

离散数学

(第二版)

张汝元 张健清 谢 红 魏晴宇 编著

 中国人民大学出版社

0158/132

2007

离散数学

(第二版)

张汝元 张健清 谢 红 魏晴宇 编著

 中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

离散数学/张汝元编著. 2 版.
北京: 中国人民大学出版社, 2007
ISBN 978-7-300-08776-4

I. 离…
II. 张…
III. 离散数学-高等学校-教材
IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 187312 号

离散数学 (第二版)

张汝元 张健清
谢红 魏晴宇 编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京雅艺彩印有限公司	版 次	1993 年 3 月第 1 版
规 格	170 mm×228 mm 16 开本		2007 年 12 月第 2 版
印 张	29.75 插页 1	印 次	2007 年 12 月第 1 次印刷
字 数	546 000	定 价	38.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前 言

离散数学是计算机科学和信息技术专业的必修课程。这门课程之所以称为离散数学,是因为它的内容虽然是数学,但相对于以微积分为代表的黎曼数学而言,它并不是从黎曼数学的连续概念出发,而是从离散的点集合开始的。另外,选编的内容由集合论、代数系统、数理逻辑和图论等数学分支组成,内容相当分散。从数学的角度看,离散数学各分支选编的内容与代数学、数理逻辑等专业课程相比,其深度和广度有限,从应用数学的角度看,离散数学又不像运筹学一样可以直接解决实际问题。实际上,计算机的出现促成了离散数学的诞生。由于计算机又促进了信息技术的发展和更新,所以离散数学成为了计算机科学和信息技术等专业的数学基础课。

中国人民大学信息学院的计算机系和信息工程与管理系一直将离散数学作为必修课程,实践证明,学习了离散数学,再学习其他专业课程,衔接比较自然,为学生进一步的学习奠定了基础。

本教材第一版于1993年出版,参加编写的老师有魏晴宇、张汝元、张健清。该版教材发行至今已经10多年,由于需要增加专业基础课程的强度,我们对第一版作了一系列的修改,增加了这本教材的广度和深度。第二版作者有张汝元、张健清、谢红。本教材仍然分为集合论、代数结构、数理逻辑和图论四部分,但调整了全书的章节,并在集合论中增加了“形式语言”一章;在代数结构中增加了“群码”一章;在数理逻辑中增加了“递归函数”一章;重新编写了“图论”共12章;其余各章都作了必要的修改和错误校正。

本教材是按9学分的课程编写的,如果只有8学分,有“※※”记号的章节可以不讲;如果只有7学分,有“※”和“※※”记号的章节都可以不讲;如果少于7学分,那么教师可酌情选取一些篇章进行教学。

目 录

第一篇 集合论

第 1 章 集合	3
1.1 集合的基本概念	3
1.2 集合的运算	5
1.3 包含排斥原理	9
第 2 章 二元关系	12
2.1 关系	12
2.2 关系矩阵和关系图	16
2.3 关系的运算	20
2.4 闭包运算	23
2.5 等价关系和相容关系	28
2.6 偏序关系	33
第 3 章 函数和运算	37
3.1 函数	37
3.2 运算	42
第 4 章 无限集合	45
4.1 基数	45
4.2 可列集	47
4.3 不可列集	50
4.4 基数的比较	52
※第 5 章 形式语言	57
5.1 文法和语言	57
5.2 文法的类型	62

第二篇 代数结构

第1章 代数系统	69
1.1 代数系统的实例和一般性质	69
1.2 同态和同构	73
1.3 商代数与积代数	80
第2章 半群和群	84
2.1 半群和有么半群	84
2.2 群和循环群	88
2.3 二面体群、置换群	92
2.4 子群、群的同态	98
2.5 陪集、正规子群、商群	101
第3章 格和布尔代数	106
3.1 格	106
3.2 布尔代数	114
3.3 其他代数系统	121
第4章 群码	125
4.1 通信模型和错误校正的基本概念	125
4.2 二进制编码	128
4.3 解码和错误校正	136

第三篇 数理逻辑

第1章 命题演算	147
1.1 命题和逻辑连接词	147
1.2 合式公式	150
1.3 真值表、永真式	153
1.4 命题演算中的等价关系	157
1.5 逻辑连接词的可省略性	161

1.6 范式	165
1.7 推理和证明方法	172
第2章 谓词演算	179
2.1 谓词	179
2.2 量词	182
2.3 合式公式	185
2.4 合式公式的有效性	192
2.5 谓词演算的等价公式	195
2.6 谓词公式的范式	201
第3章 推理系统	206
3.1 自然推理系统	206
3.2 量词规则	212
3.3 导出规则和运算符规则	216
3.4 其他的命题逻辑系统	220
3.5 永真式系统	224
※第4章 消解法	230
4.1 句形	230
4.2 Herbrand 过程	234
4.3 一致化算法	240
4.4 消解规则	244
※※第5章 递归函数	248
5.1 数论递归函数	248
5.2 非数值递归函数	253
5.3 部分递归函数和递归集合	259

第四篇 图 论

第1章 图的定义和实例	267
1.1 图的基本概念	267

1.2	子图	273
1.3	图的运算	276
1.4	图的同构	280
第2章	路与回路	283
2.1	路径与回路	283
2.2	欧拉路径与欧拉回路	289
2.3	M图	294
2.4	哈密尔顿路径与回路	297
第3章	通路与最短通路	302
3.1	通路的集合	302
3.2	最短路径	307
3.3	多端点的最短路径	313
3.4	中国邮递员问题	317
第4章	树	320
4.1	树	320
4.2	生成树	321
4.3	最优树	324
4.4	基本回路与环路空间	327
第5章	关联集和割集	332
5.1	关联集和割集	332
5.2	完全图的割集	335
5.3	关联集生成割集	339
5.4	生成树生成割集	345
第6章	图的连通度	349
6.1	连通度	349
6.2	不可分离图	353
第7章	图的矩阵表示	357

7.1 关联矩阵	357
7.2 回路矩阵	363
7.3 割集矩阵	372
第8章 平面图和对偶	379
8.1 平面图	379
8.2 平面图的欧拉公式	383
8.3 对偶图	386
8.4 图的厚度	393
第9章 图的着色	397
9.1 顶点着色	397
9.2 地图的着色	400
9.3 边着色	403
9.4 色多项式	405
第10章 有向图	410
10.1 有向图	410
10.2 连通有向图	413
10.3 有向树和有序树	418
第11章 有向图的矩阵表示	421
11.1 有向图的关联矩阵和回路矩阵	421
11.2 有向图的割集矩阵	429
※※11.3 电网络方程	435
※※11.4 支路电压电流关系	444
※※第12章 生成树的产生	452
12.1 生成树的基本变换	452
12.2 生成树的生成	455
12.3 生成树的计数	464
参考文献	467

第一篇 集合论

集合这个概念在现代数学中非常重要，几乎所有数学分支都与集合论有关，我们关注集合论，不仅因为它是离散数学的基础，更重要的是它在其他许多学科中，特别是计算机科学和信息科学中要用到。我们只介绍集合论初步，而避免公理集合论的讨论。

我们先介绍集合论的符号并定义一些运算。在讨论了集合代数之后，再讲关系、有序和函数等概念。

第 1 章 集 合

1.1 集合的基本概念

集合是数学中最基本的概念之一,但是我们无法给集合下一个严格精确的定义,而只能作一个描述.一般地讲,具有某种属性的事物,其全体就构成一个集合.构成这个集合的那些事物,就称为该集合的元或元素.根据所给的属性,我们总是能判断任一事物是否属于某个集合,而不会含糊不清.

例 1.1.1

- (1) 某大学图书馆现存的全部图书资料.
- (2) 1950 年出生于北京,现在仍然住在北京的所有人.
- (3) 所有实数.
- (4) 一个给定平面上的所有点.

在(1)和(2)中,虽然我们可能说不出集合中元的准确个数,但它总是有限的.因此,我们称元的个数有限的集合为有限集.在(3)和(4)中,集合中的元都是无限多个,这样的集合称为无限集.

我们通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 来表示集合,而用小写字母 $a, b, c, \dots$ 来表示集合的元.

表示一个集合的方法一般有两种:列举法和描述法.

列举法是列举集合中的元,将元用一对括号括起来,元之间用逗号隔开.

例 1.1.2 $S_1 = \{-1, 1\}$, $S_2 = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

这里 S_1, S_2 就是采用列举法表示的集合, S_1 是具有两个元(-1 和 1)的集合, S_2 则表示所有正整数的集合.

列举法是有局限性的,有时甚至根本不能使用.例如,无法用这种方法来表示例 1.1.1 的(3)和(4).因此,常常采用描述法:设 $P(x)$ 是一个与 x 有关的条件,凡满足这个条件的所有元 x 组成的集合 S 就表示为:

$$S = \{x \mid P(x)\}.$$

例 1.1.3

$$S_3 = \{x \mid x^2 - 1 = 0\};$$

$$S_4 = \{x \mid -\infty < x < \infty\};$$

$$S_5 = \{x \mid 5 < x < 1\};$$

$$S_6 = \{x \mid 0 \leq x \leq 9, x \text{ 是实数}\}.$$

这里 S_3, S_4, S_5, S_6 就是采用描述法表示的集合, S_3 和例 1.1.2 中的 S_1 相同, S_4 是所有实数的集合, S_5 中没有任何元, S_6 表示闭区间 $[0, 9]$ 中所有实数的集合.

从 S_5 可以看到, 存在着这样的集合, 它没有任何元. 这样的集合称为空集, 空集用符号 $\emptyset$ 来表示.

从 S_6 可以看到, 在有些场合, 要求我们明确所讨论的对象的范围. 例如, 这里就明确要求 x 是实数, 否则也可能理解为 x 是整数. 如果 x 是整数, 那就是另一个集合了, 即由整数 $0, 1, 2, \dots, 9$ 所构成的集合. 实际上, 对于任何一个集合, 都有一个讨论对象的范围问题, 即我们所说的元是在哪个范围中取, 不过在不会引起误解时, 我们不必去明确说它. 这个范围通常是用空间这个词来表示. 所以, 空间是我们所讨论的所有元的集合. 如果我们讨论的是关于实数的某些性质, 那么 S_4 就是我们的空间. 如果我们讨论的是某个平面上的几何图形, 那么这个平面上的所有点的集合, 就构成我们的空间. 空间用符号 E 来表示.

集合可以用文氏图(Venn Diagram)来形象表示, 即用矩形圈起来的平面上的点表示 E , 用封闭曲线圈起来的点表示集合. 例如, 图 1.1.1 就是集合 $\{a, b, c, d\}$ 的文氏图.

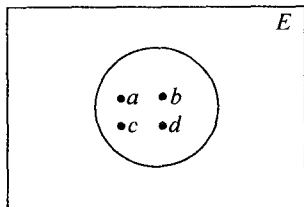


图 1.1.1

当给定集合 A 和空间中任一个元 x 时, 如果 x 是集合 A 中的一个元, 我们就称 x 是属于 A 的, 并记为 $x \in A$. 如果 x 不是 A 中的元, 就称 x 不属于 A , 并记为 $x \notin A$.

定义 1.1.1 给定集合 A 和 B , 如果集合 A 的任何一个元都是集合 B 中的元, 则称集合 A 包含于 B , 或 B 包含 A , 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 并且称 A 为 B 的一个子集(见图 1.1.2).

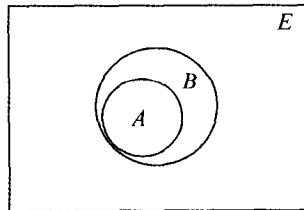


图 1.1.2

集合的包含关系具有传递性, 即当 $A \subseteq B$, 并且 $B \subseteq C$ 时, 则有 $A \subseteq C$.

根据定义 1.1.1, 对于任何集合 A , 我们都有 $A \subseteq A$, 并且当 $A \subseteq B$ 时, 有

$x \notin B$, 则 $x \notin A$.

对于空集 $\emptyset$, 因为 $x \notin \emptyset$ 永远成立, 所以对任何集合 A , 都有 $\emptyset \subseteq A$, 即空集是任何集合的子集.

如果集合 A 和 B 满足 $A \subseteq B$, 但 B 中有元不属于 A , 则称集合 A 真包含于 B , 记为 $A \subset B$, 并且称 A 为 B 的一个真子集.

定义 1.1.2 给定集合 A 和 B , 如果 $A \subseteq B$, 并且 $B \subseteq A$, 则称 A, B 两集合相等, 记为 $A = B$.

定义 1.1.3 给定集合 A , 以 A 的所有子集为元构成一个集合, 这个集合称为 A 的幂集, 记为 $\rho(A)$ 或 2^A .

例 1.1.4 $A = \{a, b, c\}$, 则

$$\rho(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

可以看出, 当集合 A 中有 n 个元时, $\rho(A)$ 中有 2^n 个元.

习题 1.1

1. 根据子集的定义证明: 若 $A \subseteq B$, 并且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.
2. 若 a 是集合 A 中的一个元, 下列各式哪些是正确的? 哪些是错误的?

$$a \in A \quad a \in \{a\} \quad a \subseteq A \quad a \subset \{a\}$$

$$\{a\} \subseteq A \quad \{a\} \in A \quad \{a\} \subseteq a$$

3. 下列各式哪些正确? 哪些错误?

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\} \quad \emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$$

$$\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\} \quad \{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\} \quad \{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$$

1.2 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差、补和对称差.

定义 1.2.1 设 A 和 B 是两个集合, 则包含 A 和 B 的所有元, 但不包含其他元的集合, 称为 A 和 B 的并集, 记为 $A \cup B$.

图 1.2.1 是 $A \cup B$ 的文氏图.

例 1.2.1 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

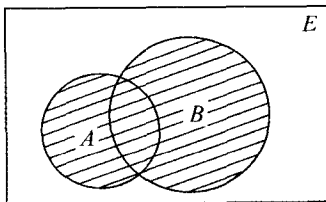


图 1.2.1

对于集合的并, 我们可以证明下列性质成立. 对任何集合 A, B, C, D , 有:

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$;
- (2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
- (3) 等幂律 $A \cup A = A$;
- (4) 同一律 $\emptyset \cup A = A$;
- (5) $A \subseteq A \cup B$;
- (6) 若 $A \subseteq C$, 并且 $B \subseteq C$, 则 $A \cup B \subseteq C$;
- (7) 若 $A \subseteq C$, 并且 $B \subseteq D$, 则 $A \cup B \subseteq C \cup D$;
- (8) $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $A \cup B = B$.

以上这些性质的证明容易从定义得到, 作为例子, 我们证明(7)和(8).

(7) 的证明:

证 设 $x \in A \cup B$, 由并集的定义, $x \in A$ 或 $x \in B$.

由于 $A \subseteq C$, 所以 $x \in A$ 时, 有 $x \in C$;

由于 $B \subseteq D$, 所以 $x \in B$ 时, 有 $x \in D$, 即 $x \in C \cup D$.

所以

$$A \cup B \subseteq C \cup D.$$

(8) 的证明:

证 必要性.

设 $x \in A \cup B$, 由并集的定义, $x \in A$ 或 $x \in B$.

由于 $A \subseteq B$, 所以 $x \in A$ 时, 有 $x \in B$, 因此 $x \in A \cup B$ 时, 有 $x \in B$, 即 $A \cup B \subseteq B$.

由并集的性质(5)可得 $B \subseteq A \cup B$. 再由集合相等的定义, 得 $A \cup B = B$, 即

$$A \subseteq B \text{ 时, 有 } A \cup B = B.$$

充分性.

由 $A \cup B = B$, 得 $A \cup B \subseteq B$, 即 $x \in A$ 或 $x \in B$ 时, 有 $x \in B$.

所以 $x \in A$ 时, 有 $x \in B$, 即 $A \subseteq B$.

所以 $A \cup B = B$ 时, 有 $A \subseteq B$.

定义 1.2.2 A 和 B 是两个集合, 包含 A 和 B 的所有公共元, 但不包含其他元的集合, 称为 A 和 B 的交集, 记为 $A \cap B$.

图 1.2.2 是 $A \cap B$ 的文氏图.

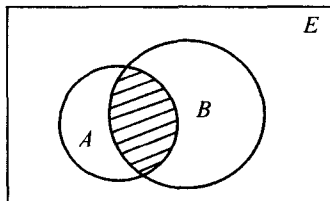


图 1.2.2

例 1.2.2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $A \cap B = \{3, 4\}$;

对于集合的交, 我们可以证明下列性质成立. 对任何集合 A, B, C, D , 有:

- (1) 交换律 $A \cap B = B \cap A$;
- (2) 结合律 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- (3) 等幂律 $A \cap A = A$;
- (4) 空集律 $\emptyset \cap A = \emptyset$;
- (5) $A \cap B \subseteq A$;
- (6) 若 $A \subseteq B$, 并且 $A \subseteq C$, 则 $A \subseteq B \cap C$;
- (7) 若 $A \subseteq C$, 并且 $B \subseteq D$, 则 $A \cap B \subseteq C \cap D$;
- (8) $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $A \cap B = A$.

定义 1.2.3 A 和 B 是两个集合, 如果它们满足 $A \cap B = \emptyset$, 则称集合 A 和 B 是不相交的.

对于集合的并和交, 可以证明下列性质成立:

- (1) 吸收律 $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$;
- (2) 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

并集和交集的定义都不难推广到任意有限多个集合, 甚至无限多个集合的情形. 也就是说, 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是集合, 则可以类似地定义:

$$S_1 = \bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n;$$

$$S_2 = \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n;$$

$$S_3 = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots;$$

$$S_4 = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots.$$

定义 1.2.4 A 和 B 是两个集合, 属于 A 而不属于 B 的所有元构成的集合, 称为 A 和 B 的差集, 记为 $A - B$.

图 1.2.3 是 $A - B$ 的文氏图.

例 1.2.3

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\},$$

则 $A - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{5, 6\}$.

对于集合的差, 我们可以证明下列性质成立. 对任何集合 A, B, C, D , 有:

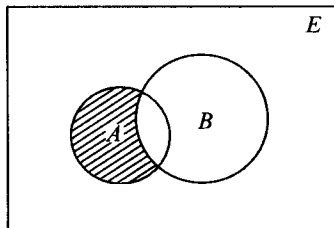


图 1.2.3

- (1) $A - B \subseteq A$;
- (2) 若 $A \subseteq B$, 并且 $C \subseteq D$, 则 $A - D \subseteq B - C$;
- (3) 若 $C \subseteq D$, 则 $A - D \subseteq A - C$;
- (4) $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $A - B = \emptyset$.

对于集合的并、交、差运算, 还具有下列一些性质:

- (1) 德·摩根律 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$,
 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;
- (2) $A \cup (B - A) = A \cup B$;
- (3) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup (B - A) = B$;
- (4) $A - (A - B) = A \cap B$;
- (5) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

定义 1.2.5 若 A 是空间 E 中的集合, 则 E 中所有不属于 A 的元构成的集合称为 A 的补集, 记为 A' .

图 1.2.4 是 A' 的文氏图.

对于集合的补集, 我们可以证明下列性质成立. 对于空间 E 中的任何集合 A , B , 有:

- (1) $E \cup A = E$, $E \cap A = A$,
 $E' = \emptyset$, $\emptyset' = E$, $(A')' = A$;
- (2) $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $B' \subseteq A'$;
- (3) $A \cup A' = E$, $A \cap A' = \emptyset$;
- (4) 德·摩根律 $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$;
- (5) $A - B = A \cap B'$;

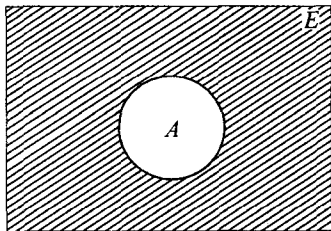


图 1.2.4

- (6) $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $A \cap B' = \emptyset$,

$A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $A' \cup B' = A'$.

定义 1.2.6 A 和 B 是两个集合, 则定义 A 和 B 的对称差 $A \oplus B$ 为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A).$$

图 1.2.5 是 $A \oplus B$ 的文氏图.

例 1.2.4

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\},$$

则

$$A \oplus B = \{1, 2, 5, 6\}.$$

对于集合的对称差, 我们可以证明下列性质成

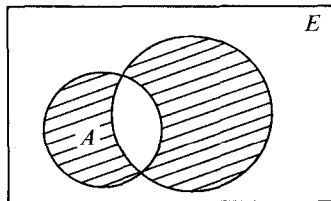


图 1.2.5