteq C$，并且 $B \subseteq D$，则 $A \cup B \subseteq C \cup D$；

(8) $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $A \cup B = B$.

以上这些性质的证明容易从定义得到，作为例子，我们证明(7) 和(8).

(7) 的证明：

证　设 $x \in A \cup B$，由并集的定义，$x \in A$ 或 $x \in B$.

由于 $A \subseteq C$，所以 $x \in A$ 时，有 $x \in C$；

由于 $B \subseteq D$，所以 $x \in B$ 时，有 $x \in D$，即 $x \in C \cup D$.

所以

$$A \cup B \subseteq C \cup D.$$

(8) 的证明：

证　必要性.

设 $x \in A \cup B$，由并集的定义，$x \in A$ 或 $x \in B$.

由于 $A \subseteq B$，所以 $x \in A$ 时，有 $x \in B$，因此 $x \in A \cup B$ 时，有 $x \in B$，即 $A \cup B \subseteq B$.

由并集的性质(5) 可得 $B \subseteq A \cup B$. 再由集合相等的定义，得 $A \cup B = B$，即

$$A \subseteq B \text{ 时，有 } A \cup B = B.$$

充分性.

由 $A \cup B = B$，得 $A \cup B \subseteq B$，即 $x \in A$ 或 $x \in B$ 时，有 $x \in B$.

所以 $x \in A$ 时，有 $x \in B$，即 $A \subseteq B$.

所以 $A \cup B = B$ 时，有 $A \subseteq B$.

定义 1.2.2　A 和 B 是两个集合，包含 A 和 B 的所有公共元，但不包含其他元的集合，称为 A 和 B 的**交集**，记为 $A \cap B$.

图 1.2.2 是 $A \cap B$ 的文氏图.

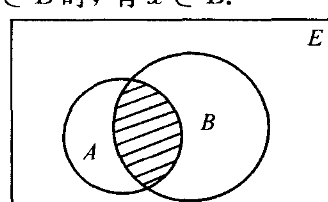

图 1.2.2

例 1.2.2　$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，则 $A\cap B=\{3, 4\}$；

对于集合的交，我们可以证明下列性质成立. 对任何集合 A，B，C，D，有：

(1) 交换律　$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 等幂律　$A\cap A=A$；

(4) 空集律　$\varnothing\cap A=\varnothing$；

(5) $A\cap B\subseteq A$；

(6) 若 $A\subseteq B$，并且 $A\subseteq C$，则 $A\subseteq B\cap C$；

(7) 若 $A\subseteq C$，并且 $B\subseteq D$，则 $A\cap B\subseteq C\cap D$；

(8) $A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $A\cap B=A$.

定义 1.2.3　A 和 B 是两个集合，如果它们满足 $A\cap B=\varnothing$，则称集合 A 和 B 是**不相交的**.

对于集合的并和交，可以证明下列性质成立：

(1) 吸收律　$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$；

(2) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

并集和交集的定义都不难推广到任意有限多个集合，甚至无限多个集合的情形. 也就是说，若 A_1，A_2，…，A_n，… 是集合，则可以类似地定义：

$$S_1=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n;$$

$$S_2=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n;$$

$$S_3=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots;$$

$$S_4=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots.$$

定义 1.2.4　A 和 B 是两个集合，属于 A 而不属于 B 的所有元构成的集合，称为 A 和 B 的**差集**，记为 $A-B$.

图 1.2.3 是 $A-B$ 的文氏图.

例 1.2.3

$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，

则　$A-B=\{1, 2\}$，$B-A=\{5, 6\}$.

对于集合的差，我们可以证明下列性质成立. 对任何集合 A，B，C，D，有：

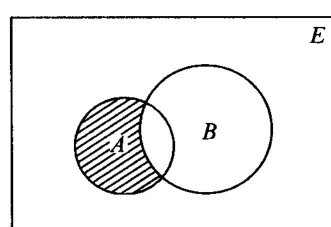

图 1.2.3

(1) $A-B\subseteq A$;

(2) 若 $A\subseteq B$，并且 $C\subseteq D$，则 $A-D\subseteq B-C$;

(3) 若 $C\subseteq D$，则 $A-D\subseteq A-C$;

(4) $A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $A-B=\varnothing$.

对于集合的并、交、差运算，还具有下列一些性质：

(1) 德·摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$,

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$;

(2) $A\cup(B-A)=A\cup B$;

(3) 若 $A\subseteq B$，则 $A\cup(B-A)=B$;

(4) $A-(A-B)=A\cap B$;

(5) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$.

定义 1.2.5 若 A 是空间 E 中的集合，则 E 中所有不属于 A 的元构成的集合称为 A 的**补集**，记为 A'.

图 1.2.4 是 A' 的文氏图.

对于集合的补集，我们可以证明下列性质成立. 对于空间 E 中的任何集合 A，B，有：

(1) $E\cup A=E$, $E\cap A=A$,

$E'=\varnothing$, $\varnothing'=E$, $(A')'=A$;

(2) $A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $B'\subseteq A'$;

(3) $A\cup A'=E$, $A\cap A'=\varnothing$;

(4) 德·摩根律 $(A\cup B)'=A'\cap B'$,

$(A\cap B)'=A'\cup B'$;

(5) $A-B=A\cap B'$;

(6) $A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $A\cap B'=\varnothing$,

$A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $A'\cup B'=A'$.

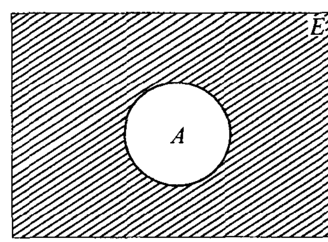

图 1.2.4

定义 1.2.6 A 和 B 是两个集合，则定义 A 和 B 的**对称差** $A\oplus B$ 为

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A).$$

图 1.2.5 是 $A\oplus B$ 的文氏图.

例 1.2.4

$$A=\{1, 2, 3, 4\},\ B=\{3, 4, 5, 6\},$$

则 $$A\oplus B=\{1, 2, 5, 6\}.$$

对于集合的对称差，我们可以证明下列性质成

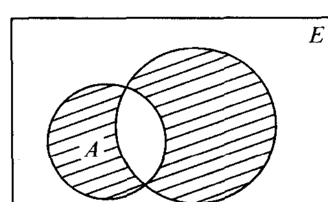

图 1.2.5