

大学数学立体化教材

# 线性代数

(理工类)

简明版

吴赣昌 主编

 中国人民大学出版社

大 学 数 学 立 体 化 教 材

# 线性代数

(理工类)

简明版



**图书在版编目 (CIP) 数据**

线性代数 (理工类·简明版) / 吴赣昌主编.

北京: 中国人民大学出版社, 2006

大学数学立体化教材

ISBN 7-300-07607-6

I. 线…

II. 吴…

III. 线性代数-高等学校-教材

IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 109053 号

大学数学立体化教材

**线性代数 (理工类·简明版)**

吴赣昌 主编

---

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)	010-62511398 (质管部)	
	010-82501766 (邮购部)	010-62514148 (门市部)	
	010-62515195 (发行公司)	010-62515275 (盗版举报)	
网 址	<a href="http://www.crup.com.cn">http://www.crup.com.cn</a> <a href="http://www.ttrnet.com">http://www.ttrnet.com</a> (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	河北涿州星河印刷有限公司		
规 格	170 mm×228 mm 16 开本	版 次	2006 年 10 月第 1 版
印 张	9.75 插页 1	印 次	2006 年 10 月第 1 次印刷
字 数	174 000	定 价	22.00 元 (含光盘)

---

**版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换**

## 内容简介

本书根据高等学校理工类专业线性代数课程的教学大纲编写而成，内容设计简明，但结构体系上又不失完整，其中涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换等知识；同时，为了便于阐释和理解这些线性代数的基本知识，本书以适当的难度梯度循序渐进地选编了一些教学例题和练习题。此外，本书还结合现代教学的新要求和现代科技的新发展，配备了一套内容丰富、功能强大的教学课件——《线性代数多媒体学习系统》（光盘），其中包括多媒体教案、习题详解、综合训练等功能模块，这些功能模块的设计方便学生们自学和自我提升：它有利于学生们了解一些数学历史和数学文化，也有助于学生们的课程学习和考研备战。在学习过程中，书与盘配合使用，形成了教与学的有机结合。

本书可作为普通高等院校（少课时）、独立学院、成教学院、民办院校等本科院校以及具有较高要求的高职高专院校相应专业的教学基础课教材。

# 总 序

教育信息化是 21 世纪教育改革和发展的大方向,借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标.然而,与其他学科相比,大学数学教育信息化的研究进展比较缓慢.随着我国高等教育“大众化”阶段的到来,过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要,因此,如何将当今快速发展的信息技术与教育技术相结合,建设一系列“新型教材”就显得非常紧迫.在我们的设想中,这种“新型教材”至少要包含以下两个方面:一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化;二是教学考多层次、全方位的建设.此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量,利于学生的课后学习和优秀学生的提高训练,全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用.

2000 年初,在吴赣昌教授的组织与策划下,我们成立一个由教授、副教授、专任教师、专职动画设计人员和软件设计人员组成的研发团队,对上述研究目标进行了重点攻关,在迄今为止的 6 年多时间内,先后推出了一系列全新的“教学资源库式”的数学立体化教材,并配套建设了大学数学多媒体系列教学软件、大学数学试题库系统和大学数学立体化教材服务网站.上述教学成果先后被全国 200 多所高等院校采用,一方面得到了国内同行的积极反馈和鼓励,另一方面也使上述研究工作的可持续发展得到了有力的支持.

此次经由中国人民大学出版社出版的大学数学立体化教材简明版是大学数学立体化教材其中的一个系列,共包含两大类六门课程,分别有理工类:高等数学,线性代数及概率论与数理统计三门课程;经济类:微积分,线性代数及概率论与数理统计三门课程.下面我们简单介绍一下该立体化教材的形式与内涵.

## 立体化教材的形式

- 1.《\*\*\*\*》(书)
- 2.《\*\*\*\*多媒体学习系统》(学生专用)(光盘)

其中,《\*\*\*\*》(书)的编写具有下列特点:

- ◆ 书中融入了数学历史与数学文化的教育.
- ◆ 在重要概念引入之前,深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想.
- ◆ 以评注方式对定理、概念、公式的理解和应用做了进一步的总结.
- ◆ 依循序渐进的原则,以适当的难度梯度选编教学例题.

《\*\*\*\*多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式 and 教学资源立体化的学习软件,其中设计了多媒体教案、习题详解、综合训练等功能模块,以充分满

足读者们在教材内容学习、课后辅导答疑以及综合提高训练等方面的需要。主要特点:

◆ 多媒体教案:按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画,直击数学思想本质,利于突破学习中的重点、难点。

◆ 习题详解:逐题剖析解题思路,并以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法,利于学生课后学习。

◆ 综合训练:总结每章教学知识点,通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧,并对历届考研真题进行逐题剖析,利于学生综合提高。

◆ 知识点交互:利用多媒体开发软件的网页特性,为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互链接,利于学生高效率的学习。

### 立体化教材的配套建设服务

1.《\*\*\*\*多媒体教学系统》(教师专用)(光盘)

2.《大学数学试题库系统》

3. 大学数学立体化教材服务网 ([www.math123.com](http://www.math123.com))

其中

《\*\*\*\*多媒体教学系统》(光盘),除了包含《\*\*\*\*多媒体学习系统》的主要功能模块以外,还具有以下特点:

◆ 多媒体教案:教学过程设计更适合教师进行课堂教学,补充了类型丰富的教学例题供教师选用,增加了课堂练习环节。

◆ 教学备课系统:搜集并整理了大量的教学资源 and 备课元素,可供教师修改选用,充分展现各位老师的个性化授课特点。

◆ 鼠标笔、文件放大以及知识点层叠交互功能,使教师在采用多媒体教学的同时,可以很好地保持传统教学的优势。

《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块,试题量 20 000 余道,具有以下特点:

◆ 试题类型丰富:含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等。

◆ 组卷功能强大:教师只需根据考试要求直接选择考点和题型,通过智能组卷按钮,几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷,通过预览,对不满意的试题,可通过人工调整按钮,方便地对该试卷中的试题进行增删与替换。

◆ 直接实现试卷的 Word 排版,并能在成卷后实现对试题的编辑修改。

◆ 大容量试卷库:试卷库可存放 3 300 余套各类试卷,库内存有数百套各类全真试卷,供用户参考;用户可将自组试卷或交流试卷存入该试卷库内。试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删。

◆ 二次开发功能:使用单位可对系统进行包括试题的增删与替换,试卷库的存

储管理, 试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

大学数学立体化教材服务网 ([www.math123.cn](http://www.math123.cn)) 是专门为采用我们立体化教材的师生提供配套教学服务的网站. 网站设计了首页、教材简介、教学系统、题库系统、教学文件、教学论坛、数学实验、历史介绍、考研、征订信息等主要栏目, 并有丰富的教学资源 (如各类系统软件的演示版本, 每门课程的教学大纲、教学日历、实验指导书、实验案例库等教学文件) 供老师们下载. 网站力图建设成为国内大学数学教与学的通用平台, 在教学论坛栏目中, 搜集、整理和转载了当前国内有关大学教育、专业教学等方面共同关心的议题和新闻, 广大师生可在其中发表自己的意见和建议. 在首页栏目中, 搜集了有关大学数学立体化教材建设的最新消息和历次研讨会的信息. 在数学实验和考研等栏目中除提供本站特别设计的有关下载内容外, 还搜集整理了丰富的友情链接内容. 欢迎广大师生登陆浏览.

立体化教材的建设是一项崭新的事业. 令我们欣慰的是, 与当初启动这个项目时相比, 现在大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境 (从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设) 和硬件技术 (从软件开发平台到计算机相关硬件技术) 都已经非常成熟了. 当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师教学个性化的问题也因鼠标笔和手写屏系统的问世而迎刃而解了.

6 年以来, 尤其是 2002 年 9 月第一个《高等数学多媒体教学系统》(理工类) 出版以来, 我们的工作得到了国内许多同行的长期支持和鼓励, 在此特别表示感谢.

编 者

2006 年 9 月 10 日

# 目 录

## 第1章 行列式

§ 1.1 二阶与三阶行列式	1
§ 1.2 $n$ 阶行列式	5
§ 1.3 行列式的性质	10
§ 1.4 行列式按行(列)展开	15
§ 1.5 克莱姆法则	20
总习题一	23

## 第2章 矩阵

§ 2.1 矩阵的概念	26
§ 2.2 矩阵的运算	29
§ 2.3 逆矩阵	37
§ 2.4 分块矩阵	43
§ 2.5 矩阵的初等变换	49
§ 2.6 矩阵的秩	58
总习题二	62

## 第3章 线性方程组

§ 3.1 消元法	65
§ 3.2 向量组的线性组合	71
§ 3.3 向量组的线性相关性	76
§ 3.4 向量组的秩	80
§ 3.5 向量空间	84
§ 3.6 线性方程组解的结构	87
总习题三	95

## 第4章 矩阵的特征值

§ 4.1 向量的内积	98
§ 4.2 矩阵的特征值与特征向量	104
§ 4.3 相似矩阵	109
§ 4.4 实对称矩阵的对角化	114
总习题四	117

## 第5章 二次型

§ 5.1 二次型及其矩阵	120
§ 5.2 化二次型为标准形	123



---

§ 5.3 正定二次型 .....	130
总习题五 .....	133

**习题答案**

第 1 章 答案 .....	135
第 2 章 答案 .....	136
第 3 章 答案 .....	139
第 4 章 答案 .....	142
第 5 章 答案 .....	145

# 第1章 行列式

历史上,行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的.如今,它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用,是常用的一种计算工具.特别是在本门课程中,它是研究后面线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

## §1.1 二阶与三阶行列式

### 一、二阶行列式

**定义1** 记号  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  表示代数和  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , 称为二阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

其中数  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  叫做行列式的元素, 横排叫做行, 竖排叫做列. 元素  $a_{ij}$  的第一个下标  $i$  叫做行标, 表明该元素位于第  $i$  行, 第二个下标  $j$  叫做列标, 表明该元素位于第  $j$  列. 由上述定义可知, 二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和. 这个规律性表现在行列式的记号中就是“**对角线法则**”. 如图 1-1-1, 把  $a_{11}$  到  $a_{22}$  的实连线称为主对角线, 把  $a_{12}$  到  $a_{21}$  的虚连线称为副对角线, 于是, 二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

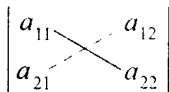


图 1-1-1

### 二、二元线性方程组

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

(1.1)  $\times a_{22}$  - (1.2)  $\times a_{12}$  得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad (1.3)$$

(1.2)  $\times a_{11}$  - (1.1)  $\times a_{21}$  得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \quad (1.4)$$

利用二阶行列式的定义, 记

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则由式 (1.3)、(1.4) 可改写为

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \end{cases}.$$

于是, 在行列式  $D \neq 0$  的条件下, 式 (1.1)、(1.2) 有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

注: 从形式上看, 这里分母  $D$  是由方程组 (1.1)、(1.2) 的系数所确定的二阶行列式 (称为系数行列式),  $x_1$  的分子  $D_1$  是用常数项  $b_1, b_2$  替换  $D$  中  $x_1$  的系数  $a_{11}, a_{21}$  所得的二阶行列式,  $x_2$  的分子  $D_2$  是用常数项  $b_1, b_2$  替换  $D$  中  $x_2$  的系数  $a_{12}, a_{22}$  所得的二阶行列式. 本节后面讨论的三元线性方程组亦有类似的规律性. 请读者学习时注意比较.

例1 解方程组 
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}.$$

解 
$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \times (-2) - 3 \times (-3) = -7, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 8 \times 1 = -14,$$

因  $D \neq 0$ , 故题设方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

### 三、三阶行列式

定义2 记号 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为三阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

由上述定义可见, 三阶行列式有 6 项, 每一项均为不同行不同列的三个元素之

积再冠以正负号，其运算的规律性可用“对角线法则”(见图1-1-2)或“沙路法则”(见图1-1-3)来表述之。

(1) 对角线法则

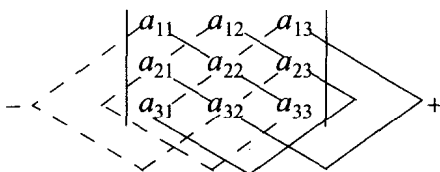


图 1-1-2

(2) 沙路法则

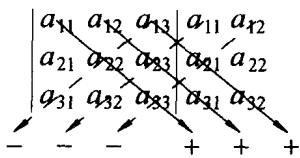


图 1-1-3

例2 计算三阶行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ .

解  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 0 \times 6 + 2 \times 5 \times (-1) + 3 \times 4 \times 0 \\ - 3 \times 0 \times (-1) - 1 \times 5 \times 0 - 2 \times 4 \times 6 \\ = -10 - 48 = -58.$

例3 求解方程  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ .

解 方程左端

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 12 - 9x - 2x^2 = x^2 - 5x + 6,$$

由  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , 解得  $x = 2$  或  $x = 3$ .

#### 四、三元线性方程组

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式  $D \neq 0$ , 则该方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例4 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

解 注意到系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 \times (-1) + (-2) \times (-3) \times (-1) + 1 \times 2 \times 1 \\ &\quad - 1 \times 1 \times (-1) - 1 \times (-3) \times 1 - (-2) \times 2 \times (-1) \\ &= -5 \neq 0, \end{aligned}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

### 习题 1-1

1. 计算下列二阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}.$$

2. 计算下列三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

$$3. \text{ 当 } x \text{ 取何值时, } \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0.$$

## §1.2 $n$ 阶行列式

### 一、排列与逆序

**定义1** 由自然数  $1, 2, \dots, n$  组成的不重复的每一种有确定次序的排列, 称为一个  $n$  级排列 (简称为排列).

例如, 1234 和 4312 都是 4 级排列, 而 24315 是一个 5 级排列.

**定义2** 在一个  $n$  级排列  $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$  中, 若数  $i_t > i_s$ , 则称数  $i_t$  与  $i_s$  构成一个逆序. 一个  $n$  级排列中逆序的总数称为该排列的逆序数, 记为  $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ .

根据上述定义, 可按如下方法计算排列的逆序数:

设在一个  $n$  级排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  中, 比  $i_t$  ( $t=1, 2, \dots, n$ ) 大的且排在  $i_t$  前面的数共有  $t_i$  个, 则  $i_t$  的逆序的个数为  $t_i$ , 而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i.$$

**例1** 计算排列 32514 的逆序数.

**解** 因为 3 排在首位, 故其逆序数为 0;

在 2 前面且比 2 大的数有 1 个, 故其逆序的个数为 1;

在 5 前面且比 5 大的数有 0 个, 故其逆序的个数为 0;

在 1 前面且比 1 大的数有 3 个, 故其逆序的个数为 3;

在 4 前面且比 4 大的数有 1 个, 故其逆序的个数为 1.

将上述结果排成如下形式

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_i & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

易见所求排列的逆序数为

$$N(32514) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5.$$

**定义3** 逆序数为奇数的排列称为奇排列; 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

**例2** 求排列  $n(n-1)\cdots 321$  的逆序数, 并讨论其奇偶性.

**解** 类似例 1 的讨论, 可排出下表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{排列} & n & (n-1) & (n-2) & \cdots & 3 & 2 & 1 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 t_i & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1
 \end{array}$$

则所求逆序数为:

$$N(n(n-1)\cdots 321) = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

易见: 当  $n=4k, 4k+1$  时, 该排列是偶排列; 当  $n=4k+2, 4k+3$  时, 该排列是奇排列.

## 二、 $n$ 阶行列式的定义

观察三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

易见:

- (1) 三阶行列式共有  $6=3!$  项;
- (2) 每项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积;
- (3) 每项的符号是: 当该项元素的行标按自然数顺序排列后, 若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号, 是奇排列则取负号.

故三阶行列式可定义为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{N(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

其中  $\sum_{j_1 j_2 j_3}$  为对所有三级排列  $j_1 j_2 j_3$  求和.

**定义 4** 由  $n^2$  个元素  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \cdots, n$ ) 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为  **$n$ 阶行列式**, 其中横排称为行, 竖排称为列, 它表示所有取自不同行、不同列的  $n$  个元素乘积  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  的代数, 各项的符号是: 当该项各元素的行标按自然顺序排列后, 若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号; 是奇排列则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中  $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$  表示对所有  $n$  级排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  求和. 行列式有时也简记为  $\det(a_{ij})$  或  $|a_{ij}|$ , 这里数  $a_{ij}$  称为行列式的元素, 称

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为行列式的一般项.

注: (1)  $n$  阶行列式是  $n!$  项的代数和, 且冠以正号的项和冠以负号的项 (不包括元素本身所带的符号) 各占一半, 因此, 行列式实质上是一种特殊定义的数;

(2)  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  的符号为  $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)}$  (不包括元素本身所带的符号);

(3) 一阶行列式  $|a| = a$ , 不要与绝对值记号相混淆.

例3 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ .

解 一般项为  $(-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ , 现考察不为零的项.  $a_{1j_1}$  取自第一行, 但只有  $a_{14} \neq 0$ , 故只可能  $j_1 = 4$ ; 同理可得  $j_2 = 3, j_3 = 2, j_4 = 1$ . 即行列式中不为零的项只有  $(-1)^{N(4321)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ , 所以

$$D = 24.$$

注: 一般地, 可得到下列结果:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}.$$

例3的行列式中, 其非副对角线上元素全为0, 此类行列式可以直接求出结果. 特别地, 非主对角线上元素全为0的行列式称为**对角行列式**, 而对角线以下(上)的元素全为0的行列式称为**上(下)三角(形)行列式**.

例4 计算上三角行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0)$ .

解 一般项为  $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ , 现考察不为零的项.  $a_{nj_n}$  取自第  $n$  行, 但只有  $a_{nn} \neq 0$ , 故只可能取  $j_n = n$ ;  $a_{n-1 j_{n-1}}$  取自第  $n-1$  行, 只有  $a_{n-1 n-1}$  及  $a_{n-1 n}$  不为零, 因  $a_{nn}$  取自第  $n$  列, 故  $a_{n-1 j_{n-1}}$  不能取自第  $n$  列, 从而  $j_{n-1} = n-1$ ; 同理可得,  $j_{n-2} = n-2, \cdots, j_1 = 1$ . 所以不为零的项只有

$$(-1)^{N(1,2,\cdots,n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$



$$\text{故} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

注: 类似可得下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

$$\text{对角行列式} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

### 三、对换

为进一步研究  $n$  阶行列式的性质, 先要讨论对换的概念及其与排列奇偶性的关系.

**定义 5** 在排列中, 将任意两个元素对调, 其余的元素不动, 这种作出新排列的工序称为对换. 将两个相邻元素对换, 称为相邻对换.

例如, 对换排列 21354 中元素 1 和 4 的位置后, 得到排列 24351.

**定理 1** 任意一个排列经过一个对换后, 其奇偶性改变.

**证明** 略.

**推论 1** 奇排列变成自然顺序排列的对换次数为奇数, 偶排列变成自然顺序排列的对换次数为偶数.

**证明** 由定理 1 知, 对换的次数就是排列奇偶性的变化次数, 而自然顺序排列是偶排列 (逆序数为 0), 因此结论成立.

**定理 2**  $n$  个自然数 ( $n > 1$ ) 共有  $n!$  个  $n$  级排列, 其中奇偶排列各占一半.

**证明**  $n$  级排列的总数为  $n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$ .

设其中奇排列为  $p$  个, 偶排列为  $q$  个. 若对每个奇排列都做同一对换, 则由定理 1,  $p$  个奇排列均变为偶排列, 故  $p \leq q$ ; 同理对每个偶排列都作同一对换, 则  $q$  个偶排列均变为奇排列, 故  $q \leq p$ , 所以  $p = q$ . 从而  $p = q = \frac{n!}{2}$ .

**定理 3**  $n$  阶行列式也定义为

$$D = \sum (-1)^S a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中  $S$  为行标与列标排列的逆序数之和. 即

$$S = N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n).$$

**证明** 略.