

21世纪高等院校规划教材

大学文科数学

李有文 陆平 编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

013/419

2007

21 世纪高等院校规划教材

大学文科数学

李有文 陆平 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是为高等院校文科专业编写的数学教材。

全书内容分为三部分,其中第一、第二部分为必学内容,第三部分为课外阅读内容。第一部分微积分学包括函数、极限、连续、导数和微分、不定积分、定积分和微分方程;第二部分包括线性代数、概率统计和数学建模3个内容;第三部分数学概览主要包括现代数学杂谈、数学与社会科学和数学常识。

本书根据文科数学在文科专业中的地位,在内容选材、组织、结构方面充分考虑到文科学生的实际情况,不仅向读者介绍文科学生需要了解的数学基础知识,通过数学概览也介绍了数学基本常识、数学思想、数学应用方面的知识,以便达到开拓视野、改善文科学生知识结构和思维方式的目的。本书在叙述上注重深入浅出,尽量不给学生造成太大的负担。

本书可以作为高等院校文科专业本科或专科数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/李有文,陆平编著. —北京:国防工业出版社,2007.7
21世纪高等院校规划教材
ISBN 978-7-118-05181-0

I. 大... II. ①李... ②陆... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 071219 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 11 字数 245 千字

2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 23.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前言

目前,我国绝大多数高校的文科类专业开设了“大学文科数学”或“文科高等数学”课程.对于在文科专业开设数学课程的必要性人们已经形成了共识,但由于我国开设文科数学的历史还不长,对文科数学在文科专业教学计划中的定位、文科数学的教学目的、教学要求、教学内容有不同的看法,导致目前文科数学的教学内容上有很大的差异.教材是为教学服务的,教材必须能够满足教学的需要,本教材的内容及体系基于以下考虑.

1. 文科专业开设数学课程的目的和意义

文科专业开设数学课程的意义可以体现为以下几方面:

(1) 数学在现代社会的地位、作用和影响空前显著,任何一门学科包括社会科学都必须了解一些基本的数学知识.当代数学的一个重要特征和发展趋势,是数学内部各分支学科的高度发展和相互之间在内容、概念及方法上的不断交叉和融合;数学与其它学科以及整个外部世界的联系、交叉、渗透与融合也不断得到加强,数学不仅广泛应用于自然科学,而且渗透于很多社会科学,以及人们的日常生活.作为将来的社会科学工作者,要研究有关社会科学的规律,必须了解社会,必须了解对社会有重要影响的数学.

(2) 在某些社会科学的研究中数学经常作为一种可以利用的工具.随着应用数学的发展,一些传统的人们认为与数学无关的社会科学,通过数学建模也可以转化为一个数学问题,利用数学来研究其规律性.如利用数学中的多种综合评判方法可以完成对各种社会问题的评估或评价,利用运筹学知识可以解决相当数量的管理决策问题.作为文科学生,这些工具尽管不能完全掌握,但作为一种了解还是十分必要的.

(3) 数学不仅是一门科学,也是一种文化,即数学文化;数学不仅是一些知识,也是一种素质.文科学生通过学习数学不仅可以了解数学文化,也可以提高数学素质,提高自己的理性思维能力,同时培养健全的审美情操,有助于对本学科的深刻理解和体会.

2. 文科数学的定位及应当包含的主要内容

文科数学的定位应当是:传授一定的数学知识,介绍简单的数学文化知识和数学思想,培养运用所学数学知识解决简单实际问题的能力.

文科数学的教学内容应当包括以下内容:

(1) 体现现代数学连续性、离散性、随机性三种思维方法和内容的微积分、线性代数和概率统计.这几部分内容是文科数学的基本知识,无论具体内容如何调整、其它内容如何变化,这几部分内容不能缺少.但与理工科相应数学课程比起来,难度和深度要有明显降低,较难的概念要适当弱化,进行训练的题目灵活性要减弱.

(2) 作为数学的应用,应当介绍简单的数学建模知识,从中体会数学的应用方法.数学建模涉及的数学知识应当尽量不超过初等数学和文科数学中所包含的数学知识,数学模型的例子应当尽量选用社会科学的数学模型以提高学生的兴趣.

(3) 适当介绍一些数学概观、数学文化和数学思想方面的知识,介绍数学与社会科学关系的部分知识,让学生理解数学中包含社会科学、社会科学中包含数学. 这些内容要包含在教材中,但教师可以根据学时决定是否列入讲授内容或作为自学内容. 在对数学常识的内容取舍方面,注重常识性、新颖性,尽量考虑文科学生的兴趣. 因为,对数学家津津乐道的较深的数学史知识文科学生并不一定感兴趣.

需要注意的是,文科数学毕竟是一门数学课程,它不是数学史,因此必须包含必要的数学知识. 如果太关注数学思想而忽视数学基础知识,将必要的数学知识丢掉,将失去文科数学的本来面目.

关于文科数学学时,我们认为以 64 学时~72 学时为宜.

关于文科数学的考核与成绩评定问题,属于需要讨论的另外问题. 我们认为,考核方式应灵活,要采取与理工专业不同的形式,要加大平时成绩或读书报告的比例. 如果要采用闭卷的形式,一定要尽量减少灵活性强的题目,学生只要能用基本概念解决简单问题就应当及格,切不可用理工思维方式命题和考核. 文科数学的学习不应当成为学生的负担.

本书由李有文担任主编,负责制定编写提纲、最后统稿,并编写了第 7 章~第 10 章;陆平任副主编,并编写了第 1 章~第 4 章;毕湧编写了第 6 章及全部习题答案;王鹏编写了第 5 章和附录.

在本书编写过程中,得到国防工业出版社、中北大学教务处、理学院有关领导的大力支持,数学系教师柳林、薛震等也给予了大力协助,在此一并表示衷心的感谢.

编者

2007 年 5 月

目 录

绪论	1
----	---

第一部分 微积分学

第1章 函数 极限 连续	6
1.1 函数	6
1.2 数列极限与函数极限	7
1.2.1 数列极限	7
1.2.2 函数的极限	9
1.3 无穷小量与无穷大量	10
1.3.1 无穷小量	10
1.3.2 无穷大量	12
1.4 极限的四则运算	12
1.5 两个重要极限	13
1.6 函数的连续性	14
1.6.1 函数的连续性	14
1.6.2 函数的间断点	16
* 1.7 极限的精确定义,再论极限	16
习题一	17
第2章 导数、微分及其应用	20
2.1 问题的提出	20
2.2 导数的概念	22
2.2.1 导数定义	22
2.2.2 用导数定义计算基本初等函数的导数	24
2.2.3 导数的几何意义	25
2.2.4 函数的可导性与连续性的关系	25
2.3 导数的基本公式与运算法则	26
2.3.1 导数基本公式	26
2.3.2 导数的四则运算法则	27
2.3.3 复合函数的求导法则	28

2.3.4	隐函数求导	29
2.4	导数的应用	30
2.4.1	微分中值定理	30
2.4.2	洛必达法则——求极限的高等方法	30
2.4.3	函数的增减性	33
2.4.4	函数的最大值与最小值及其在经济问题中的应用	34
2.5	微分	38
2.5.1	微分的概念	38
2.5.2	微分的几何意义	39
2.5.3	微分在近似计算中的应用	39
习题二		40
第3章	不定积分与定积分	42
3.1	原函数与不定积分	42
3.1.1	原函数的概念	42
3.1.2	不定积分	43
3.1.3	不定积分的几何意义	43
3.1.4	不定积分的性质	43
3.1.5	基本积分公式	44
3.1.6	直接积分法举例	45
3.2	换元积分法与分部积分法	46
3.2.1	第一换元积分法	46
3.2.2	分部积分法	47
3.3	定积分及其几何应用	47
3.3.1	定积分的概念	48
3.3.2	定积分的基本性质	50
3.3.3	微积分基本定理	51
3.3.4	定积分几何应用	52
3.3.5	广义积分简介	54
习题三		55
*第4章	微分方程简介	57
4.1	常微分方程的基本概念	57
4.2	可分离变量的常微分方程	58
4.3	一阶线性微分方程	59
4.4	二阶常系数齐次线性微分方程	61
习题四		62

第二部分 线性代数 概率统计 数学建模

第5章	线性代数	64
5.1	行列式	64

5.1.1	二阶、三阶行列式	64
5.1.2	n 阶行列式	67
5.1.3	行列式的性质	71
5.1.4	行列式的计算	73
5.2	矩 阵	74
5.2.1	矩阵的概念	74
5.2.2	矩阵的运算	76
5.2.3	逆阵	79
5.2.4	矩阵的初等变换	80
5.3	线性方程组	82
5.3.1	线性方程组及其解法	82
5.3.2	非齐次线性方程组有解的判定	85
5.3.3	齐次线性方程组的解法	87
	习题五	88
第6章	概率统计初步	91
6.1	事件与概率	91
6.1.1	随机事件	91
6.1.2	事件的概率	94
6.2	概率的运算	95
6.2.1	概率的加法公式	95
6.2.2	概率的乘法公式	96
*6.2.3	全概率与贝叶斯公式	97
6.3	随机变量及其分布	98
6.3.1	随机变量的概念	98
6.3.2	随机变量的类型	99
6.4	随机变量的数字特征	103
6.4.1	实例	103
6.4.2	数学期望	103
6.4.3	方差	104
6.4.4	均方差	105
6.4.5	二项分布的数学期望与方差	105
6.4.6	正态分布的数学期望和方差	105
*6.5	数理统计思想简介	105
6.5.1	数据收集问题	106
6.5.2	假设检验问题	107
6.5.3	药效问题	107
	习题六	108
第7章	数学建模简介	111
7.1	数学建模与大学生数学建模竞赛	111

7.1.1	什么是数学模型	111
7.1.2	什么是数学建模	111
7.1.3	数学建模兴起的背景	113
7.1.4	大学生数学建模竞赛	114
7.2	简单数学模型赏析	114
7.2.1	人口问题	114
7.2.2	最优价格问题	116
7.2.3	耐用消费品的选购问题	116
7.3	线性规划模型举例	118

* 第三部分 数学概览(选读)

第8章	现代数学杂谈	123
8.1	现代数学发展的特点	123
8.2	数学的公理化及其意义	126
8.2.1	数学公理化的背景	126
8.2.2	数学公理化的条件	127
8.2.3	数学公理化的意义	127
8.3	数学与其它学科结缘	128
第9章	数学与社会科学	131
9.1	数学与哲学	131
9.1.1	模糊数学中的哲学	132
9.1.2	数列极限概念中的哲学	133
9.1.3	集合与元素	134
9.2	数学中的美	134
9.2.1	数学中的抽象美	135
9.2.2	数学的和谐美	137
9.2.3	数学的奇异美	138
9.3	数学中的人文思想	140
9.3.1	群	140
9.3.2	矩阵的特征值与特征向量	141
9.3.3	关系	142
第10章	数学常识	143
10.1	数学分支简介	143
10.1.1	数论	143
10.1.2	拓扑学	144
10.1.3	计算数学与数学软件	145
10.1.4	复变函数论	146
10.1.5	模糊数学	147
10.1.6	运筹学	148

10.2	各类数学奖介绍	149
10.2.1	国际数学奖	149
10.2.2	国内数学奖	150
10.3	三次数学危机简介	151
10.4	数学家轶事	153
10.4.1	为爱情献身的伟大数学家——伽罗瓦(1811—1832)	153
10.4.2	淡泊名利的当代数学家隐士——格里戈里·佩雷尔曼	154
10.4.3	当代数学天才——神童陶哲轩	155
10.4.4	密码专家——女数学家王小云	156
10.4.5	中国金融数学的奠基人——彭实戈	157
附录 A	习题答案与提示	158
附录 B	标准正态分布数值表	164
参考文献		165

绪 论

这本《大学文科数学》是我们根据多年的教学经验,为文科专业的学生编写的.在多年的教学过程中,每次新开课,都有学生问:我们所学的专业与数学无关,为什么还要学习数学,学习数学究竟有没有用.为了解答这些问题,也为了帮助同学们学好本课程,有必要就有关本课程进行一些说明.

1. 文科专业为什么要学习数学

当今世界科学技术的快速发展,深刻影响到整个社会生活的方方面面,新的学科特别是交叉学科、边缘学科不断涌现,新思想、新方法对我们的传统观念形成很大的冲击.作为现代社会的一员,无论是从事自然科学研究、社会科学研究或从事其它工作,不得不面对、不得不适应这些变化,同时社会对人才提出了更高的要求.任何一个专业不仅要了解本专业的理论知识,还需要了解相关专业的基本知识;不仅熟练掌握最新的专业知识,还要求具有扎实的基础,具备较强的学习能力和可持续发展能力.为了具备这些能力,数学基础知识、计算机基础知识、一定的外语能力、扎实的专业基础已经成为现代社会各个学科人员必须具备的基本素质,文科专业也不例外.

在大学文科专业中开设文科数学具有重要意义,概括起来主要有以下几条:

第一,数学的应用范围日趋广泛,已经从传统的自然科学领域扩张到许多社会科学领域.一些社会科学也在借鉴一些数学方法来进行研究,如心理学、生物学、经济学、管理学等学科已经引入了大量的数学.文科学生学习数学,可以处理一些所学学科中的数量化和逻辑化方面的简单问题.

第二,在信息社会,随着科学技术的快速发展,新技术、新名词不断涌现,而数学是自然科学的语言,不了解一些基础的数学知识,难以深刻领会这些新名词的含义.

第三,数学对塑造人的文化素质及对形成正确的宇宙观具有特殊作用,国内外学者已普遍认识到数学是人类文化的重要组成部分.它有助于提高文科学生的量化能力,有助于培养文科学生逻辑清晰、思考缜密、镇定坚毅、追求真理、崇尚善美等科学素质.数学不仅是一门科学,也是一种文化;不仅是一门知识,还是一种素质.

第四,有助于文科专业学生的全面发展,缩短与理科专业学生的距离,促进文理科专业的交流,提高文科学生的综合素质,更好地适应飞速发展的社会.从前,文理科有明显的界限,在交流中,一旦涉及到理科特别是数学的东西,文科生就感到“那是你们的东西,我们理解不了,也不感兴趣”,久而久之,形成一种隔阂,影响理科思想、理科精神、理科方法在文科中的应用.

2. 学习文科数学需要注意的问题

由于对文科数学及其在文科专业中的作用了解不够、部分专业同学初等数学基础较差以及数学本身具有一定的难度,常常影响着文科数学的教学效果.因此在学习本课程时

需要注意以下几点：

首先，要了解开设本课程的目的，充分认识本课程的重要性，提高对本课程的学习兴趣，下功夫掌握本课程的基本理论、基本思想、基本方法，提高自己的数学素质。

对部分文科专业的学生来说，大学文科数学的理论是有一定难度的，特别是理论性比较强的内容，但不能因此而放弃文科数学的学习，而要尽量去理解、去体会，实在搞不清楚，也不用着急。

其次，要注意学习和了解数学思维方式，在学习数学知识的同时体会其中所包含的思想，并将这种思想合理地运用到所学专业。

再次，要因人制宜，根据自己的基础和兴趣，选择学习更多的大学数学知识，阅读有关数学史、数学文化方面的书籍，扩大自己的视野。

我们相信，只要对文科数学给予正确的认识，并通过适当努力，大家一定会有很大的收获。

第一部分 微 积 分 学

没有数学语言,宇宙似乎是不可能被描述的……

大自然这本书是用数学语言写成的……天、地、日、月、星辰都是按照数学公式运行的。

——伽利略

数学最重要之处就在于它用简洁的语言,解释了自然界纷繁复杂的现象,以及发现并揭示了大自然及社会经济的运行规律.探索宇宙的奥秘,揭示宇宙中的规律,解读客观事物所固有的和谐秩序或规律……数学之美,美在它的简单和谐,美在它的奇异深邃、奥妙无穷……数学是非常重要的——一门科学.从实用角度来讲,数学的方法和应用遍及到物理、生物、化学、工程技术各领域,甚至与经济等社会科学各领域都有着密切的关系,数学为这些众多学科的发展提供了必不可少的工具.

——邱成桐

1. 微积分回顾

17 世纪牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)创立了微积分,这是人类历史上的一个伟大创造,至今仍然闪烁着灿烂的光辉.今天微积分在自然科学、技术科学、生命科学、社会科学、管理科学等各个领域内的应用越来越广泛.

微积分的建立,早期是为了处理 17 世纪中四类主要的自然科学问题.

第一类问题是求运动物体的瞬时速度和加速度.或者反过来,已知运动物体的瞬时速度和加速度,求在给定的时间内物体移动的距离.这类问题的研究与行星运动、航海以及机械运动有着密切的联系,它们正是从这些具体问题抽象出来的.

第二类问题是求曲线的切线.看起来是个纯几何问题,但是却有巨大的应用价值:一是设计制作望远镜时需要研究光线通过曲面的折射情况,这就与切线相关,而望远镜又与天文学、航海学有着不解之缘;另外沿曲线运动的物体任何时刻其运动的方向就是该曲线的切线方向,因此对切线的研究又和机械运动联系起来了.

第三类问题是求函数的最大值和最小值.例如求炮弹的最大射程问题,事实上炮弹的射程与炮筒的倾斜角即发射角有关.17 世纪初伽利略(Galilio)就断言在真空中当倾斜角为 45° 时,能获得最大射程.又如在天文学中要研究行星离开太阳的最远距离和最近距离.观赏图画及艺术品时的最大视角和位置.此外还有许多与日常生活有关的问题需要寻求函数的最大值和最小值.

第四类问题是求平面曲线所围成的图形的面积,曲面所围成的物体的体积,曲线的弧长,物体的重心等.

微积分的创立和发展来自于科学技术的发展和需要,直到现在仍然是自然科学和工程技术领域的重要工具.微分的概念形成于几何中的切线、函数极值以及运动速度的处理,积分的概念来源于图形的面积、立体的体积、曲线的长度等的计算.牛顿、莱布尼茨在总结前人丰富研究成果的基础上分别独立地创立了具有普遍意义的微积分理论.微积分创立之后迅速在天文学、物理学、力学以及工程技术中得到了广泛应用.随着微积分应用的深入,出现了许多非常重要的数学分支,如常微分方程、偏微分方程、复变函数论、变分法等.但在刚创立微积分时,其理论还不完备,引起了许多争议,直到 19 世纪,才由柯西(Cauchy)、维尔斯特拉斯(Werestrass)等数学家,给出了严格的极限理论,最终形成了如今成熟的微积分理论体系.

2. 事物运动规律的描述与对微积分的印象

世界是物质的,物质是运动的,运动是有规律的,人类认识世界、改造世界需要掌握客观世界的各种规律性.自然科学的规律往往需要用数学来描述,其中数学中“函数”概念是描述事物规律的一种形式.例如 $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ 可以表示以初速度 v_0 上抛一物体后该物体不受阻力时其高度与时间的关系,反映了上抛物体的运动规律.如果某事物的运动规律能够用某个具体函数来表示,说明人们对该事物的认识已经达到比较深的程度,但这并不意味着人们已经掌握其全部信息,人们经常还要关心事物(这里指函数)在哪些阶段(或时间)的变化比较平稳,哪些阶段变化比较剧烈.如对于上抛运动我们还关心该物体在什么时刻达到最高点(速度为 0),运动过程中的速度具有什么特点,如果砸到某个物体上是否会被砸坏等.我们用“导数”这个概念来描述事物变化快慢或剧烈的程度.事物发展过程中

引起事物变化的量(函数的自变量)发生微小变化时,该事物(因变量)发生多大的变化也是人们经常关心的问题.例如我们都知道很多物质有“热胀冷缩”的特性,因此在修铁路时,每隔一段距离要留一段空隙,究竟留多大空隙就可以克服气温变化对铁轨的影响,这样的问题数学上用“微分”这个概念来描述.

再比如说看动画片,动画片中一幅幅的画是不会动的,之所以画动起来了是因为我们以每秒钟几十幅图片的超高速度在看它.动画由许许多多图片组成,每幅图片上画着一点点逐渐变化的动作,快速播放时看上去那些画就自然动起来.这与微积分有关系吗?有微小的变化就是所谓的“微分”;累积一系列微小的变化,使画面活动起来就是所谓的“积分”.但是如果各幅图片间动作变化过大,动画就不自然了.为使动作自然,就要尽量缩小各幅图片间动作的变化,这正是微积分的奥秘:某一微小变化——微分;累积一系列微小变化——积分.由上可知,微积分与我们的生活息息相关.

微积分是以函数为研究对象的,借助于函数用极限的方法,给出一系列运算,从而解决一系列的科学技术问题.微积分研究的性质主要包括“连续”、“可导”或“可微”、“可积”.微积分就是以极限为工具研究函数的连续性、可微性、可积性,进而挖掘函数所包含的全部信息.

第1章 函数 极限 连续

本章将从微积分的研究对象——函数出发,详细介绍微积分的研究工具——极限基本理论,使我们对微积分理论能有一个初步的了解.

1.1 函 数

在观察某种自然现象的变化过程中,往往遇到各种不同的量,这些量可以分为两类:一类在整个变化过程中固定不变,称为常量;另一类在变化过程中会随着时间的、空间变化,这种量叫做变量.

例如,一个旅游团队乘坐在出行的汽车中,乘客的人数固定不变,因而是一个常量,而汽车油箱里的汽油在不断减少,这就是一个变量.从辩证法的观点看来,常量与变量是相对的,微积分所研究的函数是变量与变量之间的一种关系.

为叙述方便,我们引入几个数学符号.以“ $\forall$ ”表示“对于任意”,以“ $\exists$ ”表示“存在”,以“ $\in$ ”表示“属于”,以“ $\subset$ ”表示“包含于”.

定义 1.1.1 设 D 表示一个给定的数集, $\mathbf{R}$ 表示实数集,若存在 D 到 $\mathbf{R}$ 之间的一种对应关系 f , 使 $\forall x \in D$, 存在唯一的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的一个函数, 记作 $y = f(x)$. 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数 f 的定义域. 集合 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 f 的值域, 可记为 $f(D)$.

例 1.1.1 当圆的半径 r 变化时, 圆的面积 S 也在随之而变, 这两个变量的关系是 $S = \pi r^2 (r > 0)$, 其中 π 是圆周率, 是一个常量.

例 1.1.2 某市出租车起步价 10 元, 里程 4 千米, 超过 4 千米每千米 1.2 元, 试给出乘车里程与车费的函数关系.

解 以 x 表示乘车里程, y 表示车费, 则有

$$y = \begin{cases} 10, & 0 \leq x \leq 4 \\ 10 + 1.2x, & x > 4 \end{cases}$$

注 1 函数的本质是对应关系, 构成函数的两个基本要素是定义域与对应关系. 只要给定了两个变量之间的一种对应关系, 同时给定了变量的变化范围, 就给出了一个函数, 而不管给定方式具有怎样的表现形式.

注 2 函数的表现形式是多种多样的, 其中最常见的是其解析表达式, 即通过数学公式来表示. 有时函数的定义域不单独注明, 此时认为其定义域是使所给表达式有意义的数的集合, 而不能认为该函数没有定义域.

注 3 当两个函数的定义域与对应关系都相同时, 认为是同一个函数, 否则不能认为两者相同.

例 1.1.3 求函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域.

解 为使函数有意义,应有

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-1} \neq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

解得 $x < -1$ 或 $x > 1$, 即定义域为

$$\{x \mid (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\}$$

其中 ∞ 读做“无穷大”,表示比任何有限数都大.

定义 1.1.2(复合函数) 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 S , 值域为 W , 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义, 若 $g(D) \subset S$, 则对于任意 $x \in D$, 唯一确定一个 $u \in S$, 从而存在 $y \in W$ 与 x 对应, 于是确定了 D 到 W 的一种对应关系, 我们把这种对应关系称作定义在 D 上的复合函数, 记做 $y = f(g(x))$, x 称为自变量, y 称为因变量, u 称为中间变量.

例 1.1.4 已知 $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^x - 1$, 求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$.

解 $f(g(x)) = \sin(e^x - 1)$, $g(f(x)) = e^{\sin x} - 1$.

注 4 并不是任意两个函数都可以复合的, 例如 $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sin x$, 不能进行 $f(g(x))$ 复合, 因为 $g(x)$ 的值域没有包含在 $f(x)$ 的定义域之内.

定义 1.1.3(反函数) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W , 若对于任意 $y \in W$, 存在唯一的 $x \in D$, 使得 $y = f(x)$ 成立, 按照这种方式可以确定 W 到 D 的一种对应关系, 我们称这种对应关系为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记做 $x = f^{-1}(y)$.

反函数的定义域为原来函数的值域, 反函数的值域为原来函数的定义域. 习惯上, 我们将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

我们称在中学学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次复合和有限次四则运算以后, 并且能用一个式子表示的函数称为初等函数.

1.2 数列极限与函数极限

1.2.1 数列极限

极限是微积分的理论基础和主要工具, 极限可以分为数列极限和函数极限两类. 我们首先来看数列极限.

我们把无穷多个数按照一定顺序排列起来得到的一个数组称为一个数列, 通常用 $\{x_n\}$ 来表示, 其中 x_n 称为其通项. 例如: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 就是一个数列, 其通项为 $x_n = \frac{1}{n}$. 对于给定数列, 由于它有无穷多项, 因此关心其项数充分大时数列的变化趋势. 下面看几个例子.

例 1.2.1 观察下列数列的变化趋势.

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$