成人高等教育公共基础课系列教材

成人教育高等数学导学

下 册

线性代数与概率初步

■ 主　编：赖国治

■ 副主编：匡奕群　石　哲

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

成人高等教育公共基础课系列教材

成人教育高等数学导学

下　册

线性代数与概率初步

■ 主　编：赖国治

■ 副主编：匡奕群　石　哲

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率初步：下册/赖国治主编. —武汉：武汉大学出版社，2007.3
(成人高等教育公共基础课系列教材)
ISBN 978-7-307-05432-5

Ⅰ.线… Ⅱ.赖… Ⅲ.①线性代数—成人教育：高等教育—教材②概率论—成人教育：高等教育—教材 Ⅳ.O151.2 O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 020583 号

责任编辑:李汉保 责任校对:王 建 版式设计:杜 枚

出版发行：**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)
印刷:武汉大学出版社印刷总厂
开本：720×1000 1/16 印张：8.875 字数:164 千字 插页:1
版次:2007 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-05432-5/O·351 定价:14.00 元

成人高等教育公共基础课系列教材编委会

内容简介

本书针对成人教育学生的学习特点，在课程内容体系的设计上，坚持以“适度、够用”与循序渐进为原则，引导学生在深入消化初等数学主干知识的基础上，较顺利地进入高等数学阶段的学习。本书删略了一些纯理论性的、而且难度较大的内容，让学生从专业的需要出发学习一些实用的数学知识。为帮助学生解决学习高等数学的困难，我们尝试以初等数学主干知识作铺垫，并采用了成人教育的学生易于接受的传导方式，简明、系统地介绍了行列式、矩阵、线性方程组与解法，随机事件与概率、随机变量及其数字特征等基本知识。在每章的开头就告诉读者这一章的学习目标和学习内容，分三个层次对该章内容进行了简要的说明，交代必须了解、理解和掌握的知识，从而便于成人教育的学生在学习过程中有重点、分层次地进行学习。在每章的结尾还有“本章小结”，为成人教育的学生复习之用。

本书注重所学内容的应用，配置了相当数量的例题，并介绍了解题方法。

本书可以作为成人高等教育数学课程的教材，也可以作为专科性质的专修班、高职高专相关专业的教材。

前　言

《成人教育高等数学导学》是江西省教育厅教改课题“成人高等教育公共基础课课程改革的研究”的一项研究成果，也是成人高等教育公共基础课系列教材之一。

本书是作者根据成人高等教育高等数学课程的教学基本要求，在多年积累的成人高等教育数学教学经验的基础上，经过提炼、加工和充实而编成的，可供广大成人高等教育的学生及自学者使用。

近年来，成人高等教育《高等数学》的教学时数在压缩，教学要求也有所调整，因此在编写本书时，精简了部分内容，对有些概念的叙述以及少数定理的证明作了一些改变，特别是对于成人教育的学生来说要求过高和难度较大的内容，在书中都进行了合理的删减，这些做法，都是为适应成人高等教育的培养目标与业务要求而采取的大胆尝试。

初等数学相关预备知识及微积分由匡奕群副教授编写，线性代数与概率初步由赖国治副教授编写。《微积分》、《线性代数与概率初步》两本书由江西理工大学继续教育学院赖国治副教授主编，并负责上述两本书的审定、修改、总纂和定稿工作，石哲副教授任副主编。

本书在编辑和出版过程中，江西理工大学继续教育学院院长胡明山副教授对本书编写工作提出了宝贵的建议和重要的修改意见，武汉大学出版社为本教材的出版给予了大力支持与协助，本课题组成员谢忠前教授等，都为本书的顺利出版付出了辛勤的劳动，在此，谨向大家表示衷心的感谢！

在本书的编写过程中，我们参阅并引用了国内外学者的有关著作和论述，并从中受到了启迪，特向他们表示诚挚的敬意！

由于编者的水平所限，书中难免有许多不足或错误之处，恳请读者批评指正。

作　者

2006 年 10 月 10 日

目　录

第一章　行列式 …… (1)
§1.1　行列式的概念 …… (1)
§1.2　行列式的性质 …… (6)
§1.3　行列式的计算 …… (10)
§1.4　克莱姆(Cramer)法则 …… (15)
本章小结 …… (19)
习题1 …… (19)

第二章　矩阵 …… (23)
§2.1　矩阵的概念 …… (23)
§2.2　矩阵的运算 …… (26)
§2.3　逆矩阵 …… (36)
§2.4　矩阵的秩 …… (40)
本章小结 …… (44)
习题2 …… (45)

第三章　线性方程组 …… (47)
§3.1　向量 …… (47)
§3.2　线性方程组有解的条件 …… (55)
§3.3　线性方程组的求解 …… (58)
§3.4　线性方程组解的结构 …… (62)
本章小结 …… (68)
习题3 …… (70)

第四章　随机事件及其概率 …… (74)
§4.1　预备知识 …… (74)
§4.2　随机事件 …… (78)
§4.3　随机事件的概率 …… (83)

§4.4 贝努里(Bernoulli)概型 …… (92)
本章小结 …… (94)
习题 4 …… (95)

第五章 随机变量及其数字特征 …… (97)
§5.1 随机变量 …… (97)
§5.2 随机变量的分布函数 …… (101)
§5.3 几种常见随机变量的分布 …… (104)
§5.4 随机变量的数字特征 …… (111)
本章小结 …… (116)
习题 5 …… (116)

附录 …… (118)
附表 …… (125)
习题参考答案 …… (128)
参考文献 …… (133)

第一章 行 列 式

学习目标：

了解行列式的概念、克莱姆法则，理解行列式的性质，掌握低阶行列式的计算、会利用行列式求解线性方程组.

行列式是研究线性代数的重要工具，最初是为了求解线性方程组而引入行列式这个数学模型. 现在，行列式在生产经营管理活动和科学技术中都有着广泛的应用.

§1.1 行列式的概念

1.1.1 二阶、三阶行列式

在初等代数中，用加、减消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，那么方程组(1) 的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{2}$$

为了便于表示上述结果，规定记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

并称为二阶行列式.

利用二阶行列式的概念，把方程组(1) 中未知量 x_1，x_2 的系数用二阶行列式

表示

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为这个行列式的元素;横排称为行,竖排称为列;从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线,从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线.

利用二阶行列式的概念,式(2) 中的分子可以分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此,当二元一次方程组(1) 的系数组成的行列式 $D\neq 0$ 时,它的解就可以简洁地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{3}$$

例 1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=5 \\ 4x_1-x_2=2. \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)-2\times 4=-9\neq 0,$$

所以方程组有解,且

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-9,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-18.$$

由公式(3) 可得,方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-9}{-9}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-18}{-9}=2.$$

类似地,为了便于表示三元一 次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{4}$$

的解,引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式. 其中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是原三阶行列式 D 中划去元素 a_{11} 所在的第一行、第一列后剩下的元素按原来的顺序组成的二阶行列式，称它为元素 a_{11} 的余子式，记作 M_{11}，即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

类似地，记

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

并且令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \quad (i,j = 1,2,3)$$

称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

故，三阶行列式 D 也可以表示为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}.$$

而且 D 的值可以转化为二阶行列式计算而得到.

利用三阶行列式的概念，当方程组(4) 的系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组(4) 的解也可以简洁地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{5}$$

其中，D_1, D_2, D_3 分别是将方程组(4) 中的系数行列式 D 的第一、二、三列分别换成常数列得到的三阶行列式 .

例 2 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $D = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +$

$$(-1)^{1+3} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (3-6) - 2 \times (3-4) - (3-2) = -3 + 2 - 1 = -2.$$

例 3 求解三元一次方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3=-1\\ x_1+x_2+2x_3=2\\ 3x_1+2x_2+8x_3=3.\end{cases}$$

解 利用三元一次方程组的求解公式(5),先计算系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&5\\1&1&2\\3&2&8\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\times2\times\begin{vmatrix}1&2\\2&8\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times1\times\begin{vmatrix}1&2\\3&8\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times5\times\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}$$

$$=2\times(8-4)-(8-6)+5\times(2-3)=8-2-5=1\neq0$$

且

$$D_1=\begin{vmatrix}-1&1&5\\2&1&2\\3&2&8\end{vmatrix}=-9,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&-1&5\\1&2&2\\3&3&8\end{vmatrix}=7,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&1&2\\3&2&3\end{vmatrix}=2,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-9,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=7,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=2.$$

1.1.2 n 阶行列式

前面我们已经分别用二阶、三阶行列式表示二元、三元线性方程组的解,那么 n 个方程的 n 元线性方程组的解是否也可以利用行列式将它表示出来呢?为此,我们引进 n 阶行列式的概念.

定义 1 由 n^2 个数 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的一个算式,记为 D.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,简称行列式,其中 a_{ij} 称为行列式 D 的第 i 行第 j 列的元素$(i,j=1,2,\cdots,n)$.

当 $n=1$ 时,规定 $D=|a_{11}|=a_{11}$.

假设 $n-1$ 阶行列式已经定义,则 n 阶行列式

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},\tag{6}$$

其中 A_{1j} 为元素 $a_{1j}\,(j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式.

例如,当 $n=2$ 时

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

又如，当 $n=3$ 时

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+$$
$$a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例 4 写出四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\1&0&6&-2\\3&-2&2&8\\1&1&14&-9\end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式，并计算 D 的值.

解 元素 a_{23} 的余子式 M_{23} 为划去第二行和第三列后，剩下的元素按原来的顺序组成的三阶行列式，而元素 a_{23} 的代数余子式 A_{23} 为其余子式 M_{23} 乘以一个符号因子 $(-1)^{2+3}$，即

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1&-1&5\\3&-2&8\\1&1&-9\end{vmatrix},\quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}1&-1&5\\3&-2&8\\1&1&-9\end{vmatrix}.$$

由 n 阶行列式的定义可知，

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$$

$$=1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}0&6&-2\\-2&2&8\\1&14&-9\end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}1&6&-2\\3&2&8\\1&14&-9\end{vmatrix}+$$
$$(-2)\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}1&0&-2\\3&-2&8\\1&1&-9\end{vmatrix}+5\times(-1)^{1+4}\times\begin{vmatrix}1&0&6\\3&-2&2\\1&1&14\end{vmatrix}$$

$$=0+0-2\times0-5\times0=0.$$

定义 1 中的式(6) 是 n 阶行列式 D 按一行的展开式. 通过二阶、三阶行列式

的展开式可以推出,n 阶行列式的值可以按任意行或任意列展开而求得,并且按任意方式的展开式中均共有 $n!$ 个乘积项,每个乘积项中含有 n 个取自不同行、不同列的元素,并且带正号和带负号的项各占一半.

形如下列形式的行列式分别称为 n 阶对角行列式和 n 阶下三角形行列式.由定义 1 可知,它们的值都是主对角线上 n 个元素的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 5 计算下列行列式

$$(1)D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}; \quad (2)D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 由定义得

$$D_1 = a \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -a \cdot b \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = -abcd.$$

(2) 由定义得

$$D_1 = a_1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$
$$= -a_1 \cdot b_1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$
$$= -a_1b_1(0 - c_1d_1) = a_1b_1c_1d_1.$$

§1.2 行列式的性质

我们知道,二阶行列式的展开式共有 $2! = 2$ 项,三阶行列式的展开式共有

$3!=6$ 项，以此类推，n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项. 可以设想，在 n 比较大的情况下，要根据定义直接计算一个 n 阶行列式的值将是非常困难的，为了简化行列式的计算，需要介绍行列式的性质.

在介绍行列式的性质之前，先给出 n 阶转置行列式的概念.

如果把 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中的行与列按原来的顺序互换，得到的新的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

那么称行列式 D^{T} 为行列式 D 的转置行列式. 显然，D 也是 D^{T} 的转置行列式.

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

例如二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}.$$

由性质 1 可知，行列式关于行成立的性质，关于列也成立，反之亦然.

由性质 1 和 n 阶下三角形行列式的结论，可以得 n 阶上三角形行列式的值等于它的对角线元素乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 2 交换行列式的两行(列)，行列式变号.

例如 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2,\quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2.$$

性质 3 如果行列式中两行(列)对应元素全部相同，那么行列式的值为零.

例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=a_1b_2a_3+a_2b_3a_1+a_3b_1a_2-a_1b_3a_2-a_2b_1a_3-a_3b_2a_1=0$$

性质4 将行列式的某一行(列)中所有元素同乘以数k,等于用这个数k乘以该行列式.

例如
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质4也可以表述为:如果行列式某一行(列)的元素有公因子k,则可以将其提到行列式记号的外面.

例如
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

推论1 如果行列式中有一行(列)的元素全部为零,则该行列式的值等于零.

推论2 如果行列式中有两行(列)的元素对应成比例,则该行列式的值等于零.

例如
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\times 0 = 0$$

性质5 如果行列式中某一行(列)的元素均为两个数之和,则该行列式可依该行(列)元素分为两个行列式之和.

例如
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例1 计算行列式
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 因为
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+0 & 2+1 & 3+2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0+0 = 0.$$

注 性质5也可以推广到某行(列)每个元素都是m项之和的情况.

性质6 将行列式某一行(列)的所有元素l倍后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{l①+②} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+la_{11} & a_{22}+la_{12} & a_{23}+la_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

解 用 $-a_1, -a_2, -a_3$ 乘以第 1 行分别加到第 2、3、4 各行上，便构成一个上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ 0 & 0 & a-a_2 & a_3-a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a-a_3 \end{vmatrix}=(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3).$$

下面不加证明地引入一个关于行列式的重要定理.

定理 1 行列式 D 中任意一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即当 $i \neq j$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=0\left(或\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0\right). \tag{1}$$

综合行列式的定义和定理 1，可以得到

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, i=j \\ 0, i\neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, i=j \\ 0, i\neq j. \end{cases}$$

例 3(验证定理 1) 设 D 为

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

试求第三列元素与第一列对应元素代数余子式乘积的和.

解 因 $a_{13}=-2, a_{23}=0, a_{33}=1$，

又

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=9, A_{21}=-\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-8, A_{31}=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}=18,$$