《高等数学》学习辅导与考研用书

高等数学学习辅导

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO

GAODENG
SHUXUE
XUEXI
FUDAO

下

主编 彭富连

湖南师范大学出版社

《高等数学》学习辅导与考研用书

高等数学
学习辅导

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO

GAODENG
SHUXUE
XUEXI
FUDAO

下

主　编　彭富连
编　者　彭富连
郭瑞芝
刘迪芬

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导（下）/ 彭富连主编．—长沙：湖南师范大学出版社，2007.2

ISBN 978-7-81081-664-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．彭…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料

Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 115531 号

高等数学学习辅导（下）

◇主　　编：彭富连

◇策划组稿：周玉波　莫　华

◇责任编辑：莫　华

◇责任校对：蒋旭东　刘琼琳

◇出版发行：湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山　邮编/410081

电话/0731.8853867　8872751　传真/0731.8872636

网址/http：//press.hunnu.edu.cn

◇经销：湖南省新华书店

◇印刷：长沙瑞和印务有限公司

◇开本：787×1092　1/16

◇印张：19

◇字数：438 千字

◇版次：2007 年 2 月第 1 版　2007 年 2 月第 1 次印刷

◇书号：ISBN 978-7-81081-664-9

◇印数：1—4000 册

◇定价：29.00 元

前　言

学习一门课程，一要掌握基本理论，二要培养工作能力．理论和能力是相辅相成的，理论可以帮助学生锻炼能力，但绝不会自动转化为能力．而能力需要自身动手，通过本身的实践，才能逐步锻炼提高．学习高等数学更是如此．一要掌握好基本概念、基本理论和基本方法；二要提高解题能力，学会运用所学知识去解决实际问题．

《高等数学学习辅导》一书是作者根据现行《高等数学教学大纲》及教育部考试中心新修订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中对高等数学的有关要求，本着面向全体与发展个性相结合原则，结合作者多年从事高等数学教学与研究和考研培训及辅导积累的经验编写而成．本书注重实用性、针对性和能力训练，旨在帮助正在学习高等数学的学生和准备攻读硕士研究生的考生全面、系统地学习和复习高等数学的基本理论与基本方法，帮助读者打好基础，提高分析问题和解决问题的能力，培养读者的创新精神和实践能力．

本套辅导书共8章，分上、下两册出版．上册包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学与常微分方程；下册包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用．每章由以下四部分组成：

一、知识扫描

主要包括“基本要求”和“内容解析”．

“基本要求”是对上述“教学大纲”和“考试大纲”所要求的知识点和考点而列出的，目的是使广大读者明确每一章的重点内容及需要达到的程度．“内容解析”是把基本要求中的内容（概念、性质、定理和公式等）进行简明扼要的叙述并加以细化、归纳和总结，便于读者能正确地把握基本要求，并对基本概念、基本理论、基本方法和重点、难点问题有个清楚的了解．

二、知识网络

将各章的主要知识点以网络的方式列出，使读者对各章知识点的外延与内涵一目了然．

三、同步训练

同步训练包括练习题、思考题、解题提示与解答．题目来自于由彭富连主编，湖南师范大学出版社出版的《高等数学》（上、下册）书中相应章节．这些选题都是配合各单元知识点而精心设计的题型．既有基本题，用以帮助学生巩固和掌握基本理论和基本方法，也有用于培养学生应用所学知识解决实际问题的应用题；既有证明题，也有一定难度、综合性较强的考研真题，目的在于培养学生的科学思想与分析问题的能力，同时使读者对研究生入学考试中高等数学试题的形式、难度有一定的了解，以便使那些打算考研的读者早作准备，有针对性地复习．所有题目都给出了解答，许多习题在解答之前给出了解题提示或分析，用以指明所要用到的基本概念、基本理论与基本方法，或给出通向解答的某一途径．

四、同步自测

同步自测主要包括同步自测题、答案与解答．所选题目针对性强，覆盖面大，几乎涵盖了“教学大纲”与“考试大纲”中的所有知识点．主要用来考查读者学习的效果，查漏补缺．我们相信，读者通过这些自测题的训练，一定能夯实基础，较快地提高自己分析问题和

解决问题的能力. 每个选择题都给出了答案，稍难点的题都给出了解答；所有计算题、证明题、应用题都有详尽解答.

因为直接做题是加深和牢固掌握所学基本理论与基本方法、熟练运用所学知识解决问题必不可少的基本训练的一个环节，所以希望读者尽量先自己做题，如有困难或疑问，再去与解答相对照，这样，经过自己的努力，解题能力才会有较大的提高.

本套辅导书可作为在校本科生、大专生及自学考试者学习高等数学的辅导书，也可作为准备参加全国硕士研究生入学统一考试数学一至数学四的考生的复习参考书. 同时可供从事高等数学教学的教师参考.

本书第五章和第六章中的同步训练题及解答由郭瑞芝编写，第七章中的同步训练题及解答由刘迪芬编写，全书其余部分由彭富连编写，并负责全书统稿定稿.

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正.

编　者

2007 年 1 月于湖南师范大学

目 录

第五章 无穷级数 …… (1)
知识扫描 …… (1)
知识网络 …… (12)
同步训练 …… (13)
同步自测 …… (58)
第六章 向量代数与空间解析几何 …… (80)
知识扫描 …… (80)
知识网络 …… (87)
同步训练 …… (87)
同步自测 …… (123)
第七章 多元函数微分法及其应用 …… (134)
知识扫描 …… (134)
知识网络 …… (142)
同步训练 …… (142)
同步自测 …… (183)
第八章 多元函数积分学 …… (203)
知识扫描 …… (203)
知识网络 …… (222)
同步训练 …… (223)
同步自测 …… (274)

第五章 无穷级数

知识扫描

1. 理解常数项级数收敛与发散的概念,收敛级数和的概念,掌握级数的基本性质与收敛的必要条件,会应用收敛与发散的定义及收敛的必要条件判定一些级数的敛散性

◇ 内容解析 ◇

(1) 数项级数及敛散性概念

定义 1 设$\{u_n\}$是一个数列,则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

为一个数项级数,简称级数. 其中 u_n 称为级数的一般项或通项. $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的部分和,$\{S_n\}$ 称为部分和数列.

定义 2 (级数敛散性定义)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列有极限,即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,S 称为该级数的和;若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定义 3 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则称 $r_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$ 为该级数的余项(显然 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$,这是因为 $S = S_n + r_n$).

(2) 基本性质

1) 数乘 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,k 为任意实数,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛,且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) 加(减)法 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

注意由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛,得不出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$.

3) 改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任意有限项的值不影响其敛散性. 特殊地,在一个级数前面加上或减去有限项不影响级数的敛散性(但和可能改变);

4) 重组 收敛级数加括号后所得的级数仍收敛,其和不变;

此性质类似于有限个数的加法所满足的结合律. 注意该性质的反面不一定成立,即一个级数加括号后所得的级数收敛并不能保证原级数收敛.

5) **定理** 1(级数收敛的必要条件)　若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则必有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

注意 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛.

(3) 几何级数和 p 级数($p=1$ 为调和级数)的收敛性条件

1) 几何级数(或等比级数) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$,当 $|q|<1$ 时收敛,当 $|q|\geqslant 1$ 时发散;

2) p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}(p>0)$,当 $0<p\leqslant 1$ 时发散,$p>1$ 时收敛.

特别:调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

2. 掌握正项级数敛散性的比较判别法和比值判别法,会用根值判别法

◇ 内容解析 ◇

(1) 正项级数的概念与特点

1) **定义** 4　各项非负的级数称为正项级数.

2) **定理** 2　(正项级数收敛的充分必要条件)正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

(2) 正项级数敛散性的判别法

1) **定理** 3　(比较判别法)若存在 N,使得当 $n>N$ 时,有 $0\leqslant u_n\leqslant v_n$,则

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散;当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

极限形式:$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l(0<l<+\infty)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散.

注意常用的比较级数有几何级数、调和级数及 p 级数.

2) **定理** 4(比阶判别法)　设 $0\leqslant u_n$,且 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = C$,则

当 $0\leqslant C<+\infty$,且 $p>1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;当 $0<C\leqslant+\infty$,且 $p\leqslant 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

即当 $0\leqslant u_n$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性可以由无穷小量 $u_n(u\to\infty)$ 的阶来判断.

3) **定理** 5(比值判别法,达朗贝尔判别法)　对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$,则当 $\rho<1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,$\rho>1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,$\rho=1$ 时,不能肯定,即该法失效.

一般地,若 u_n 中含有因子 $n!$ 或为含 n 的因式的乘积(或商)的形式,一般可考虑采用比值判别法.

4) **定理** 6(根值判别法,柯西判别法)　对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$,则当 $\rho<1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,$\rho>1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,$\rho=1$ 时,不能肯定,即该法失效.

一般地，若 u_n 中含有以 n 为指数的因子可考虑采用根值判别法.

5)* **定理** 7(积分判别法)　若 $f(x)(x>0)$ 为非负的单调递减函数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

一般地，若由 u_n 易找出 $f(x)$，使 $u_n=f(n)$，且 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 易判断敛散性，可考虑积分判别法.

3. 掌握交错级数概念及莱布尼兹判别法，了解任意项级数绝对收敛和条件收敛的概念以及绝对收敛和条件收敛的关系

◇ 内容解析 ◇

(1) 交错级数

1) **定义** 5　设 $u_n>0$，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数(即级数中的各项正负相间)；

2) **定理** 8(莱布尼兹判别法)　设 $u_n>0(n=1,2,3\cdots)$，满足条件：数列 $\{u_n\}$ 单调递减(即 $u_n\geqslant u_{n+1}$)，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，其和 $S\leqslant u_1$，余项 r_n 的绝对值 $|r_n|=\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n-\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k\right|\leqslant u_{n+1}$.

(2) 任意项级数(即 $u_n(n=1,2,3\cdots)$ 为任意实数)

1) 绝对收敛与条件收敛

定义 6　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 为条件收敛.

注意绝对收敛级数可以重排，即绝对收敛级数重排后所得级数的敛散性与和不变. 这类似于有限个数加法的交换律.

2) 任意项级数的判别法

定理 9　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.(即一个任意项级数如果是绝对收敛的，那么它一定是收敛的.)

注意级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的敛散性判别法与正项级数敛散性判别法相同.

例如，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

定理 10*(柯西准则)　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N>0$，当 $n>N$ 时，对任意自然数 p，有 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$.

定理 11*(阿贝尔判别法)　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，又 $\{v_n\}$ 单调有界，$|v_n|\leqslant M,n=1,2\cdots$ 则

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

4. 掌握判别数项级数敛散性的一般步骤

◇ 内容解析 ◇

数项级数敛散性判别的一般步骤：

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数

1) 检验其通项是否满足必要条件：若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则须再进一步判别.

2) 根据 u_n 特点选择比值判别法或根值判别法判别.

3) 若比值法或根值法失效，观察一下级数是否为等比级数或 p 级数，如与它们形式上接近，可用比较判别法或积分判别法，用比较法时可先考虑比较法的极限形式.

4) 若上述方法均失效，可以考虑用定义(即考虑 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 是否存在) 或基本性质来判别.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数

1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则须再进一步判别.

2) 检验 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否绝对收敛，即用正项级数收敛法判别 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 是否收敛.

3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 不收敛，对交错级数验证莱布尼兹条件是否满足，若满足，则条件收敛，若 $u_n \geqslant u_{n+1}$ 不成立，则通过收敛定义及基本性质来讨论收敛性.

4) 利用柯西准则或阿贝尔判别法判别.

5. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念

◇ 内容解析 ◇

(1) 函数项级数的有关概念

1) **定义 7** 设 $u_n(x)(n = 1,2,\cdots)$ 都在区间 D 上有定义，则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 D 上的函数项级数. $u_n(x)$ 称为通项，$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 称为部分和函数.

2) 收敛点、发散点，收敛域，发散域和函数

定义 8 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在区间 D 上的函数项级数，$x_0 \in D$，若对应的常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛(或发散)，则称 x_0 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一个收敛点(或发散点)；一切收敛(发散) 点构成的集合，称为函数项级数的收敛(发散) 域.

定义 9 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 I，则 $\forall\, x \in I$，存在唯一的实数 $S(x)$，使得

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 成立，定义域为 I 的函数 $S(x)$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数.

$r_n=S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots$ 称为收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的余项.

6. 理解幂级数收敛半径的概念，掌握幂级数收敛半径、收敛区间及收敛域的求法

◇ 内容解析 ◇

(1) **定义** 10(幂级数的定义)　称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数为 $(x-x_0)$ 的幂级数(或为 x_0 处的幂级数)，其中 $a_n(n=0,1,2\cdots)$ 为常数，称为幂级数的系数；当 $x_0=0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 称为 x 的幂级数.

(2) 收敛半径与收敛区间概念

定理 12(阿贝尔定理)　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 x_0 处收敛，则对任何满足 $|x|<|x_0|$ 的 x，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛.

推论 1　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 x_1 处发散，则当 $|x|>|x_1|$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散.

推论 2　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 不是在整个数轴上收敛，也不是仅在 $x=0$ 处收敛，则必存在唯一的实数 $R>0$，使当 $|x|<R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛，当 $|x|>R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散.

定义 11　若 $R>0$ 满足：当 $|x|<R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛，当 $|x|>R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散，称则 R 为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径，开区间 $(-R,R)$ 称为该幂级数的收敛区间.

注意 $x=\pm R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 可能收敛，可能发散；由幂级数在 $x=\pm R$ 处的敛散性可确定收敛域为 $(-R,R)$ 或 $[-R,R]$ 或 $[-R,R)$ 或 $(-R,R]$. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛时，规定 $R=0$，若在整个数轴上收敛时，规定其收敛半径为 $R=+\infty$.

(3) 收敛半径及收敛域的求法

根据收敛半径的定义，我们一般用正项级数的比值判别法和根值判别法确定.

1) 对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若 $a_n\neq 0$(即不缺项)，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$)，则收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho},\text{当 }\rho\neq 0\\ +\infty,\text{当 }\rho=0\\ 0,\text{当 }\rho=\infty\end{cases}\quad \left(\text{或 } R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right).$$

再考虑 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n$ 的敛散性便可确定收敛区间为 $(-R,R)$ 或 $[-R,R]$ 或 $[-

$R,R)$ 或 $(-R,R]$.

2) 若所给的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 中，有的项的系数为 0(即缺项)(如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$，奇数项系数为 0)，此时视 x 为参数，利用比值判别法求之，即先求相邻两项之比的绝对值的极限：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |\rho(x)|$，令 $|\rho(x)|<1$，解出 x 的变化范围 $a<x<b$，再考虑所给级数在 $x=a, x=b$ 的敛散性，从而求得收敛域为 $(a,b)\cup\{$收敛的端点$\}$.

3) 对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$，则令 $t=x-x_0$，先化为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的形式，然后按前面 1) 或 2) 的步骤，求出收敛区间，再将 t 用 $x-x_0$ 代，解出 x 的变化范围，即得所求幂级数的收敛域为 (x_0-R, x_0+R) 或 $[x_0-R, x_0+R]$ 或 $[x_0-R, x_0+R)$ 或 $(x_0-R, x_0+R]$.

这里需要指出的是，极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ 存在(或为 ∞) 仅仅是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$ 的一个充分条件. 因此，由幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，并不一定能保证 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$，或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$.

7. 了解幂级数在收敛区间内的重要性质(运算、和函数的连续性、逐项求导、逐项积分)

◇ 内容解析 ◇

(1) 幂级数的运算性质

定理 13(加、减法)　设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R=\min\{R_1,R_2\}$，且在 $(-R,R)$ 内有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

定理 14(乘法)　设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2，则在 $(-R,R)$ 内有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n$.

(2) **定理** 15(和函数的连续性)　若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $S(x)$，则 $S(x)$ 在级数的收敛域 I 上连续，即 $\forall x_0 \in I$，有

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to x_0}(a_n x^n) = S(x_0).$$

(3) **定理** 16(逐项求导)　设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$，则和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且可逐项求导数，即 $\forall x \in (-R,R)$，有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(4) **定理** 17(逐项积分)　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可积，且可

逐项求积分，即 $\forall x \in (-R,R)$，有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

注意对幂级数逐项求导或逐项积分后所得的级数和原级数有相同的收敛半径，但级数在收敛区间两端点处的敛散性可能改变. 一般地逐项求导数后，原收敛端点可能变成发散点，逐项积分后原发散的端点可能变成收敛点.

8. 了解函数展开成泰勒级数(幂级数)的充分必要条件

◇ 内容解析 ◇

(1) **定义** 12　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，$x_0 \in D$，若

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

对 $\forall x \in D$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 $x-x_0$ 的幂级数，或称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处能展开成幂级数.

由幂级数的性质(定理16)知，若函数 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 $x-x_0$ 的幂级数，则 $f(x)$ 在区间 D 内存在任意阶导数.

(2) 展开形式的唯一性

定理 18　若函数 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 $x-x_0$ 的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_n)^n,$$

则其展开系数为 $a_n = \dfrac{f^n(x_0)}{n!}(n=0,1,2\cdots)$.

注意展开形式的唯一性是我们能够利用间接展开法将函数展开成幂级数的主要理论依据.

(3) 泰勒级数与麦克劳林级数

定义 13　若 $f(x)$ 在 x_0 处存在各阶导数 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0,1,2\cdots)$，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数；

特别地，当 $x_0=0$ 时，关于 x 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为麦克劳林级数.

定理 19(函数展开成泰勒级数的充分必要条件)　设函数 $f(x)$ 在点 $x_0 \in D$ 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数在 D 上收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是：$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零，即对 $\forall x \in D$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

定理 20*　函数 $f(x)$ 在点 $x_0 \in D$ 处的泰勒级数在 D 上收敛于 $f(x)$ 的充分条件是：$f(x)$ 在 x_0 处的各阶导数 $f^{(n)}(x_0)(n=0,1,2\cdots)$ 在 D 上一致有界，即存在 $M>0$，使得对 $\forall n \in N$ 和 $\forall x \in D$，有 $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$.

9. 掌握 $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^m$ 的麦克劳林展开式(或在 $x=0$ 处的幂级数展开式)

◇ 内容解析 ◇

(1)$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,x\in(-\infty,+\infty)$.

(2)$\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1},x\in(-\infty,+\infty)$.

(3)$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$.

(4)$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 或 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},x\in(-1,1]$.

(5)$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

当 $m>0$ 时,收敛域为 $[-1,1]$;当 $-1<m<0$ 时,收敛域为 $(-1,1]$;当 $m<-1$ 时,收敛域为 $(-1,1)$.

(6) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots x\in(-1,1)$.

10. 掌握将函数展开成幂级数的方法

◇ 内容解析 ◇

(1) 直接展开法

直接展开法是指:利用泰勒级数的定义及泰勒级数收敛的充分必要条件,将函数在某个区间上直接展开成指定点处的泰勒级数的方法. 其步骤为:

1) 求 $f(x)$ 的各阶导数在 x_0 处的值:$f(x_0),f'(x_0),f''(x_0),\cdots,f^{(n)}(x_0)\cdots$

2) 写出 $f(x)$ 的泰勒级数

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

3) 求 $f(x)$ 的泰勒级数的收敛域 D;

4) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0(0<\theta<1)$ 对 $\forall x\in D$ 是否成立.

若极限为 0,则 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,x\in D$;

若极限不为 0,则 $f(x)\neq\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

(2) 间接展开方法

间接展开方法是指:通过一定运算将所给函数转化为已知幂级数展开式的其它函数,进而借助于新函数的幂级数展开式将原函数展开成幂级数的方法. 常用方法有:

1) 将所给函数经过适当变形,使其类似于 $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^m$ 的形式. 例如

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-x}{2}\right)}\xlongequal{\text{令 } y=-\frac{x}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-y}.$$

$$\ln(a+x)=\ln a+\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)\xlongequal{\text{令 } y=\frac{x}{a}}\ln a+\ln(1+y).$$

$$\frac{2-x-x^2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x^2},\mathrm{e}^{2x+1}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{y}.$$

$$\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right],\text{便可在 } x=\frac{\pi}{4}\text{ 展开.}$$

2）利用变量代换及 9. 中给出的展开式，将上述类似的函数展为幂级数，并得到相应的收敛域.

3）适当综合利用级数的四则运算、逐项求导和逐项求积分的法则将函数展开，即所给函数经过适当变形，使其接近其中五个基本初等函数之一的某一形式（可借助四则运算、复合及三角公式，或求导、求积分等方法将函数变形），然后将变量代入已知的公式. 这样只需求出在新的变量下，级数的收敛范围，而免去逐阶求导和检验余项等手续.

11. 会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和

◇ 内容解析 ◇

求幂级数在收敛区间内的和函数的问题恰好为将函数展开成幂级数的反问题.

（1）求幂级数的和函数常用方法

利用逐项积分或逐项求导求幂级数和函数：先利用逐项积分或逐项求导，将要求和函数的幂级数化为一个已知其和函数的幂级数，然后再利用逆运算求出要求的和函数.

（2）数项级数求和方法

1）直接由定义求和：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，则其和为

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

在一般情况下，为求上述极限，经常是借助等比数列求和公式，或将一般项 u_n 拆开后正负抵消这两种方法求和.

2）利用级数性质求和：将 u_n 拆开，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 变成已知其和的级数的线性组合，再利用收敛级数性质求和；熟记下列结果：

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=\frac{a}{1-q}(|q|<1),\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

3）构造幂级数求和：若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，所以只要求出 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$，则得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)$.

12. 了解傅立叶级数概念和狄利克雷收敛定理，会将函数展开成傅立叶级数，并能正确地运用收敛定理

◇ 内容解析 ◇

（1）以 2π 为周期的函数展开成傅立叶级数

1）**定义 14**　设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,3\cdots),b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x(n=1,2,3\cdots)$$

为函数 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅立叶系数,称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅立叶级数.记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

注意由周期函数的性质,有 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(x)\cos nx\,dx, b_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(x)\sin nx\,dx(\alpha\in\mathbf{R})$.

2) 正弦级数与余弦级数.

根据奇函数和偶函数的性质,当 $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数时,则 $a_n=0(n=0,1,2,3\cdots)$, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx(n=1,2,3\cdots)$;此时 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅立叶级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

称为正弦级数.

当 $f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数时,则 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx(n=0,1,2,3\cdots)$, $b_n=0$ $(n=1,2,3\cdots)$,此时 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅立叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

称为余弦级数.

3) 傅立叶级数的收敛定理 —— 狄利克雷充分条件.

定理 21(狄利克雷收敛定理)　设 $f(x)$ 为以 2π 为周期的函数,在 $[-\pi,\pi]$ 上除了有限个第一类间断点外是连续的,且 $f(x)$ 在该区间上只有有限个极值点,则 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅立叶级数收敛,且它的和函数为:

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

$$=\begin{cases}f(x), & \text{当 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点;}\\ \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)], & \text{当 } x_0 \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点;}\\ \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)], & \text{当 } x=-\pi \text{ 及 } x=\pi \text{ 时.}\end{cases}$$

(其中 $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ 分别为 $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限.)

(2) 以 $2l$ 为周期的函数展开成傅立叶级数

1) **定义** 15　设函数 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数,在 $[-l,l]$ 上可积,则称

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx(n=0,1,2,3\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx(n=1,2,3\cdots)$$

为函数 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的傅立叶系数,称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

为 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的傅立叶级数.记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

注意周期为 $2l$ 的傅立叶级数的收敛性结论与周期为 2π 的傅立叶级数一样.

根据奇函数和偶函数的性质,类似可得以 $2l$ 为周期的奇函数与偶函数的正弦级数及余弦级数.

(3) 只在$[0,l]$上有定义的函数(非周期函数)展开成正弦级数或余弦级数

定义在$[0,l]$上的函数可以有多种方法展开成三角级数,但常用的方法有三种:周期偶延拓、周期奇延拓、周期延拓.

1) 周期偶延拓,展开为余弦级数.

设 $f(x)$ 为$[0,l]$上的非周期函数,令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant l, \\ f(-x), & -l<x<0, \end{cases}$

则 $F(x)$ 就是$[-l,l]$上的偶函数,从而可以展开成余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x, x\in[0,l].$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x (n=0,1,2,3\cdots).$$

2) 周期奇延拓,展开为正弦级数.

设 $f(x)$ 为$[0,l]$上的非周期函数,令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant l, \\ f(-x), & -l<x<0, \end{cases}$

则 $F(x)$ 就是$[-l,l]$上的奇函数,从而可以展开成正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x, x\in[0,l],$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x (n=1,2,3\cdots).$$

(4) 将函数 $f(x)$ 展开成傅立叶级数的步骤

1) 画出 $f(x)$ 的图形,并验证它是否满足收敛定理中的条件;

2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;

3) 求出 $f(x)$ 的傅立叶系数;

4) 写出 $f(x)$ 的傅立叶级数,并根据收敛定理写出其和函数.