新课标

配江苏版

高中数学

学习质量测评

《学习质量测评》编委会 策划编写

必修5

凤凰出版传媒集团
江苏文艺出版社
JIANGSU LITERATURE AND ART PUBLISHING HOUSE

xi zhi liang ce ping xue xi zhi liang ce ping xue xi zhi liang ce ping

高中数学

必修 5

学科主编：王思俭

本册主编：王思俭

编写人员：王思俭　朱　明　刘红军

苏　玖　彭　诚

新课标学习质量测评

凤凰出版传媒集团

江苏文艺出版社

JIANGSU LITERATURE AND ART PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

新课标学习质量测评．高中数学．5：必修/王思俭主编．—南京：江苏文艺出版社，2007.5

ISBN 978-7-5399-2573-8

Ⅰ．新…　Ⅱ．王…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 068344 号

书　　名　新课标学习质量测评・高中数学・必修 5
编　　者　王思俭等
责任编辑　贾树人
责任监制　卞宁坚　江伟明
出版发行　江苏文艺出版社(南京湖南路 47 号　210009)
集团地址　凤凰出版传媒集团(南京中央路 165 号　210009)
集团网址　凤凰出版传媒网　http://www.ppm.cn
印　　刷　南京雄州印刷有限公司
经　　销　江苏省新华书店集团有限公司
开　　本　850×1168 毫米　1/16
印　　张　92.5
字　　数　236 万字
版　　次　2007 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
标准书号　ISBN 978-7-5399-2573-8
定　　价　135.00 元(全九册)

《高中学习质量测评》编委会

总策划:张志翔　伊　仁

委　员:张必忠(江苏省化学高级教师,江苏省如东高级中学)

钱　骏(江苏省物理特级教师,江苏省梁丰高级中学)

王思俭(江苏省数学特级教师,江苏省苏州中学)

黄建书(江苏省生物特级教师,江苏省南通第一中学)

王仁元(江苏省英语特级教师,南京市外国语学校)

章　宏(南京教育科学研究所主任,高级教师)

靳贺良(江苏省语文特级教师)

郭东辉(江苏省历史高级教师)

陆芷茗(江苏省地理高级教师)

陈明芬(江苏省政治高级教师)

编写说明

从2004年开始，江苏省的高考进入"国家统一考试，分省自主命题"的新阶段；2005年秋季起，江苏全省启用"普通高中课程标准实验教科书"，这意味着2008年的高考将以此为纲。面对如此快速的变动，研究教材、研究高考日显重要。江苏文艺出版社组织江苏省内教育发达地区的一线优秀骨干教师、教研员组成《学习质量测评》编委会，认真研究、分析了当前高中教育教学改革的需要，汲取优秀学习辅导资料的精华，为广大高中师生量身定做了这套教辅精品。本套丛书有以下特点：

贴近教学，重点突出。

2005年江苏全面进入高中课程改革，普通高中课程由必修和选修两部分构成，通过学分描述学生的课程修习状况。为此，《学习质量测评》丛书从高中一年级开始配合此次课程改革的要求，配套多个版本新课标教材的内容进行编写，做到与教材配套，与课改要求配套。

名校名师，倾力奉献。

这套丛书的编写人员由省内重点中学近百位教研专家、特高级教师组成，囊括众多名校名师：梁丰高级中学校长、物理特级教师钱骏；如东高级中学校长、化学高级教师张必忠；苏州中学数学特级教师王思俭；南通一中生物特级教师黄建书；南京教育科学研究所主任、高级教师章宏；语文特级教师靳贺良等。

编写人员认真把握教学大纲的精神，分析、研究当前图书市场上同类教辅的优劣，结合自己多年的教学心得体会，力争把最便捷、最优秀、最实惠的教学成果奉献给广大师生。

命题设计，精当新活。

不论是名师点拨，还是水平自测、能力提升，所选的题目体现了一个"精"字；以点带面，突出一个"活"字。注重学生的能力培养，命题设计灵活多样，具有较强的前瞻性，充分体现了高考和课改中的能力要求，在练习中培养学生的创新思维和探索精神。

设计合理，便于使用。

编写体例按照学、练、考的教学思想、优化设计，合理安排。在栏目设置中考虑了有便于学生预习的**课前链接**；提炼重点的**知识网络**；师生互动的**名师点拨**；便于自测的**水平自测**；贴近高考，便于学有余力学生自学的**高考展望**和**能力提升**。

Contents
目录

第一章　解斜三角形

第二章　数列

Contents 目录

Contents

第一章 解斜三角形

第一课时 正弦定理(1)

问题情景设置

例1 证明正弦定理.

思路与技巧 课本已经给出了正弦定理的两种证明方法,分别是传统证法和向量法,我们还可以用下面的方法进行证明.

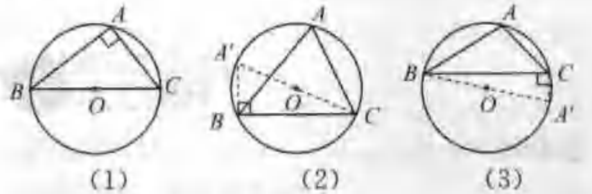
证法一 (面积法)在任意$\triangle ABC$中,由三角形的面积公式有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

两边同除以$\frac{1}{2}abc$即得$\frac{\sin A}{c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{2}$,

即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

证法二 (外接圆法)设圆O是三角形的外接圆,其半径为R.



(1) (2) (3)

图 11-1-1

当$\angle A$为直角时(如图 11-1-1(1)),$BC=2R=a$,则$\frac{a}{\sin A}=\frac{2R}{1}=2R$;

当$\angle A$为锐角时(如图 11-1-1(2)),过B的直径为BD,连结CD,则$\angle A=\angle D$,在直角$\triangle BCD$中,由$a=BC=BD\sin D=2R\sin A$得$\frac{a}{\sin A}=2R$;

当$\angle A$为钝角时(如图 11-1-1(3)),过B的直径为BD,连结CD,则$\angle A+\angle D=180°$,在直角$\triangle BCD$中,由$a=BC=BD\sin D=2R\sin(180°-A)=2R\sin A$得$\frac{a}{\sin A}=2R$,所以对任意$\triangle ABC$,都有$\frac{a}{\sin A}=2R$,

同理$\frac{b}{\sin B}=2R$,$\frac{c}{\sin C}=2R$,

所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

解题回顾 利用正弦定理,适当进行边角的转化,是解决这类问题的关键.

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($R$为外接圆半径).

知识网络梳理

1. 掌握正弦定理,会用正弦定理解决两类有关三角形的问题:

(1) 已知两角和任一边,求其他两边和一角;

(2) 已知两边和其中一边的对角,求另一边的对角,从而求其他的边与角.

2. 利用两边a,b及其中一边的对角A,利用$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,求角$B$时,可能有一解、两解或无解的情况,判断方法如下表:

	$\angle A>90°$	$\angle A=90°$	$\angle A<90°$	
$a>b$	一解	一解	一解	
$a=b$	无解	无解	一解	
$a<b$	无解	无解	$a>b\sin A$	两解
			$a=b\sin A$	一解
			$a<b\sin A$	无解

名师点拨

例1 在$\triangle ABC$中,a,b,c分别是$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$所对应的边,若$\angle A=105°$,$\angle B=45°$,$b=2\sqrt{2}$,

求 c.

思路分析 已知两角 A、B 和一边 b，可通过正弦定理求得另两边 a，c 及角 C.

解 由已知可得 $\angle C=180^\circ-105^\circ-45^\circ=30^\circ$，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，有 $\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{c}{\frac{1}{2}}$，$\therefore c=2$.

解题回顾 已知两角和任一边，求其他两边和一角，这是利用正弦定理解决三角形问题中最简单的类型.

例2 根据下列条件解三角形：

(1) $a=8$，$b=4\sqrt{6}$，$\angle A=45^\circ$；

(2) $a=8$，$b=4\sqrt{2}$，$\angle A=45^\circ$.

思路分析 由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，(1)中 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，(2)中 $\sin B=\frac{1}{2}$. 由于(1)中 $a<b$，$\angle A<90^\circ$，从而 B 有两解 60° 和 120°；(2)中 $a>b$，$\angle A<90^\circ$，从而 B 有一解 30°.

解 (1) 由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 有

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

又 $a<b$，$\angle A<90^\circ$，$\therefore \angle B=60^\circ$ 或 $\angle B=120^\circ$.

当 $\angle B=60^\circ$ 时，$\angle C=75^\circ$，

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{8\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{3}+4,$$

当 $\angle B=120^\circ$ 时，$\angle C=15^\circ$，

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{8\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{3}-4.$$

(2) 由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 有

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{8}=\frac{1}{2},$$

又 $a>b$，$\angle A<90^\circ$，$\therefore \angle B=30^\circ$，此时 $\angle C=105^\circ$，

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{8\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{3}+4.$$

解题回顾 本题中的(1)，(2)两题，都是三角形中已知两边和其中一边的对角问题，可能有一解或二解的情况，要根据两边的大小关系及已知角的范围进行判断.

水平自测
HUI PING ZI CE

1. 已知 $\triangle ABC$ 中，$a=10$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=45^\circ$，则 c 等于 ( )

A. $10+\sqrt{3}$ B. $10(\sqrt{3}+1)$

C. $10(\sqrt{3}-1)$ D. $\sqrt{3}+1$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$\angle A=45^\circ$，则满足此条件的三角形的个数为 ( )

A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 无数个

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=6$，$b=6\sqrt{3}$，$\angle A=30^\circ$，则边 c 等于 ( )

A. 6 B. 12

C. 6或12 D. $6\sqrt{3}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$b=2$，$\angle A=60^\circ$，$\angle C=45^\circ$，则此三角形的最小边长为________.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=x$，$b=2$，$\angle B=45^\circ$，若此三角形有两解，则 x 的取值范围是________.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$\angle A=30^\circ$，则 $\angle B=$________.

7. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$c=10$，$\angle A=45^\circ$，$\angle C=30^\circ$，求 a，b 和 B.

8. 在$\triangle ABC$中，$b=\sqrt{3}$，$\angle B=60^\circ$，$c=1$，求a和$\angle A$，$\angle C$.

高考展望
AO KAO ZHAN WANG

例 （2006年江苏卷高考题）在$\triangle ABC$中，已知$BC=12$，$A=60^\circ$，$B=45^\circ$，则$AC=$________.

思路分析 本题主要考查解三角形的基本知识在任一个三角形中，各边和它所对角的正弦比相等，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$为$\triangle ABC$外接圆半径）

解 由正弦定理得：$\frac{AC}{\sin 45^\circ}=\frac{BC}{\sin 60^\circ}$，解得$AC=4\sqrt{6}$.

解题回顾 已知三角形两边与一边的对角，解三角形宜用正弦定理，根据已知条件，或结合图形进行分类讨论来判定解的情形，并正确求解，这是本节课的难点.

能力提升
NENG LI TI SHENG

1. 在$\triangle ABC$中，$a=m$，$b=\sqrt{2}m$，$\angle A=30^\circ$，则满足此条件的三角形的个数为 （　　）

   A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 无数个

2. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle B=45^\circ$，$c=2\sqrt{2}$，$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则$\angle A$的值为 （　　）

   A. 15°　　B. 75°

   C. 105°　　D. 75°或15°

3. 在$\triangle ABC$中，$\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{12}{13}$，则角C有 （　　）

   A. 0解　　B. 1解　　C. 2解　　D. 无数解

4. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2b$，$B=30^\circ$，则$C=$________.

5. （2006年湖北高考卷文11）在$\triangle ABC$中，已知$a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$b=4$，$\angle A=30^\circ$，则$\sin B=$________.

6. 在$\triangle ABC$中，$c=\sqrt{6}$，$\angle A=45^\circ$，$a=2$，求b和$\angle B$，$\angle C$.

7. 在$\triangle ABC$中，已知$B=30^\circ$，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2$，求$\triangle ABC$的面积.

第二课时 正弦定理(2)

问题情景设置

题目 在$\triangle ABC$中,$\angle A=60°$,$b^2=ac$,求$\frac{b\sin B}{c}$的值.

解析1 在$\triangle ABC$中,由正弦定理得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$.

$\because b^2=ac,\angle A=60°$,

$\therefore \frac{b\sin B}{c}=\frac{b^2\sin A}{ca}=\sin A=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解析2 在$\triangle ABC$中,由面积公式得

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B.$$

$\because b^2=ac$, $\angle A=60°$,$\therefore bc\sin A=b^2\sin B$,

$\therefore \frac{b\sin B}{c}=\sin A=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解题回顾 本题利用正弦定理,进行三角形中的边角关系的转化.

知识网络梳理

1. 利用$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$可以将边转化成角;利用$\sin A=\frac{a}{2R}$,$\sin B=\frac{b}{2R}$,$\sin C=\frac{c}{2R}$可以将角转化成边.

2. 三角形的面积公式:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C.$$

3. 能根据已知条件和所求结论,适当进行边角关系的转化.

名师点拨

例1 在$\triangle ABC$中,若$b=2a$,$\angle B=\angle A+60°$,求$\angle A$.

思路分析 已知条件中给出边角关系,而所求结论是求角,故需用正弦定理将$b=2a$化成$\sin B=2\sin A$进行求解.

解 由$b=2a$有$\sin B=2\sin A$,又$\angle B=A+60°$,

$\therefore \sin(A+60°)=2\sin A$,

$\therefore \sin A\cos 60°+\cos A\sin 60°=2\sin A$,

$\therefore \frac{3}{2}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$,$\therefore \tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle A=30°$.

解题回顾 利用正弦定理,适当进行边角的转化,是解决这类问题的关键.

变题:在锐角$\triangle ABC$中,若$\angle B=2\angle A$,求$\frac{b}{a}$的取值范围.

解析 $\because$锐角$\triangle ABC$,

$$\therefore \begin{cases}0<\angle B=2\angle A<\frac{\pi}{2},\\ 0<\pi-\angle A-\angle B<\frac{\pi}{2},\end{cases}\quad \therefore \begin{cases}0<\angle A<\frac{\pi}{4},\\ \frac{\pi}{6}<\angle A<\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

$\therefore \angle A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$,$\angle B=2\angle A$,

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=2\cos A$,

$\therefore \frac{b}{a}\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

例2 在$\triangle ABC$中,若$a\cos A=b\cos B$,试判定$\triangle ABC$的形状.

思路分析 本题已知条件中,给出了边a,b和角A,B的混和关系,我们可以通过正弦定理,将已知条件化成角A和角B的关系:$\sin A\cos A=\sin B\cos B$,即$\sin 2A=\sin 2B$,再进行判定.

解 由$a\cos A=b\cos B$有$\sin A\cos A=\sin B\cos B$,即$\sin 2A=\sin 2B$,又$\angle A\in(0,\pi)$,$\angle B\in(0,\pi)$.

$\therefore 2\angle A=2\angle B$或$2\angle A+2\angle B=\pi$,

$\therefore \angle A=\angle B$或$\angle A+\angle B=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

解题回顾 判定$\triangle ABC$的形状,主要是通过边角变换,寻求边a,b,c和角A,B,C之间的特殊关系,除利用正弦定理和后面的余弦定理外,还要注意:$A+B+C=\pi$,$\sin(A+B)=\sin C$,$\cos(A+B)=-\cos C$,$\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}$,$\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$等等.本题在得出$\sin 2A=\sin 2B$后,容易忽视$2\angle A+2\angle B=\pi$,从而导致判定错误.

水平自测
HUI PING ZI CE

1. 在△ABC 中，若 $\sin A=2\sin B\cdot\cos C$，$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，则△$ABC$ 的形状是　（　）
A. 直角三角形　B. 等腰直角三角形
C. 等腰或直角三角形　D. 等腰三角形

2. 在△ABC 中，若 $\angle A=60°$，$a=\sqrt{3}$，则有 $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$等于　（　）
A. 2　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\sqrt{3}$　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. 在△ABC 中，$a\cos C+c\cos A$ 的值为　（　）
A. b　B. $\dfrac{b+c}{2}$
C. $2\cos B$　D. $2\sin B$

4. 在△ABC 中，$a=2$，$b=3$，$\angle C=150°$，则 $S_{\triangle ABC}=$__________.

5. 在△ABC 中，$\angle A=\angle B=30°$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，则外接圆半径 $R=$__________.

6. 在△ABC 中，$b=a\cos C$，则△ABC 是________三角形.

7. 在△ABC 中，$a=4$，$\angle A=30°$，$b=4\sqrt{3}$，求 $S_{\triangle ABC}$.

8. 海上有 A，B 两个小岛相距 10 海里，从 A 岛观测 C 岛与 B 岛成 60°的视角，从 B 岛观测 A 岛和 C 岛成 75°的视角，那么 B 岛与 C 岛之间的距离是多少海里？

高考展望
AO KAO ZHAN WANG

例　(05 江苏高考)在△ABC 中，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=3$，则△ABC 的周长为　（　）

A. $4\sqrt{3}\sin(B+\dfrac{\pi}{2})+3$

B. $4\sqrt{3}\sin(B+\dfrac{\pi}{3})+3$

C. $6\sin(B+\dfrac{\pi}{3})+3$

D. $6\sin(B+\dfrac{\pi}{6})+3$

思路分析：已知三角形一边及对角，三角形不确定，不能解此三角形，从选择中知要求将周长用 B 的式子来表示，相当于已知两角一边，应用正弦定理可解.

解　由于三角形的周长为 $AB+BC+CA$，已知 $BC=3$，

由正弦定理

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow AC=\frac{3\sin B}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}\sin B;$$

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow AB=\frac{3\sin C}{\sqrt{3}2}=2\sqrt{3}\sin C;$$

故周长 $AB+BC+CA$

$=2\sqrt{3}(\sin B+\sin C)+3$

$=2\sqrt{3}[\sin(B+\dfrac{\pi}{3})+\sin B]+3$

$=2\sqrt{3}(\sin B\cdot\dfrac{1}{2}+\cos B\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin B)+3$

$=6\sin(B+\dfrac{\pi}{6})+3.$

故正确答案 D.

解题回顾　解三角形中的问题，主要是根据条件和结论，进行边角关系的转化. 本题利用正弦定理将边的关系转化为角的关系.

能力提升
NENG LI TI SHENG

1. 在△ABC 中，若 $\dfrac{a}{\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{b}{\cos\frac{B}{2}}=\dfrac{c}{\cos\frac{C}{2}}$，则△$ABC$ 是　（　）
A. 等腰三角形　B. 等腰直角三角形
C. 直角三角形　D. 等边三角形

2. 在△ABC中,若$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$,则△ABC是 ( )

A. 直角三角形

B. 等腰三角形

C. 正三角形

D. 直角三角形或等腰三角形

3. 关于x的方程$x^2-x\cos A\cos B-\cos^2\frac{C}{2}=0$有一个根为1,则△ABC一定是 ( )

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　　D. 钝角三角形

4. 在△ABC中,$a=2$,$\angle A=30°$,$\angle C=45°$,则△ABC的面积等于________.

5. 有一长为100 m的斜坡,它的倾斜角为45°,现在要把倾斜角改为30°,则坡底要伸长______ m.(保留根号)

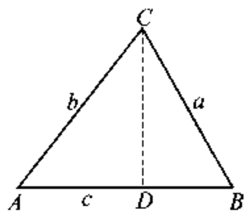
6. 在△ABC中,∠A、∠B、∠C的对边的边长分别为a、b、c,若$\cos^2(\frac{\pi}{2}+A)+\cos A=\frac{5}{4}$,且$b+c=\sqrt{3}a$,试求$\cos\frac{B-C}{2}$的值.

7. 在△ABC中,$b=2a$,$B=A+60°$,求角A.

第三课时 余弦定理(1)

问题情景设置

例题 如图,在△ABC中,应用勾股定理证明余弦定理.



解析 设$AB=c$,$AC=b$,$BC=a$,过顶点C作AB边上的高CD.

则$CD=b\sin A$,

$AD=b\cos A$,$DB=C-b\cos A$,

在Rt△CDB中,$BC^2=CD^2+DB^2$.

$$a^2=b^2\sin^2A+(c-b\cos A)^2$$
$$=b^2\sin^2A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos A$$
$$=b^2(\sin^2A+\cos^2A)-2bc\cos A+c^2$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

解题回顾 本例用正弦定理和余弦定理将其边角进行转换,如用正弦定理将一角及对边转换成另一角及对边,或由两边关系转化为两角正弦关系;利用余弦定理及其各种形式,将其边角进行灵活转换,学习时应注意细心体会这种转换思想与转换技巧.

知识网络梳理

1. 余弦定理:在△ABC中,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.它揭示了三角形的一个内角和三边长之间的动态结构.

2. 利用余弦定理可以解决以下两类问题:

(1) 已知两边及其夹角,求第三边及其他角;

(2) 已知三边求角.此外利用余弦定理还可以判断三角形的形状.

名师点拨

例1 已知△ABC中,$a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$,求△ABC的各角度数.

思路分析　由于已知了三条边的比值，所以只要对三边进行“技术处理”后，就可以用余弦定理求角了.

解　令$a=2k,b=\sqrt{6}k,c=(\sqrt{3}+1)k,k\neq0$.利用余弦定理，有

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6+(\sqrt{3}+1)^2-4}{2\times(\sqrt{3}+1)\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore A=45^\circ$.

同样方法可得$\cos B=\frac{1}{2}$，$\therefore\angle B=60^\circ$.

$\therefore C=180^\circ-45^\circ-60^\circ=75^\circ$.

解题回顾　根据问题给出的条件$a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$，为使用余弦定理求角创造条件，这是解答本题关键一步.

例题　设一个三角形的三边长分别为a，b，$\sqrt{a^2-ab+b^2}$，求最长边与最短边的夹角.

思路分析　在$\triangle ABC$中，已知三边，可以用余弦定理求三角.解决本题的关键在于如何判定出最长边与最短边.

解　不妨设$a\geqslant b$，则$\sqrt{a^2-ab+b^2}=\sqrt{a(a-b)+b^2}\geqslant\sqrt{b^2}=b$，$\sqrt{a^2-ab+b^2}=\sqrt{a^2-b(a-b)}\leqslant\sqrt{a^2}=a$.

$\therefore a$为最长边，b为最短边.设其夹角为θ，则由余弦定理有

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-(a^2-ab+b^2)}{2ab}=\frac{1}{2},\therefore\theta=60^\circ.$$

解题回顾　本题首先利用放缩法判断出最长边与最短边，然后利用余弦定理表示出第三边，再设法求夹角的余弦值，由三角函数值求角时，一定要注意角的范围，否则就会求错或者求得的角的值出现增根.

水平自测
HUI PING ZI CE

1. 在$\triangle ABC$中，$a=1,b=2,\angle C=120^\circ$，则$c$等于　（　　）

   A. 7　　B. 3　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{3}$

2. 在$\triangle ABC$中，已知三边长之比为$7:8:13$，则此三角形中最大的内角是　（　　）

   A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

   C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

3. 在$\triangle ABC$中，若$a^2+b^2>c^2,b^2+c^2>a^2,c^2+a^2>b^2$，则此三角形是　（　　）

   A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

   C. 直角三角形　　D. 正三角形

4. 在$\triangle ABC$中，若三边长分别为3、5、7，则$\triangle ABC$一定是________三角形(填“锐角”或“钝角”).

5. 三角形的三边分别是a、b、c，且满足$(a+b+c)(a+b-c)=ab$，则c边所对的内角等于__________.

6. 在$\triangle ABC$中，$A=60^\circ$，最大边与最小边的长是方程$3x^2-27x+32=0$的两个实根，则BC的长是__________.

7. 在$\triangle ABC$中，若$\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$，求$\cos B$.

8. $\triangle ABC$中，若已知三边为连续正整数，最大角为钝角.

   (1) 求最大角的余弦值；

   (2) 求以此最大角为内角，夹此角两边之和为4的平行四边形的最大面积.

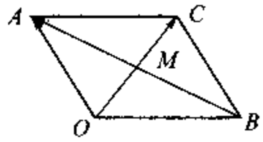
G 高考展望
AO KAO ZHAN WANG

例 (2005年河南模拟题)已知向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$,满足 $|\vec{a}|=5$,$|\vec{b}|=3$,$|\vec{a}-\vec{b}|=7$,求:

(1) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角;

(2) 求 $|\vec{a}+\vec{b}|$;

(3) $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角的余弦值.



思路分析 如图,$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$,$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$,从而 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角,即为 $\angle AOB$;$|\vec{a}+\vec{b}|$ 即为 $|\overrightarrow{OC}|$;$\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角,即为 $\angle OMB$,这些都可以由余弦定理解决.

解 (1) $\cos\angle AOB=\dfrac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$,$\therefore\ \angle AOB=120^\circ$,

即 a 与 b 的夹角是 120°.

(2) $\triangle OBC$ 中,$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle OBC=19$,$\therefore\ |a+b|=\sqrt{19}$.

(3) 设 OC 与 BA 交于 M,则 $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$ 的夹角即 $\angle AMC=\angle OMB$.

在 $\triangle OMB$ 中,$|\overrightarrow{OM}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{19}$,$|\overrightarrow{BM}|=\dfrac{7}{2}$,$|\overrightarrow{OB}|=3$. $\therefore\ \cos\angle OMB==\dfrac{16\sqrt{19}}{133}$,

即 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角的余弦值是 $\dfrac{16\sqrt{19}}{133}$.

解例回顾 将向量问题转化为典型的解三角形问题来处理,即已知三边求角,或已知两边及夹角求第三边,可利用余弦定理求解.

N 能力提升
ENG LI TI SHENG

1. 三角形三边的比为 $2:3:4$,则三角形的形状为 ( )

A. 锐角三角形 B. 直角三角形

C. 钝角三角形 D. 都有可能

2. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a^2=b^2+c^2+bc$,则 $\angle A=$ ( )

A. 30° B. 60°

C. 120° D. 150°

3. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=60^\circ$,$b=1$,$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$,则 $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 的值等于 ( )

A. $\dfrac{2}{3}\sqrt{39}$ B. $\dfrac{26}{3}\sqrt{3}$

C. $\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$,则 $\triangle ABC$ 的最大内角是__________.

5. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $BC=7$,$AC=8$,$AB=9$,则 AB 边的中线长是__________.

6. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a^2=b^2+c^2+bc$,$2b=3c$,$a=\sqrt{19}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

7. 在 $\triangle ABC$ 中,$B=30^\circ$,$b=50\sqrt{3}$,$c=150$,求 a.

第四课时 余弦定理(2)

问题情景设置

题目 已知三角形的一个角为 60°，面积为 $10\sqrt{3}\text{cm}^2$，周长为 20 cm，求此三角形的各边长.

思路与技巧 此题所给的题设条件除了一个角外，面积、周长都不是构成三角形的基本元素，但是都与三角形的边长有关系，故可以设出边长，利用所给条件建立方程，这样由于边长为三个未知数，所以需寻求三个方程，其一可利用余弦定理由三边表示已知 60° 角的余弦，其二可用面积公式 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ 表示面积，其三是周长条件应用.

解答 设三角形的三边长分别为 a、b、c，$B=60^\circ$，则依题意得

$$\begin{cases}\cos 60^\circ=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\\ \dfrac{1}{2}\cdot ac\sin 60^\circ=10\sqrt{3},\\ a+b+c=20.\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}a+b+c=20, & ①\\ b^2=a^2+c^2-ac, & ②\\ ac=40. & ③\end{cases}$$

由①式得

$$b^2=[20-(a+c)]^2=400+a^2+c^2+2ac-40(a+c).\qquad ④$$

将②代入④得 $400+3ac-40(a+c)=0$，

再将③代入得 $a+c=13$.

由 $\begin{cases}a+c=13,\\ ac=40,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=5,\\ c_1=8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_2=8,\\ c_2=5,\end{cases}$

所以，此三角形三边长分别为 5 cm，7 cm，8 cm.

解题回顾 (1) 在方程建立的过程中，应注意由余弦定理可以建立方程，也要注意含有正弦形式的面积公式的应用.

(2) 由条件得到的是一个三元二次方程组，要注意要求学生体会其求解的方法和思路，以提高自己的解方程及运算能力.

知识网络梳理

1. 熟练掌握余弦定理的变形形式.

2. 三角形中一般有五个量：三边、两角(即三角)，解三角形即"知三求二"，灵活运用正、余弦定理可解决三角形中的有关问题. 在应用时，根据题目的条件，余弦定理与正弦定理的侧重点有所不同.

3. 利用余弦定理，确定三角形解的个数. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 a，b 和 A，由余弦定理有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，变形得 $c^2-(2bc\cos A)\cdot c+b^2-a^2=0$. (*)

(1) 若(*)中 $\Delta>0$ 时，有两不相等实根 c_1，c_2

①若 $c_1>0$，$c_2>0$，则此三角形有两解；

②若 $c_1>0$，$c_2\leqslant 0$，则此三角形有一解；

③若 $c_1\leqslant 0$，$c_2\leqslant 0$，则此三角形无解.

(2) 若(*)中 $\Delta=0$ 时，有两个相等实根 $c_1=c_2$

①$c_1=c_2>0$，则此三角形有一解；

②$c_1=c_2\leqslant 0$，则此三角形无解.

(3) 若(*)中 $\Delta<0$ 时，无实数根，则此三角形无解.

名师点拨

例1 在 $\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别是 A、B、C 的对边，试证明：$a=b\cos C+c\cos B$.

思路分析 要证的等式中，既含有边又含有两角的余弦，因此，可考虑应用余弦定理将它转化成只含有边的等式，然后从右边往左边化简可使等式获证.

解 由余弦定理，知 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. 将它们代入要证等式的右边可得：

$$\text{右边}=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2}{2a}=a=\text{左边}.$$

解题回顾 (1) 本例所证的结论，就是有关参考书中所说的射影定理，当我们已知一三角形的两边及这两边的对角时，应用它求第三边十分方便.

(2) 本例应用正弦定理论证也十分方便.

例2 $\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{2}$，$b=m$，$\angle A=45^\circ$，若此三角形有两解，试求实数 m 的范围.

思路分析　利用余弦定理，可以判定三角形中，已知两边及一边对角的三角形解的个数，可利用$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$求得m的范围.

解　由余弦定理，有$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即

$2=m^2+c^2-2mc\cdot\cos45°$，即

$c^2-\sqrt{2}mc+m^2-2=0$，　　(*)

由于$\triangle ABC$有两解，从而(*)中有两个不相等的实根，且为正根.

$$\therefore\begin{cases}\Delta=2m^2-4(m^2-2)>0,\\ c_1+c_2=\sqrt{2}m>0,\\ c_1\cdot c_2=m^2-2>0.\end{cases}$$

解得：$\sqrt{2}<m<2$.

解题回顾　已知两边及一边对角，判定三角形解的个数可利用正、余弦定理进行. 本题采用了余弦定理，其实也可以利用正弦定理进行求解. 解法如下：由$b\sin A<a<b$有，$m\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sqrt{2}<m$，解得$\sqrt{2}<m<2$.

水平自测
HUI PING ZI CE

1. 在$\triangle ABC$中，若$a^2=2ab\cos C$，$\triangle ABC$是　　(　　)

A. 等腰三角形

B. 等腰直角三角形

C. 直角三角形

D. 等腰或直角三角形

2. 在$\triangle ABC$中，$a=2$，$c=1$，则角C的取值范围是　　(　　)

A. $0<C\leqslant\dfrac{\pi}{6}$　　B. $0<C<\dfrac{\pi}{2}$

C. $\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{3}$

3. 在$\triangle ABC$中，如果$(a+b+c)\cdot(b+c-a)=3bc$，则$\angle A$等于　　(　　)

A. 30°　　B. 60°

C. 120°　　D. 150°

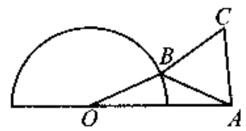
4. $\triangle ABC$中，$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，则$\angle ABC=$______(结果用反三角函数表示).

5. 钝角三角形三边长为a，$a+1$，$a+2$，其最大角不超过120°，则a的取值范围是______.

6. 在$\triangle ABC$中，若$\angle B=60°$，a、b、c满足$b^2=ac$，那么$\triangle ABC$是______三角形.

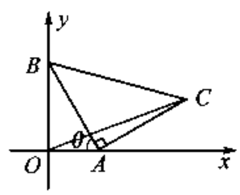
7. 在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{6}$，$b=2\sqrt{2}$，$\angle B=60°$，试用余弦定理判定三角形解的个数.

8. 半圆O的直径为2，A为直径延长线上的一点. $OA=2$，B为半圆周上的动点，以AB为边，向外作等边$\triangle ABC$，问B点在什么位置时，四边形$OACB$的面积最大？



高考展望
AO KAO ZHAN WANG

[illegible]　(2006年杭州测试题)腰长为a的等腰直角三角形ABC中，$\angle A=90°$，当A，B两点分别在x，y轴的正半轴上移动时，求$|OC|$的最大值.



思路分析　在求有关函数式的最值时，应尽量将函数式表示为某个独立变量的函数表达式，如图，设$\angle OAB=\theta$，利用余弦定理，将$|OC|$表示为θ的三角函数式，进行求解.

解　设$\angle OAB=\theta$，在$\triangle COA$中，$OA=a\cos\theta$，$AC=a$，$\angle OAC=\dfrac{\pi}{2}+\theta$. 由余弦定理，有

$$|OC|^2=a^2+a^2\cos^2\theta-2a\cdot a\cos\theta\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$=\frac{3}{2}a^2+a^2\left(\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)$$
$$=\frac{3}{2}a^2+\frac{\sqrt{5}}{2}a^2\cdot\sin(2\theta+\varphi)\leqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}a^2.$$