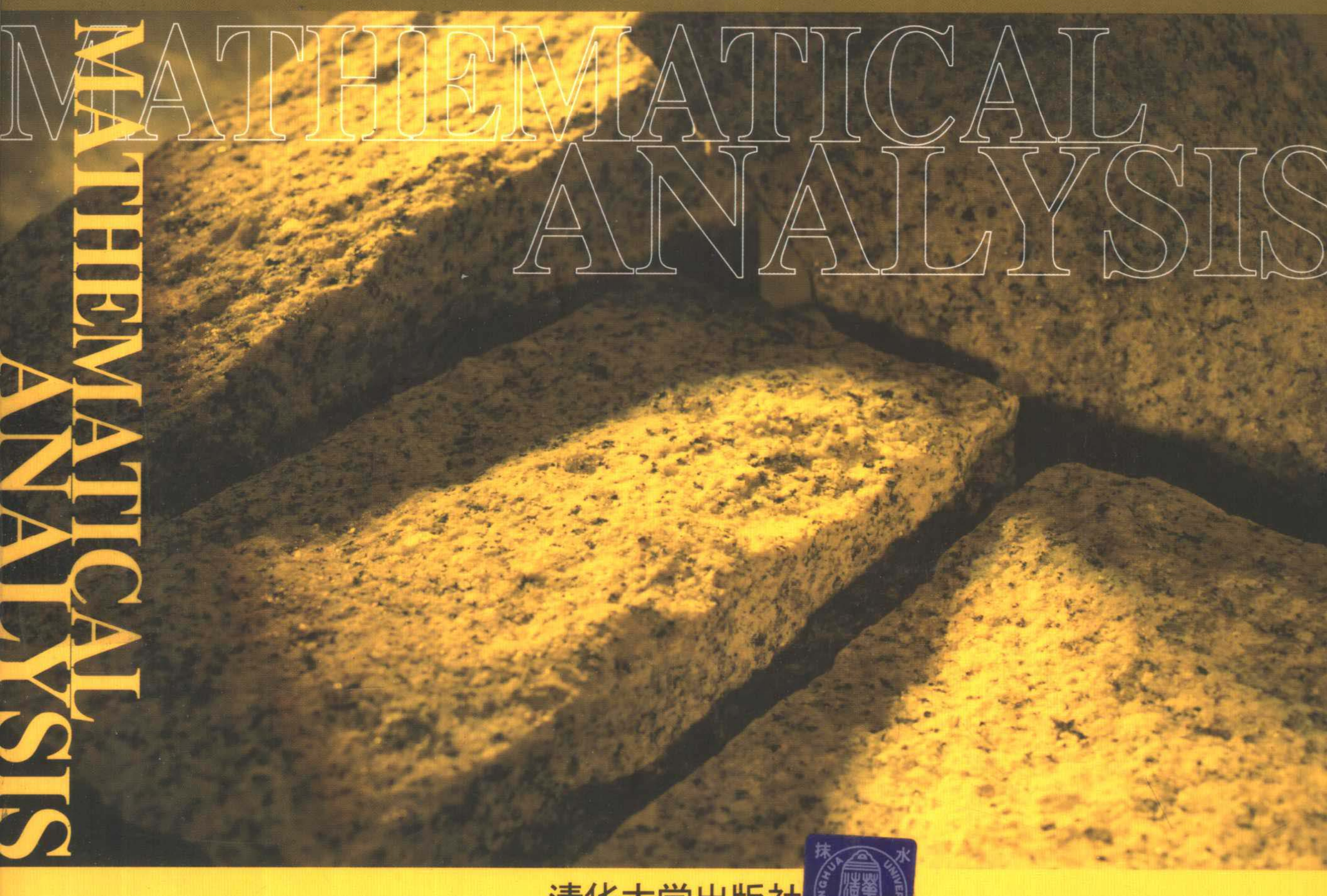
徐森林 金亚东 薛春华 编著

数学分析

第三册

MATHEMATICAL ANALYSIS



清华大学出版社

徐森林 金亚东 薛春华 编著

数学分析

第三册

MATHEMATICAL ANALYSIS

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书共分三册来讲解数学分析的内容.在深入挖掘传统精髓内容的同时,力争做到与后续课程内容的密切结合,使内容具有近代数学的气息.另外,从讲述和训练两个层面来体现因材施教的教学理念.

第三册内容包括无穷级数,函数项级数,幂级数,用多项式一致逼近连续函数,含参变量积分,Fourier 分析.书中配备大量典型实例,习题分练习题、思考题与复习题三个层次,供广大读者使用.

本套书可作为理工科大学或师范大学数学专业的教材,特别是基地班或试点班的教材,也可作为大学教师与数学工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析.第三册./徐森林,金亚东,薛春华编著.—北京:清华大学出版社,2007.4
ISBN 978-7-302-14572-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①徐… ②金… ③薛… Ⅲ.数学分析—高等学校—教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 008926 号

责任编辑: 刘 颖 王海燕
责任校对: 赵丽敏
责任印制: 何 芊
出版发行: 清华大学出版社 **地 址:** 北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn **邮 编:** 100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机: 010-62770175 **邮购热线:** 010-62786544
投稿咨询: 010-62772015 **客户服务:** 010-62776969
印 刷 者: 北京四季青印刷厂
装 订 者: 三河市兴旺装订有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 185×230 **印 张:** 19.75 **字 数:** 407 千字
版 次: 2007 年 4 月第 1 版 **印 次:** 2007 年 4 月第 1 次印刷
印 数: 1~4000
定 价: 25.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:018896-01

前　言

数学分析是数学专业最重要的基础课，它对后继课程（实变函数，泛函分析，拓扑，微分几何）与近代数学的学习与研究具有非常深远的影响和至关重要的作用. 一本优秀的数学分析教材必须包含传统微积分内容的精髓和分析能力与方法的传授，也必须包含近代的内容，其检验标准是若干年后能否涌现出一批高水准的应用数学人才和数学研究人才，特别是一些数学顶尖人物. 作者从事数学分析教学几十年，继承导师、著名数学家吴文俊教授的一整套教学（特别是教授数学分析的）方法（科大称之为“吴龙”），并将其发扬光大，因材施教，在中国科技大学培养了一批国内外知名的数学家与数学工作者. 目前，作者徐森林被特聘到华中师范大学数学与统计学学院，并在数学试点班用此教材讲授数学分析，效果显著.

本书的主要特色可归纳为以下几点.

1. 传统精髓内容的完善化

书中包含了实数的各种引入，七个实数连续性等价命题的论述；给出了单变量与多变量的 Riemann 可积的各等价命题的证明；讨论了微分中值定理，Taylor 公式余项的各种表达；介绍了积分第一、第二中值定理的描述，隐函数存在性定理与反函数定理的两种不同的证法等内容.

2. 与后继课程的紧密结合，使内容近代化

本书在介绍经典微积分理论的同时，将近代数学中许多重要概念、理论恰到好处地引进分析教材中. 例如，在积分理论中，给出了 Lebesgue 定理：函数 f Riemann 可积的充要条件是 f 几乎处处连续且有界；详细讨论了$\mathbb{R}^n$中的拓扑及相应的开集、闭集、聚点等概念，描述了$\mathbb{R}^n$中集合的紧致性、连通性、可数性、Hausdorff 性等拓扑不变性，使读者站到拓扑的高度来理解零值定理、介值定理、最值定理与一致连续性定理. 引进外微分形式及外微分运算，将经典 Newton-Leibniz 公式、平面 Green 公式、空间 Stokes 公式与 Gauss 公式统一为 Stokes 公式，并对闭形式、恰当形式与场论的对偶关系给出了全新的表述. 这不仅使教材内容本身近代化，而且为学生在高年级学习拓扑、实变函数、泛函分析、微分几何等课程提供了一个实际模型并打下良好的基础，为经典数学与近代数学架设了一座桥梁.

3. 因材施教、着重培养学生的研究与创新能力

同一定理(如零值定理,一致连续性定理,Lagrange 中值定理,Cauchy 中值定理,隐函数存在性定理与反函数定理等)经常采用多种证法;同一例题应用不同定理或不同方法解答,这是本书又一特色.它使学生广开思路、积极锻炼思维能力,使思维越来越敏捷与成熟.书中举出大量例题是为了让读者得到一定的基本训练,同时从定理的证明和典型实例的分析中掌握数学分析的技巧与方法.习题共分三个层次:练习题、思考题与复习题.练习题是基本题,是为读者熟练掌握内容与方法设置的.为提高学生对数学的浓厚兴趣及解题的能力,设置了思考题.为了让读者减少做题的障碍,增强对数学的自信心,其中有些题给出了提示.实际上,该节的标题就是最好的提示.在每一章设置了大量复习题,这些题不给提示,因此大部分学生对它们会感到无从下手,这些题是为少数想当数学家的学生特别设置的,希望他们能深入思考,自由发挥,将复习题一一解答出来,为将来的研究培养自己的创新能力.如有困难,我们还可撰写一本精练的学习指导书.

本书共分三册.第一册内容包括数列极限,函数极限与连续,一元函数的导数与微分中值定理,Taylor 公式,不定积分以及 Riemann 积分;第二册内容包括$\mathbb{R}^n$中的拓扑,n 元函数的极限与连续,n 元函数的微分学,隐函数定理与反函数定理,n 重积分,第一型曲线、曲面积分,第二型曲线、曲面积分,Stokes 定理,外微分形式与场论;第三册内容包括数项级数和各种收敛判别法,函数项级数的一致收敛性及其性质,含参变量反常积分的一致收敛性及其性质,Euler 积分(Γ 函数与 B 函数),幂级数与 Taylor 级数,Fourier 分析.

在写作本书的时候,得到了华中师范大学数学与统计学学院领导和教师们的热情鼓励与大力支持,作者们谨在此对他们表示诚挚的感谢.博士生邓勤涛、胡自胜、薛琼,硕士生金亚东、鲍焱红等对本书的写作提出了许多宝贵意见,使本书增色不少.

特别还要感谢的是清华大学出版社的曾刚、刘颖、王海燕,他们为我们提供了本书出版的机会,了却了我多年的心愿.

徐森林

2005 年 6 月于武汉

目　　录

第 12 章　无 穷 级 数

前面接触到的函数主要是初等函数,有相当多的自然现象和工程技术中的问题需要用这些函数来描述.但是,随着科学技术的发展,人们对自然界的认识逐步深化,发现许多自然现象不能用初等函数来描述,特别有很多微分方程的解不能用初等函数来表达,这就要求人们去构造一些新的函数.

19 世纪上半叶,数学家普遍认为,连续函数除了一些特殊点外都是可导的,他们不能想像有处处连续处处不可导的函数存在. 1875 年 Weierstrass 首先构造出具有上述性质的函数,使大家对连续与可导的概念在认识上前进了一大步. Weierstrass 构造的这个函数正是用无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 来表达的. 在例 13.2.14 中介绍的例子不是 Weierstrass 构造的,而是由 Van der Waerden 在 1930 年构造的,它在想法上更直观一些.

由此可见,无穷级数是构造新函数的一个十分有用的工具. 当然,随之会有很多新问题: 无穷多个函数如何求和? 如何研究和函数的性质?

12.1　数 项 级 数

定义 12.1.1　设 $a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 为一实数列,称形式和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**无穷级数**,称 a_n 为该无穷级数的**第 n 项**(也称为**通项**),称 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 为它的第 n 个**部分和**. 如果

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S \in \mathbb{R},$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是**收敛的**,其和为 S,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

否则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是**发散**的.

如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$(或 $-\infty$,∞),则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为和为 $+\infty$(或 $-\infty$,∞),但此时级

数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是发散的.有时,也说级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$**发散于**$+\infty$(或$-\infty$,$\infty$),记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$(或$-\infty$,$\infty$).

上述表明,由数列$\{a_n\}$得出一个新数列$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$;反之,任何一个数列$\{S_n\}$,令$a_1=S_1,a_2=S_2-S_1,\cdots,a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$,就有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1})=S_n,$$

它是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的第$n$个部分和. 于是,

$$\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛(发散)}\Leftrightarrow\text{数列}S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\text{收敛(发散)}.$$

由此可想象到,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与数列$\{S_n\}$之间具有对偶性,也就是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$具有的性质(问题)可以翻译成(化为)数列$\{S_n\}$的性质(问题);反之,数列$\{S_n\}$具有的性质(问题)可以翻译成(化为)级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的性质(问题).但是,应该注意的是,它们各有自己固有的特性和方便的论述,因此,即使对数列已积累了大量的结果,我们还有必要研究级数的各种收敛判别法,函数项级数一致收敛判别法以及级数的重要性质.

定理 12.1.1(级数收敛的 Cauchy 判别法——级数收敛的 Cauchy 准则) 下列结论是等价的:

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛;

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$,当$n,m\in\mathbb{N}$,$m>n$时,有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\right|<\varepsilon;$$

(3) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$,当$n>N$时,有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon,\quad\forall p\in\mathbb{N}.$$

证明 (1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,即$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$收敛,根据数列收敛的 Cauchy 判别法$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$,当$n,m\in\mathbb{N}$,$m\geqslant n$时,有

$$|S_n-S_m|<\varepsilon$$

$\Leftrightarrow$(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$,当$n,m\in\mathbb{N}$,$m>n$时,有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\right|=|S_n-S_m|<\varepsilon$$

$\Leftrightarrow$(3) $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

现在，我们来重述定理 1.4.1.

定理 12.1.2（级数收敛的必要条件）　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. 但反之不真.

证法 1　显然，

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

证法 2　$\forall \varepsilon>0$，因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以根据级数收敛的 Cauchy 判别法知，$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n-1>N$ 时，取 $p=1$，有

$$|a_n - 0| = \left|\sum_{k=(n-1)+1}^{(n-1)+1} a_k\right| < \varepsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

但是，反之不真. 例如：$a_n = \dfrac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$. 而由例 1.4.2，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散. $\square$

推论 12.1.1　如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明（反证）　假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，由定理 12.1.2，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，这与已知 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ 相矛盾. $\square$

定理 12.1.3（级数收敛的简单性质）　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，c 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} ca_k = \lim_{n\to+\infty} c\sum_{k=1}^{n} a_k = c\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \pm \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\end{aligned} \qquad \square$$

定理 12.1.4　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 去掉或加上有限项，不影响级数的敛散性.

证明 设去掉级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 前面 m 项所得级数为 $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}a_n$. 记

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}a_k,\quad S'_n=\sum_{k=m+1}^{m+n}a_k=S_{m+n}-S_m.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ 敛散}\Leftrightarrow S_n\text{ 敛散}\Leftrightarrow S_{m+n}\text{ 敛散}(m\text{ 固定})\Leftrightarrow S'_n=S_{m+n}-S_m\text{ 敛散}\Leftrightarrow\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n\text{ 敛散}.\ \square$$

定理 12.1.5 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 收敛.如果将级数的项任意归组,但不改变先后次序,所得新级数为

$$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots,$$

则新级数也收敛,且与原级数有相同的和.

注意,逆命题不成立.

证明 设原级数的部分和为 S_n,则新级数的部分和为 $S'_k=S_{n_k}$,它为原级数部分和的一个子列.由已知,S_n 收敛,故 S_{n_k} 也收敛,且

$$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots$$

$$=\lim_{k\to+\infty}S_{n_k}=\lim_{n\to+\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

反例:考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+1-1+\cdots$.由于

$$\lim_{k\to+\infty}S_{2k-1}=\lim_{k\to+\infty}1=1,\quad\lim_{k\to+\infty}S_{2k}=\lim_{k\to+\infty}0=0,$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ 不存在,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散.但新级数

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

收敛. $\square$

如果加一个条件,定理 12.1.5 的逆命题就成立了.

定理 12.1.6 设级数

$$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots$$

在同一括号内有相同的符号,且此级数收敛,则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛,且两级数之和相等.

证明 设 $S'_k=(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})=S_{n_k}$,由新级数收敛,故 $\lim\limits_{k\to+\infty}S'_k=S$.因为每个括号内是同号的,所以当 n 从 n_{k-1} 变到 n_k 时,原级数的部分和将单调地在 $S'_{k-1}=S_{n_{k-1}}$ 与 $S'_k=S_{n_k}$ 之间变动,即

$$S'_{k-1}=S_{n_{k-1}}\leqslant S_{n_{k-1}+1}\leqslant\cdots\leqslant S_{n_k-1}\leqslant S_{n_k}=S'_k(\text{当 } a_{n_{k-1}+1}\geqslant 0,\cdots,a_{n_k}\geqslant 0),$$
$$S'_{k-1}=S_{n_{k-1}}\geqslant S_{n_{k-1}+1}\geqslant\cdots\geqslant S_{n_k-1}\geqslant S_{n_k}=S'_k(\text{当 } a_{n_{k-1}+1}\leqslant 0,\cdots,a_{n_k}\leqslant 0).$$

令 $n\to+\infty$，则 $k\to+\infty$，且 $\lim\limits_{k\to+\infty}S'_k=\lim\limits_{k\to+\infty}S'_{k-1}=S$. 根据极限的定义立知，

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=S. \qquad \square$$

例 12.1.1 讨论等比级数的收敛性.

解

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n=1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots$$

$$=\left.\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}q^k=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-q}, & |q|<1,\text{级数收敛},\\ +\infty, & q>1,\\ \infty, & q<-1,\end{cases}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}1=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty, \quad q=1,\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2}\text{不存在}, q=-1.\end{cases}\right\}\text{级数发散}.$$

$\square$

裂项相消法 将 a_n 表示为 $V_{n+1}-V_n$（或 V_n-V_{n-1}）的形式，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}V_{n+1}$ 存在，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(V_{k+1}-V_k)=V_{n+1}-V_1\to\lim_{n\to+\infty}V_{n+1}-V_1(n\to+\infty)$$

$$\left(\text{或 } S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(V_k-V_{k-1})=V_n-V_0\to\lim_{n\to+\infty}V_n-V_0(n\to+\infty)\right).$$

特别地，若 $a_n=\dfrac{1}{\alpha_n\alpha_{n+1}\cdots\alpha_{n+m}}$，其中 α_k 形成公差为 d 的等差数列，取

$$V_n=-\frac{1}{md}\frac{1}{\alpha_n\alpha_{n+1}\cdots\alpha_{n+m-1}}, \quad m\in\mathbb{N},$$

则有

$$\begin{aligned}V_{n+1}-V_n&=-\frac{1}{md}\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdots\alpha_{n+m}}-\frac{1}{\alpha_n\alpha_{n+1}\cdots\alpha_{n+m-1}}\right)\\&=-\frac{1}{md}\frac{\alpha_n-\alpha_{n+m}}{\alpha_n\alpha_{n+1}\cdots\alpha_{n+m}}=-\frac{1}{md}\frac{-md}{\alpha_n\alpha_{n+1}\cdots\alpha_{n+m}}\\&=\frac{1}{\alpha_n\alpha_{n+1}\cdots\alpha_{n+m}}=a_n.\end{aligned}$$

例 12.1.2 求下列级数的和：

(1) $\lim\limits_{n=1}\dfrac{1}{n(n+1)}$； (2) $\lim\limits_{n=1}\dfrac{1}{4n^2-1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$.

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\xlongequal{\text{裂项相消}}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\xlongequal{\text{裂项相消}}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}.$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$
$$\xlongequal{\text{裂项相消}}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}.$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{(n+1)-n}{n^2+n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}[\arctan(n+1)-\arctan n]$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}[\arctan(k+1)-\arctan k]$$
$$=\lim_{n\to+\infty}[\arctan(n+1)-\arctan 1]$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$ □

例 12.1.3 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2}{3^n}$ 的和.

解 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2}{3^n}\xlongequal{\text{定理 12.1.3}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}+2\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}.$$ □

例 12.1.4 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

解法 1 设 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$，则

$$\frac{1}{3}S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{3^n}.$$

两式相减得

$$\frac{2}{3}S = S - \frac{1}{3}S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{3^n} = \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

$$S = \frac{3}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

解法 2 因为 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'$

$$= \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{0+0+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$ □

例 12.1.5 证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 均发散.

证明 因为

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \neq 0,$$

所以，根据定理 11.1.2，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 均发散. □

例 12.1.6 设 $a_n > 0$，$\{a_n - a_{n+1}\}$ 为一个严格减的数列. 如果 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$$

证明 因为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，由定理 12.1.2 知，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - a_{n+1}) = 0$. 但因 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 严格减，故必有 $a_n - a_{n+1} > 0$，即 $\{a_n\}$ 为严格减的数列. 此外，由于 $\{a_n - a_{n+1}\}$

严格减，故有

$$a_n^2 = \sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2 - a_{k+1}^2) = \sum_{k=n}^{\infty}(a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1})$$
$$< (a_n - a_{n+1})\sum_{k=n}^{\infty}(a_k + a_{k+1}),$$

于是

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} > \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2} > \frac{1}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k + a_{k+1})} \to +\infty \quad (n \to +\infty).$$

这是因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + a_{k+1})$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k + a_{k+1}) = 0$. 由此推得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right).$$ □

练习题 12.1

1. 研究下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+5}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}.$$

2. 证明下列级数发散：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+1}{3n^2-2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\dfrac{1}{n}$.

3. 求下列级数的和：

(1) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2^{n-1}} + \cdots$;

(2) $\dfrac{1}{1\times3} + \dfrac{1}{3\times5} + \dfrac{1}{5\times7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$;

(3) $\dfrac{1}{1\times4} + \dfrac{1}{4\times7} + \dfrac{1}{7\times10} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$;

(4) $\dfrac{1}{1\times4} + \dfrac{1}{2\times5} + \dfrac{1}{3\times6} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+3)} + \cdots$;

(5) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n} + \cdots$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2+1}$.

4. 证明下列等式：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\ln 2$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$，其中 m 为自然数.

5. 作一无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，使其部分和 $S_n=\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$.

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 也收敛. 举例说明，逆命题不成立. 但若 $a_n\geqslant 0$，则逆命题也成立，试证之.

7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散.

8. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是发散级数，举例说明下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n),\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n},$$

可能收敛，也可能发散.

9. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$（提示：考虑 $(1-e^{-x})S_n$）.

10. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}, |x|<1$；　　(2) $\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2k^2}$；

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+1)}$.

思考题 12.1

1. 设 r 为正整数，$pn+q\neq 0, n=1,2,\cdots$，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)}=\frac{1}{pr}\left(\frac{1}{q+p}+\frac{1}{q+2p}+\cdots+\frac{1}{q+rp}\right).$$

2. 设 m 为给定的正整数,证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}=-\frac{1}{4m^2}.$$

3. 应用不等式

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}<\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right),\quad k=2,3,\cdots.$$

证明:

$$10<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10^6}<20.$$

4. 设数列 $\{na_n\}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 都收敛. 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

5. (1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为一个收敛级数,其和为 S. 用 $\{S_n\}$ 记它的部分和数列. 令

$$\sigma_n=\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}.$$

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=S$.

(2) 构造一个发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,使得由(1)所定义的 $\{\sigma_n\}$ 却是收敛的.

(3) 设 $\{\sigma_n\}$ 是由(1)定义的数列. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=S$,证明: $a_n=o(n),n\to+\infty$.

6. 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 对于任意的正整数序列 $p_1,p_2,\cdots,p_k,\cdots$ 及自然数的任意子序列 $\{n_k\}$,皆有

$$\lim_{k\to+\infty}(a_{n_k+1}+a_{n_k+2}+\cdots+a_{n_k+p_k})=0.$$

12.2 正项级数的判别法

我们先来给出正项级数的各种判别法. 它们都是根据级数的通项 a_n 的性质来判定无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性,从而得到了部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 所组成的数列的敛散性. 这也是从 a_n 这局部性态反映和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的整体性质.

定义 12.2.1 设 $a_n\geqslant 0(a_n>0),n=1,2,\cdots$,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为(**严格**)**正项级数**. 显然,(严格)正项级数的部分和数列 $S_n=S_{n-1}+a_n\geqslant S_{n-1}(>S_{n-1})$ 是(严格)单调增的. 因此,有下面的定理.