

江苏版课标本



200万套销量

名誉主编 雷洁琼
丛书主编 希 扬



三点一测丛书

树 品 牌 典 范 拓 成 才 之 路

高中数学 选修 2-2

分册主编 孔凡海



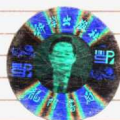
探 究 目 标



探 究 指 导



探 究 综 合 训 练



科学出版社 龙门书局

☆ 与 2007 年江苏版课标本最新教材同步 ☆

三点一测丛书

高中数学(选修 2-2)

◎ 分册主编：孔凡海

◎ 编 者：许 斌 田泽华

周小东 孔凡海

谢启芬 孙熙桐

王晓南

科学出版社 龙门书局

北 京

版权所有 翻印必究

举报电话:(010)64034160,13501151303(打假办)

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

三点一测丛书.高中数学.(选修2-2):江苏版课标本/希扬丛书
主编:孔凡海分册主编.一北京:科学出版社 龙门书局,2006
ISBN 7-80191-687-5

I.三… II.①希…②周… III.数学课-高中-教学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 139948 号

组稿编辑:王 敏/责任编辑:韩 博 刘 娜

封面设计:东方上林工作室

科学出版社 出版
龙 门 书 局

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.longmenbooks.com>

北京市东华印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2006 年 12 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2006 年 12 月第一次印刷 印张:5 3/4

印数:1—10 000 字数:211 000

定 价:8.50 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

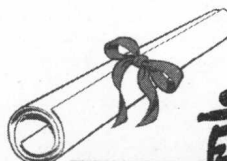
教育为振兴
中华之本

雷洁琼



一九九九年三月

曾任全国人大常委会副委员长的雷洁琼为《三点一测丛书》题词



前言

欢迎阅读，本书内容仅供参考，不作为考试依据。

本书以国家《普通高中数学课程标准(实验)》为依据,与江苏教育出版社的《高中数学选修2-2》相配套,供高中二年级数学选修使用。本书编写指导思想:以实用为原则,讲解突出“三点”精髓,即重点、难点、知识点的讲解,点点到位,讲出学生所需,方便各层次的学生阅读。

学好数学要紧扣数学的基本要求,注重教材中的重点、难点的分析,从而掌握所学到的基础知识;学好数学的有效途径是“做数学”,就是在理解课程的基本内容的基础上多做习题(这是必需的),包括独立地做一些较难而有启发性的习题;学好数学更要重视知识间的相互联系,不断总结数学方法,领悟数学思想,从而切实提高分析问题和解决问题的能力;学好数学还要适当扩大知识面,不断思索一些新问题,关注数学要求的变化,了解数学教育改革的动态,熟悉考试的改革以及新的题型,如情景题、探索题、开放题、研究性问题等等;学好数学还要具有实事求是的态度、锲而不舍的精神、不怕困难的勇气……

基于上述的想法,我们对本书的内容做了精心的设计。

为了便于学习,本书的编排与教材相配套,章节与教材同步,章末设本章小结、高考试题集萃、本章综合测试题三个栏目。每节包括探究目标、探究指导、探究综合训练。

探究目标 包括知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观

探究指导 包括数学宫殿、探究体验

数学宫殿 主要是对知识点进行精讲,除此之外,还增加

了应注意的事项,易错点分析等内容,并针对每个知识点配予例题进行讲解。

探究体验 旨在体现新课标精神,尽量设置一些结合实际应用的题目,活跃思维。

探究综合训练 分为三个层次,即“练一练,你会了吗?”(基础题)、“想一想,如何探究”(中等难度题)、“试一试,经历这些活动”(拔高题(包括拓展题目)),题量比例约为4:4:2。训练的最后,根据需要设置“读一读,你有何收获”,旨在通过补充课外知识,拓展学生知识面。

本章小结 分为四部分,知识结构、方法归析、综合探究、高考题集萃。

知识结构 以框图的形式体现一章的知识结构,并点明重点。

方法归析 对一章的解题方法进行总结,针对综合性题目的规律方法进行归纳分析,每一条方法后,都有相应的例题进行解析。

综合探究 列出并分析本章中涉及的探究性题目。

高考题集萃 针对本章知识内容,精选历年高考真题,旨在使学生提前领略高考风貌,学习更加有的放矢。

欢迎读者对本书提出建设性的意见。

如果对本书有什么好的意见和建议,恳请致函 sdyccs@163.com,不胜感谢。

编者

2006年11月

(011)	人设的煤炭已筑的系统	章2第
(011)	系统的系统	1.1
(011)	算数四的煤炭	1.2
(011)	又意的几的煤炭	1.3
(011)	卦小章本	
(011)	卷指顺章本	

目录

(011)	算数顺业卦指顺
-------	---------

▶▶	第1章 导数及其应用	(1)
▶▶	1.1 导数的概念	(1)
	1.2 导数的运算	(7)
	1.3 导数在研究函数中的应用	(18)
	1.4 导数在实际生活中的应用	(33)
	1.5 定积分	(44)
	本章小结	(51)
	本章测试卷	(62)
▶▶	第2章 推理与证明	(65)
	2.1 合情推理与演绎推理	(65)
	2.1.1 合情推理	(65)
	2.1.2 演绎推理	(74)
	2.1.3 推理案例赏析	(79)
	2.2 直接证明与间接证明	(84)
	2.2.1 直接证明	(84)
	2.2.2 间接证明	(90)
	2.3 数学归纳法	(94)
	本章小结	(100)
	本章测试卷	(108)

▶▶	第3章 数系的扩充与复数的引入	(110)
	3.1 数系的扩充	(110)
	3.2 复数的四则运算	(116)
	3.3 复数的几何意义	(122)
	本章小结	(130)
	本章测试卷	(139)

▶▶	模块结业测试题	(142)
----	----------------	-------

▶▶	参考答案	(144)
----	-------------	-------

(1)	数系的扩充	3.1
(18)	复数的四则运算	3.2
(33)	复数的几何意义	3.3
(44)	本章小结	3.3
(51)	本章测试卷	3.3
(58)	本章测试卷	3.3

(63)	复数的四则运算	3.2
(69)	复数的四则运算	3.2
(72)	复数的四则运算	3.2
(77)	复数的四则运算	3.2
(79)	复数的四则运算	3.2
(81)	复数的四则运算	3.2
(81)	复数的四则运算	3.2
(80)	复数的四则运算	3.2
(84)	复数的四则运算	3.2
(100)	复数的四则运算	3.2
(108)	复数的四则运算	3.2



第1章 导数及其应用



1.1 导数的概念

探究目标

知识与技能 1. 了解函数 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的平均变化率的概念, 会求函数在区间上的平均变化率.

2. 掌握极限给瞬时速度下的精确的定义, 理解足够大、足够小的含义.

3. 掌握导数的概念, 并学会求函数在一点处的导数的方法.

过程与方法 1. 培养学生的辩证唯物主义的观点.

2. 由切线的斜率与瞬时速度的关系, 加深学生对特殊与一般、运动与静止的理解, 增强学生的直觉思维中的类比能力.

情感、态度与价值观 导数的定义是本节课的重点、难点, 求导数的方法也是重点内容, 培养学生的总结、归纳、抽象与概括能力.

探究指导



数学宫殿

1. 平均变化率

一般地, 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的平均变化率定义为 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

平均变化率是曲线陡峭程度的“数量化”, 或者说, 曲线陡峭程度是平均变化率的“视觉化”.

【例1】 已知函数 $f(x) = x^2$, 计算 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 、 $[1, 1.1]$ 上的平均变化率.

思路与技巧 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的平均变化率计算公式为 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$,

函数 $f(x)$ 在 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 上的平均变化率为 $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 常记为

“ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ”

解 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{2} = 4,$$

$f(x)$ 在 $[1, 1.1]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{1.1^2 - 1^2}{0.1} = 2.1.$$

点评 求函数的平均变化率直接套公式即可.

【例2】 已知函数 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -2x$, 分别计算在区间 $[-3, -1]$, $[0, 5]$ 上函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的平均变化率.

思路与技巧 由公式直接计算.

解 $f(x)$ 在 $[-3, -1]$ 及 $[0, 5]$ 上的平均变化率分别为

$$\frac{f(-1) - f(-3)}{(-1) - (-3)} = 2, \quad \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 2.$$

$g(x)$ 在 $[-3, -1]$ 及 $[0, 5]$ 上的平均变化率分别为

$$\frac{g(-1) - g(-3)}{(-1) - (-3)} = -2, \quad \frac{g(5) - g(0)}{5 - 0} = -2.$$

点评 一次函数 $y = kx + b$ 在区间 $[m, n]$ 上的平均变化率为 k .

2. 瞬时变化率

(1) 曲线上一点处的切线

设曲线 C 上一点 $P(x, f(x))$, 过点 P 的一条割线交曲线 C 于另一点 $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, 则割线 PQ 的斜率为 $k_{PQ} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, 当点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动, 并无限靠近点 P 时, 割线 PQ 逼近点 P 的切线 l , 从而割线的斜率逼近切线 l 的斜率, 即当 Δx 无限趋近于 0 时, $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 无限趋近于点 $P(x, f(x))$ 处的切线的斜率.

【例3】 已知曲线 $y = x^2$ 和这条曲线上的一点 $P(1, 1)$. 判断曲线 $y = x^2$ 在点 P 处是否有切线, 如果有, 求出切线的方程.

思路与技巧 应首先判断曲线 $y = x^2$ 的割线 PQ (Q 是曲线 $y = x^2$ 上点 P 附近的一点), 当点 Q 沿着曲线 $y = x^2$ 无限接近于点 P 时, 割线 PQ 的斜率是否有极限, 如果有极限, 那么这个极限值就是曲线 $y = x^2$ 在点 P 处的切线的斜率.

解 在曲线 $y = x^2$ 上点 P 附近取一点 $Q(1 + \Delta x, (1 + \Delta x)^2)$,

$$\text{割线 } PQ \text{ 的斜率为 } k_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, k_{PQ} 有极限, 极限值为 2.

曲线 $y = x^2$ 在点 P 处有切线, 且切线的斜率为 2.

切线方程为: $y - 1 = 2(x - 1)$, 即 $2x - y - 1 = 0$.

点评 割线的斜率的极限值就是 P 点处的切线的斜率.

(2) 瞬时速度与瞬时加速度

定义: 位移 $s = s(t)$, 如果当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $s(t)$ 的平均变化率 $\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \rightarrow$ 常数 A , 则称 A 为物体在 $t = t_0$ 时的瞬时速度.

【例 4】已知一辆轿车在公路上作加速直线运动, 假设 t s 时的速度为 $v(t) = t^2 + 3$, 求 $t = t_0$ s 时轿车的瞬时加速度 a .

思路与技巧 本题就是求当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ 的极限值.

解 在 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 的时间间隔内, 平均加速度为

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \frac{(t_0 + \Delta t)^2 + 3 - (t_0^2 + 3)}{\Delta t} = 2t_0 + \Delta t.$$

当 Δt 无限趋近于 0 时, $\bar{a}$ 无限趋近于 $2t_0$, 即 $a = 2t_0$.

点评 瞬时加速度就是速度对于时间的瞬时变化率.

3. 导数

(1) 导数的概念

设函数 $y = f(x)$, 如果自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx , 那么函数 y 相应地有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 叫做函数 $y = f(x)$ 在 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 之间的平均变化率. 如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限, 我们说函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并把这个极限叫做 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数(或变化率), 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$,

$$\text{即 } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

(2) 导数的实质是函数值相对于自变量的变化率

导数的定义中把比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 叫作函数 $y = f(x)$ 在 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 之间的平均变化率, 并把 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ 叫作 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数或变化率, 定义的这种叙述就说明了导数的实质是函数值相对于自变量的变化率.

(3) 导函数

函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点的导数都存在, 就说 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, 其导数也是 (a, b) 内的函数, 叫作 $f(x)$ 的导函数, 记作 $f'(x)$ 或 y'_x .

函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值 $f'(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在 x_0 处的导数.

(4) 求导数的方法步骤

① 求函数的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.② 求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.③ 求极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

(5) 导数的几何意义与物理意义

① 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 它在该点的导数等于函数所表示曲线在相应点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率. 过点 M 的切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.② 设 $s = s(t)$ 是位移函数, 则 $s'(t_0)$ 表示物体在 $t = t_0$ 时刻的瞬时速度.③ 设 $v = v(t)$ 是速度函数, 则 $v'(t_0)$ 表示物体在 $t = t_0$ 时刻的瞬时加速度.**【例 5】** (1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 - t)}{2t}$ 等于多少?(2) 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} = 1$, 求 $f'(x_0)$.

思路与技巧
$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t} = A. \end{aligned}$$

解 (1)
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 - t)}{2t} &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - t)}{t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t} \right] \\ &= \frac{1}{2} [f'(x_0) + f'(x_0)] \\ &= f'(x_0). \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} &= -\frac{2}{3} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{-2\Delta x} \\ &= -\frac{2}{3} f'(x_0) = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x_0) = -\frac{3}{2}.$$

点评 解题时一定要紧扣公式 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)$.

【例6】已知 $y = (x+1)^2$, 求 y' .

解 $\Delta y = (x + \Delta x + 1)^2 - (x+1)^2 = (2x + 2 + \Delta x)\Delta x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 2 + \Delta x,$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + 2 + \Delta x) = 2x + 2.$$

点评 导数 y' 是 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限, 所以应先求 Δy , 并进行整理, 以便求出 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的代数式.



探究体验

【探究问题】已知曲线 $y = x^2 + \frac{1}{x} + 5$ 上一点 $P(2, \frac{19}{2})$, 求点 P 处的切线方程.

【探究过程】 $y = x^2 + \frac{1}{x} + 5$,

$$\begin{aligned} \therefore y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + \frac{1}{x + \Delta x} + 5 - (x^2 + \frac{1}{x} + 5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[2x + \Delta x - \frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] \\ &= 2x - \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

即 $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$,

$$\therefore y'|_{x=2} = 2 \times 2 - \frac{1}{2^2} = \frac{15}{4},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 处的切线方程是 } y - \frac{19}{2} = \frac{15}{4}(x - 2),$$

即 $15x - 4y + 8 = 0$.

【探究评价】先求函数的导数得到切线的斜率, 再来求切线方程.

探究综合训练



练一练，你会了吗？

1. $f'(x_0)$ 的几何意义是指 ()
 A. 曲线的切线
 B. 曲线切线的斜率
 C. 曲线 $y=f(x)$ 切线的斜率
 D. 曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处切线的斜率
2. 当自变量从 x_0 变到 x_1 时，函数值的增量与相应自变量的增量之比是函数 ()
 A. 在区间 $[x_0, x_1]$ 上的平均变化率
 B. 在 x_0 处的变化率
 C. 在 x_0 处的导数
 D. 在区间 $[x_0, x_1]$ 上的导数
3. 曲线 $y=2x^2+1$ 在点 $P(-1, 3)$ 处的切线方程为 ()
 A. $y=-4x-1$
 B. $y=-4x-7$
 C. $y=4x-1$
 D. $y=4x-7$
4. 若曲线 $y=h(x)$ 在点 $P(a, h(a))$ 处的切线方程为 $2x+y+1=0$ ，则 ()
 A. $h'(a)<0$
 B. $h'(a)>0$
 C. $h'(a)=0$
 D. $h'(a)$ 的符号不确定
5. 已知函数 $y=f(x)$ 在点 $(2, 1)$ 处的切线与直线 $3x-y-2=0$ 平行，则 $f'(x)|_{x=2}$ 等于 ()
 A. -3
 B. -1
 C. 3
 D. 1
6. $y=x^n (n \in \mathbb{N})$ 在 $P(\sqrt{2}, 2^{\frac{n}{2}})$ 处切线的斜率为 20，则 n 等于 ()
 A. 7
 B. 6
 C. 5
 D. 4
7. 已知曲线 $y=x^2$ 上一点 M 处的切线与直线 $y=3-x$ 垂直，则 M 点的坐标为 ()
 A. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
 B. $(1, 1)$
 C. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 D. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
8. 曲线 $y=x^3-3x$ 上哪一点的切线平行于 x 轴 ()
 A. $(0, 0), (1, 3)$
 B. $(-1, 2), (1, -2)$
 C. $(-1, -2), (1, 2)$
 D. $(-1, 3), (1, 3)$



想一想, 如何探究?

9. 函数 $y = x^3 - 1$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处附近有意义, 且有 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a(\Delta x) + b(\Delta x)^2$, (a, b 为常数), 则 $f'(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 质点做直线运动, 若它所经过的路程与时间 t 的关系为 $s(t) = 4t^2 - 3$, 则 $t = 5$ 时的瞬时速度为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 抛物线 $y = x^2$ 在点 $P(-1, 1)$ 处切线的倾斜角为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



试一试, 经历这些活动

13. 曲线 $y = x^3$ 的某一切线与直线 $y = x + 4$ 平行, 求切点坐标.

14. 当常数 k 为何值时, 直线 $y = x$ 才能与函数 $y = x^2 + k$ 相切? 并求出切点.

15. 已知曲线 $y = 2x - x^2$, 求过点 $(-1, -1)$ 的切线方程.



1.2 导数的运算

探究目标

知识与技能 1. 掌握几种常见的函数的导数.

2. 理解两个函数的和(差)、积(商)的导数法则, 学会用法则求一些函数的导数.

3. 能够利用复合函数的求导法则, 求解一些复杂的函数的导数.

过程与方法 理解并能掌握最常见的函数及几个函数的和、差、积、商的求导法则, 并能够在解题中巧设变量, 灵活运用复合函数的求导法则进行求导运算.

情感、态度与价值观 培养学生归纳、猜想的数学方法, 加深学生对一般和特殊的理解, 培养学生用联系的观点看问题.

探究指导



数学宫殿

1. 常见函数的导数

$$(1) C' = 0 (C \text{ 为常数})$$

$$(2) (x^m)' = mx^{m-1} (m \in \mathbb{Q})$$

$$(3) (\sin x)' = \cos x$$

$$(4) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(5) (e^x)' = e^x$$

$$(6) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(7) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e$$

2. 函数的和、差、积、商的导数

若 $u(x)$ 、 $v(x)$ 的导数都存在, 则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2) (u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$$

【例1】求下列函数的导数:

$$(1) y = (2x^2 + 3)(3x - 2); \quad (2) y = \frac{x+3}{x^2+3};$$

$$(3) y = x \sin x - \frac{2}{\cos x}; \quad (4) y = \frac{e^x}{x^2} + \ln 3x.$$

思路与技巧 借助常见的函数的求导法则及和、差、积、商的导数的运算法则进行运算.

解 (1) 方法一: $y' = 4x(3x - 2) + (2x^2 + 3) \cdot 3 = 18x^2 - 8x + 9.$

方法二: $y = (2x^2 + 3)(3x - 2) = 6x^3 - 4x^2 + 9x - 6,$

$$\therefore y' = 18x^2 - 8x + 9.$$

$$(2) y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 3) - 2x(x + 3)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-x^2 - 6x + 3}{(x^2 + 3)^2}.$$

$$\begin{aligned}
 (3) y' &= (x \sin x)' - \left(\frac{2}{\cos x} \right)' = \sin x + x \cos x + 2 \cdot \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
 &= \sin x + x \cos x - \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}.
 \end{aligned}$$

$$(4) y' = \frac{e^x x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} + \frac{3}{3x} = \frac{(x-2)e^x}{x^3} + \frac{1}{x}.$$

【例2】 求下列函数的导数:

$$(1) y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 3x + \sqrt{2};$$

$$(2) y = (3x^5 - 4x^3)(4x^5 + 3x^3);$$

$$(3) y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x};$$

$$(4) y = \frac{x^5 + \sqrt{x} + \sin x}{x^2}.$$

思路与技巧 直接利用导数公式及运算法则.

解 (1) $y' = \left(\frac{1}{5}x^5 \right)' - \left(\frac{4}{3}x^3 \right)' + (3x)' + (\sqrt{2})' = x^4 - 4x^2 + 3.$

$$\begin{aligned}
 (2) y' &= [(3x^5 - 4x^3)(4x^5 + 3x^3)]' \\
 &= (12x^{10} - 7x^8 - 12x^6)' \\
 &= 120x^9 - 56x^7 - 72x^5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) y' &= \frac{(1 - \sin x)'(1 + \cos x) - (1 - \sin x)(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} \\
 &= \frac{-\cos x(1 + \cos x) - (1 - \sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\
 &= \frac{\sin x - \cos x - 1}{(1 + \cos x)^2}.
 \end{aligned}$$

$$(4) \because y = x^3 + x^{-\frac{3}{2}} + x^{-2} \sin x,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore y' &= 3x^2 - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + (x^{-2})' \sin x + x^{-2}(\sin x)' \\
 &= 3x^2 - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - 2x^{-3} \sin x + x^{-2} \cos x.
 \end{aligned}$$

点评 求函数的导数是导数这一章的考查重点,也是解决导数问题的基础. 本题型的题目可以以选择题、填空题形式出现,也可以独立为中低档题,更多是结合在导数知识的应用题中.

3. 简单复合函数的导数

(1) 概念

一般地,设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处有导数, $u'_x = \varphi'(x)$, 函数 $f(u)$ 在点 x