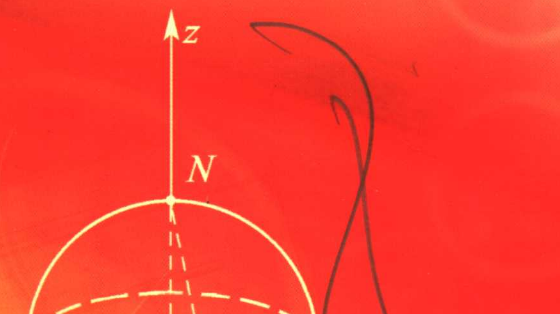
21st CENTURY
实用规划教材

21世纪全国高等院校实用规划教材

复变函数与积分变换

主编：焦红伟　尹景本



$$z = re^{i\theta}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高等院校实用规划教材

复变函数与积分变换

主　编　焦红伟　尹景本
副主编　吉洪威　张新成
　　　　张义宁

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书根据教育部高等院校复变函数与积分变换课程的基本要求，依据工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》，结合本学科的发展趋势，在积累多年教学实践的基础上编写而成的。本书旨在培养学生的数学素质，提高其应用数学知识解决实际问题的能力，强调理论的应用性。本书体系严谨，逻辑性强，内容组织由浅入深，理论联系实际，讲授方式灵活。

本书共分8章，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数及其应用、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换等。每章均配习题，书末附有习题答案。本教建议学时约54(不含“*”内容)。

本书适合高等院校工科各专业，尤其是自动控制、通信、电子信息、测控、机械工程、材料成型等专业作为教材，也可供科技、工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/焦红伟，尹景本主编. —北京：北京大学出版社，2007.9

(21世纪全国高等院校实用规划教材)

ISBN 978-7-301-12634-9

Ⅰ. 复… Ⅱ. ①焦…②尹… Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ. 0174.5 0177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第129230号

书　　名：**复变函数与积分变换**

著作责任者：焦红伟　尹景本　主编

策划编辑：孙哲伟

责任编辑：李娉婷

标准书号：ISBN 978-7-301-12634-9/O・0727

出　版　者：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871

网　　址：http://www.pup.cn　http://www.pup6.com

电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962

电子邮箱：pup_6@163.com

印　刷　者：世界知识印刷厂

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

787毫米×1092毫米　16开本　10.75印张　246千字

2007年9月第1版　2007年9月第1次印刷

定　　价：20.00元

前　　言

培养基础扎实、勇于创新的人才，是大学教育的一个重要目标。在工科的教育体系中，数学课程是基础课程，在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等方面起着重要的作用。复变函数理论一直伴随着科学技术的发展，从中汲取养分，并为之提供方法和工具。建立在复变函数理论之上的积分变换，通过特定形式的积分建立函数之间的对应关系。它既能简化计算，又具有明确的物理意义，在许多领域被广泛地应用，如电力工程、通信和控制领域、信号分析和图像处理、语音识别与合成、医学成像与诊断、地质勘探与地震预报等方面以及其他许多数学、物理和工程技术领域。通过本课程的学习，不仅能学到复变函数与积分变换中的基础理论及工程技术中的常用数学方法，同时还为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识面奠定了必要的数学基础。

本书以解析函数的理论为基础，阐述了复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数及其应用、共形映射，同时对傅里叶变换、拉普拉斯变换作了较为系统的介绍。本书深入浅出，突出基础概念和方法，在知识体系完整性的基础上，尽量做到数学推导简单易懂并在工程问题密切结合等方面形成了自己特色。书中精心编排了大量的例题和习题，以供读者进一步理解教材的内容。

在编写过程中我们力求突出以下几个特点：

(1) 注重复变函数与积分变换内容发生、发展的自然过程，强调概念的产生过程所蕴含的思想方法，注重概念、定理叙述的精确性。从而在学生获得知识的同时培养学生推理、归纳、演绎和创新能力。

(2) 对基本概念的引入尽可能联系实际，突出其物理意义；基础理论的推导深入浅出，循序渐进，适合工科专业的特点；基础方法的阐述富于启发性，使学生能举一反三、融会贯通，以期达到培养学生创新能力、提高学生的基本素质的目的。

(3) 例题和习题丰富，有利于学生掌握所学的内容，提高分析问题、解决问题的能力。为使复变函数理论完善，我们把共形映射作为一章编写进去，并用“*”加注，为学生展望新知识留下窗口，为进一步拓宽数学知识指出了方向。对于“*”章节，教师可根据专业需要、学生接受能力、课时的多少有选择地进行选讲，也可供学有余力的同学自学。

本书第 1 章、第 2 章由河南科技学院焦红伟编写；第 3 章由新乡机电工程学校吉洪威编写；第 4 章、第 5 章、第 6 章由河南科技学院尹景本编写；第 7 章由开封大学张新成编写；第 8 章由聊城大学张义宁编写。全书由焦红伟、尹景本负责统稿。本书的出版获得北京大学出版社的大力支持，河南科技学院教务处、数学系领导及全体教师给予了很多帮助和支持，陈付贵教授给予悉心指导，在此一并向他们表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限，书中的缺点和疏漏在所难免，恳请专家、同行和广大读者批评指正。

编　　者

2007 年 6 月

目　　录

第 1 章　复数与复变函数 1
1.1　复数及其运算 1
1.1.1　复数定义及运算 1
1.1.2　复数的代数式 2
1.1.3　复数的模与共轭复数 2
1.2　复数的几何表示 3
1.2.1　复平面与复数的向量式 3
1.2.2　复数的三角式与指数形式 4
1.2.3　复数的 n 次方根 5
1.2.4　无穷远点与复球面 7
1.3　平面点集 8
1.3.1　邻域 8
1.3.2　曲线 9
1.3.3　区域 9
1.3.4　无穷远点的邻域 10
1.4　复变函数 10
1.4.1　复变函数的概念 10
1.4.2　复变函数的极限 13
1.4.3　复变函数的连续性 16
1.5　习题 17
第 2 章　解析函数 20
2.1　复变函数的导数 20
2.1.1　复变函数的导数 20
2.1.2　复变函数的微分 22
2.2　解析函数 23
2.2.1　解析函数概念 23
2.2.2　柯西-黎曼条件
(C.-R.条件) 23
2.2.3　调和函数 26
2.3　初等函数 28
2.3.1　幂函数与根式函数 28
2.3.2　指数函数与对数函数 30
2.3.3　三角函数与反三角函数 33
2.3.4　一般幂函数与一般指数函数 .. 36
2.3.5　双曲函数与反双曲函数 37
2.4　习题 37
第 3 章　复变函数的积分 40
3.1　复变函数的积分概念 40
3.1.1　复积分的定义 40
3.1.2　复积分存在的一个条件 41
3.1.3　复积分的性质与计算 42
3.2　积分基本定理 46
3.2.1　单连通区域的柯西定理
——柯西-古萨基本定理 46
3.2.2　复连通区域的柯西定理
——复合闭路定理 47
3.3　积分基本公式与高阶导数公式 50
3.3.1　积分基本公式 50
3.3.2　高阶导数公式 53
3.4　原函数与不定积分 56
3.5　习题 58
第 4 章　级数 61
4.1　复级数的基本概念 61
4.1.1　复数项级数 61
4.1.2　复变函数项级数 62
4.2　幂级数 64
4.2.1　幂级数的概念 64
4.2.2　幂级数的收敛圆 64
4.2.3　和函数的解析性 66
4.3　泰勒级数 66
4.3.1　泰勒定理 66
4.3.2　解析函数表成幂级数
的例子 68
4.4　双边幂级数 71
4.4.1　双边幂级数的概念 71
4.4.2　双边幂级数的收敛域及
其和函数的解析性 72
4.5　罗朗级数 73
4.5.1　罗朗定理 73
4.5.2　函数展成罗朗级数的例子 73

4.6 解析函数在孤立奇点的性质 75

4.6.1 复平面上孤立奇点及其分类 75

4.6.2 函数在孤立奇点的去心邻域内的性质 75

4.6.3 复平面上孤立奇点分类的例子 77

4.6.4 函数在无穷远点的去心邻域的性质 78

4.7 习题 80

第 5 章　留数及其应用 83

5.1 留数的概念与计算 83

5.1.1 关于有限点的留数概念 84

5.1.2 关于留数的计算 84

5.1.3 关于无穷远点的留数 86

5.2 留数定理 88

5.3 留数在计算某些定积分上的应用 90

5.3.1 积分 I：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ 的计算 92

5.3.2 积分 II：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ 的计算 94

5.3.3 积分III：$\int_0^{2\pi}Ra(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ 的计算 96

*5.4 对数留数与辐角原理 98

5.4.1 对数留数 98

5.4.2 儒歇定理及其应用 99

5.5 习题 100

***第 6 章　共形映射** 104

6.1 解析函数的映射性质 104

6.1.1 解析函数的保域性与保角性 104

6.1.2 共形映射概念 106

6.2 几个初等函数的映射性质 107

6.2.1 函数 $w=z+h$（h 为常数）的映射性质 107

6.2.2 函数 $w=kz$（k 为常数，且 $k\neq 0$）的映射性质 107

6.2.3 函数 $w=\frac{1}{z}$ 的映射性质 107

6.2.4 幂函数与根式函数的映射性质 108

6.2.5 指数函数与对数函数的映射性质 110

6.2.6 茹科夫斯基函数的映射性质 111

6.2.7 分式线性变换的映射性质 112

6.3 共形映射的基本问题举例 115

6.3.1 共形映射的基本问题 115

6.3.2 例子 116

6.5 习题 120

第 7 章　傅里叶变换 124

7.1 傅里叶变换的概念和性质 124

7.1.1 傅里叶积分 124

7.1.2 傅里叶变换的概念 128

7.1.3 δ 函数及其傅里叶变换 129

7.1.4 傅里叶变换的性质 132

7.2 傅里叶变换的应用 133

7.2.1 周期函数与离散频谱 133

7.2.2 非周期函数与连续频谱 134

7.3 习题 135

第 8 章　拉普拉斯变换 137

8.1 拉普拉斯变换的概念与性质 137

8.1.1 拉普拉斯变换的概念 137

8.1.2 拉普拉斯变换的性质 138

8.2 拉普拉斯变换的逆变换 141

8.2.1 部分分式法 141

8.2.2 拉普拉斯变换的逆变换的性质 143

8.3 拉普拉斯变换的应用 144

8.3.1 微分方程的拉普拉斯变换解法 144

8.3.2 电路问题的拉普拉斯变换解法 146

8.4 习题 147

习题答案 150

参考文献 164

第 1 章　复数与复变函数

教学提示：复变函数是变量为复数的函数. 复变函数在众多数学分支中属于函数论. 函数论研究的是空间形式上的特殊函数类的性质. 复变函数研究的是定义在复数域上的解析函数的性质. 下面先讨论复数与复变函数这一章，为研究解析函数作好准备. 这门学科的一切讨论都是在复数范围内进行的.

教学目标：本章主要介绍复数及其运算和几何表示、复变函数及其极限和连续. 通过本章的学习，使学生熟练掌握复数的各种表示方法及其运算，了解区域和复变函数的概念，掌握复变函数的极限和连续的概念.

1.1　复数及其运算

在初等代数中已经学过复数，为了便于以后讨论和理解，本节在过去的知识基础上，给出复数的两点式定义，在简要回顾过去相关结论的同时，加以必要的补充.

1.1.1　复数定义及运算

定义 1.1　设 x,y 为实数，称形如 (x,y) 的有序数对为**复数**，其中的“有序”是指：若 $x\neq y$，则 $(x,y)\neq(y,x)$. 为了方便起见，用 z 表示复数 (x,y)，记作 $z=(x,y)$，特别地，将复数 $(0,0)$ 记作 $0=(0,0)$.

复数 (x,y) 中的第一个实数 x 称为复数 z 的**实部**，第二个实数 y 称为复数 z 的**虚部**，分别记作

$$x=\mathrm{Re}(z),\qquad y=\mathrm{Im}(z)$$

对任意两个复数 $z_1=(a,b),z_2=(c,d)$ 规定：

(1)当且仅当 $a=b$ 且 $c=d$ 时，称 z_1 与 z_2 **相等**，记作 $z_1=z_2$.

(2)**加法**　$z_1+z_2=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$.

减法　$z_1-z_2=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$.

乘法　$z_1\cdot z_2=(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$.

除法　$z_1\div z_2=\dfrac{(a,b)}{(c,d)}=(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}),\ z_2\neq 0$.

由上述规定，可以验证：加法、乘法满足交换律与结合律，乘法对加法满足分配律. 由此可知，在实数域里由这些规律推得的恒等式在复数里仍然有效. 可以看到按上述规定加法与乘法运算所带来的好处. 另外，还可以验证：复数集关于四则运算是封闭的，其代数结构是域. 复数集用“**C**”表示，$\mathbf{C}=\{z|z=(a,b),a,b\in\mathbf{R}\}$，**R** 为实数域.

1.1.2 复数的代数式

在讨论复数的定义时，很容易提出问题：复数(x,y)与$x+yi$（x,y为实数，$i^2=-1$）有无联系？

事实上，由规定的运算法则，对形如$(a,0)$的复数作加法与乘法运算时，可以像计算实数一样进行，因此，可以将$(a,0)$与a 等同起来．据此，可规定

$$a+(c,d)=(a,0)+(c,d)=(a+c,d)$$
$$a\cdot(c,d)=(a,0)\cdot(c,d)=(ac,ad)$$

于是，按此规定可推得

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+y\cdot(0,1)$$

若记$i=(0,1)$,则得

$$(x,y)=x+yi\text{，}\qquad i^2=-1$$

且易知$yi=iy$．

至此，可知，复数(x,y)就是以前学过的数$x+yi$或$x+iy$（x,y为实数，$i^2=-1$）．

称$x+yi$为**复数z的代数式**，其中i称为**虚数单位**，$i^2=-1$．若$x\equiv 0,y\neq 0$时，称yi为纯虚数.

关于复数$z_1=a+bi$与$z_2=c+di$的四则运算，依定义 1.1 有：

$$z_1\pm z_2=(a\pm c)+(b\pm d)i$$
$$z_1z_2=(ac-bd)+(bc+ad)i$$
$$z_1\div z_2=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,z_2\neq 0$$

为了方便起见，今后讨论问题时一般不再使用复数的数对表示，而常用复数的代数式或其他形式表示复数.

1.1.3 复数的模与共轭复数

对给定的复数$z=x+yi$，称复数$x-yi$为z的**共轭复数**，记作$\overline{z}=x-yi$．称$\sqrt{x^2+y^2}$（算术根)为复数z的**模**，记作$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$．

关于复数的模与共轭复数，有下列关系.

(1)$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$\quad\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$．

(2)$x\leqslant|x|\leqslant|z|$，$\qquad y\leqslant|y|\leqslant|z|$．

(3)$z\cdot\overline{z}=x^2+y^2$．

(4)$x=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$，$\qquad y=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$．

(5) $|z|=|\bar{z}|$,　　$|z|^2=z\cdot\bar{z}$，$\overline{(\bar{z})}=z$.

(6) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，　$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2\neq 0.$

这些性质作为练习，由读者自己去证明.

【例 1.1】　设 $z_1=3+2\mathrm{i}, z_2=1-\mathrm{i}$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$.

解　为求 $\dfrac{z_1}{z_2}$，在分子分母同乘 $\overline{z_2}$，再利用 $\mathrm{i}^2=-1$，化简可得 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

【例 1.2】　求复数 $A=\dfrac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$ 的模.

解法 1：用模的定义求 $|A|$，得 $|A|=1$.

解法 2：利用 $A^2=A\cdot\bar{A}$ 先求 $|A|^2$，再求出 $|A|=1$.

解法 3：观察 A 发现分子与分母互为共轭复数，由性质 $|z|=|\bar{z}|$，得 $|A|=1$.

1.2　复数的几何表示

1.2.1　复平面与复数的向量式

用建立了笛卡儿直角坐标系的平面来表示复数的平面称为**复平面**. 复平面赋予了复数以直观的几何意义，复数的数对表示式也可以看作是直角坐标系中的坐标(见图 1.1). 它建立了“数”与“点”之间的一一对应关系. 由此，今后不去区分“数”与“点”. 例如，把复数 $1+2\mathrm{i}$ 称为点 $1+2\mathrm{i}$，把点 $4+\mathrm{i}$ 称为复数 $4+\mathrm{i}$.

复数的几何解释使得许多关于复数的“量”有着清晰的“形”的表露. 例如，复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的模 $|z|$ 表示复平面上点 $M(x,y)$ 到原点的距离 r (见图 1.2)等. 这种“形”的表露对研究复变函数有重要意义.

在复平面上，由于点 $M(x,y)$ 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 是一一对应的，所以，复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 可看成一个起点在原点，终点在点 $M(x,y)$ 的向量(向径)(见图 1.2). 复数的向量形式是复数在复平面上的又一几何解释.

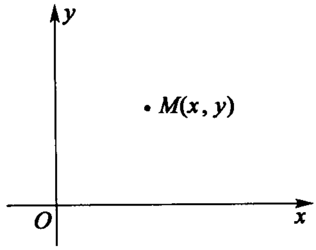


图 1.1

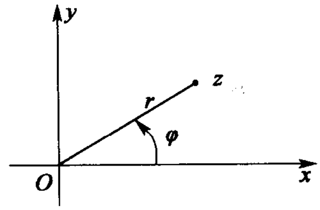


图 1.2

1.2.2　复数的三角式与指数形式

1. 复数 $z \neq 0$ 的辐角

复数 z 的辐角记作 $\operatorname{Arg} z$，它是向量 $\overline{Oz}$ 与 x 轴正向之间的夹角，其方向规定为逆时针方向为正，顺时针方向为负.

显然，对复数 $z=0$ 无辐角可言，而对每一个复数 $z \neq 0$，其辐角有无穷多个值，若 φ_0 是复数 z 的一个辐角，则

$$\operatorname{Arg} z = \varphi_0 + 2k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$$

就是复数 z 的全部辐角.

若用 $\arg z$ 表示满足条件 $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ 的一个特定值，则称 $\arg z$ 为复数 z 的**主辐角**或辐角的**主值**.

显然，有

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$$

辐角的主值 $\arg z\,(z \neq 0)$ 可以由反正切 $\operatorname{arc\,tan}\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按下列关系确定.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当}x>0,\ y\begin{cases} >0, & z\text{在第 I 象限} \\ =0, & z\text{在}x\text{轴正向} \\ <0, & z\text{在第IV象限} \end{cases} \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{当}x=0,\ y\begin{cases} >0, & z\text{在}y\text{轴正向} \\ <0, & z\text{在}y\text{轴负向} \end{cases} \\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi, & \text{当}x>0,\ y\begin{cases} >0, & z\text{在第 II 象限} \\ <0, & z\text{在第III象限} \end{cases} \\ \pi & \text{当}x<0,\ y=0,\ z\text{在}x\text{轴正向} \end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.

2. 复数的三角式

利用直角坐标与极坐标的关系式，很容易得到 $z=x+y\mathrm{i}$ 的三角表示式，称为复数 z 的**三角式**

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \quad z \neq 0$$

φ 通常取 $\arg z$.

3. 复数的指数式

若引入记号

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\ (\mathrm{e}\text{ 为自然对数的底})$$

则由复数的三角式得到

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

称该式为复数 $z(z\neq 0)$ 的**指数式**，其中 r 是 z 的模，θ 是 z 的辐角．利用复数的指数式作乘除法较简单，结果可得到两个等式：

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2$$

按以下约定来理解这两个等式：

第一个等式的意思是由于辐角的多值性，这个等式是两个无限集合意义下的相等.即当在左端取定一个值 α 时，那么在右端分别可从 $\operatorname{Arg}z_1$ 中取出一个值 α_1 及从 $\operatorname{Arg}z_2$ 中取出一个值 α_2，使得 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，并且，当从右端分别从 $\operatorname{Arg}z_1$ 与 $\operatorname{Arg}z_2$ 中取出 α_1 与 α_2 时，那么在左端定可取出某个 α，使得 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$．

第二个等式的理解与此类似．不仅如此，今后，凡遇到含多值的等式时，都按此约定理解．

复数的各种表示法可以相互转换，以适应讨论不同问题时的需要．

【例 1.3】　设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，求 z^2．

解　$z^2=z\cdot z=r^2(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2=r^2(\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta)=r^2\mathrm{e}^{2\theta\mathrm{i}}$

一般地，设 n 是正整数，z^n 表示 n 个 z 的乘积，称为 **z 的 n 次幂**．对 z 的 n 次幂有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=r^n\mathrm{e}^{n\theta\mathrm{i}}$$

特别，当 $r=1$ 即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 时，有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

这就是**棣莫弗公式**.

【例 1.4】　设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，试求复数 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}\tan x}{1+\mathrm{i}\tan x}$ 的三角式．

解　由所给复数 z 化简得

$$\begin{aligned}z&=\frac{(1-\mathrm{i}\tan x)(1-\mathrm{i}\tan x)}{(1+\mathrm{i}\tan x)(1-\mathrm{i}\tan x)}\\&=\frac{(1-\tan^2 x)-2\mathrm{i}\tan x}{1+\tan^2 x}\\&=\cos 2x-\mathrm{i}\sin 2x\end{aligned}$$

于是，得到复数 z 的三角式为

$$z=\cos(-2x)+\mathrm{i}\sin(-2x)$$

【例 1.5】　将复数 $z=-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ 化为指数式．

解　因 $r=4,\arg z=\arctan\sqrt{3}-\pi=\dfrac{\pi}{3}-\pi=-\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $z=4\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ 即为所求．

1.2.3　复数的 n 次方根

设 z 为复数，n 为正整数，若存在复数 w 满足方程

$$w^n = z$$

则称 w 为 z 的一个 n **次方根**，称求 z 的全部 n 次方根为把复数 z **开 n 次方**，或称为求 z 的 n **次根**，记作 $w=\sqrt[n]{z}$ 或 $w=z^{\frac{1}{n}}$.

对于符号 $\sqrt[n]{z}$ 约定：当 z 为非负实数时，符号 $\sqrt[n]{z}$ 仅表示通常的算术根．如果此时问题是需要将复数 z 开 n 次方，那将会特别声明．

求复数 $z=re^{i\theta}\neq 0$ 的 n 次根的公式为

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

当 k 取其他整数值时，这些根又重复出现，例如当 $k=n$ 时有

$$w_n = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)=w_0$$

在几何上 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

【例 1.6】　解方程 $z^3-1=0$.

解　求方程 $z^3-1=0$ 的解就是求 $z=1$ 的全部三次方根．因 $\arg 1=0$，$\sqrt[3]{1}=1$，故 z=1 的全部三次方根为

$$w_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=1$$

$$w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

$$w_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

这三个根是内接于中心为原点，半径为 1 的圆的正三角形的三个顶点.

【例 1.7】　设 $z=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})$，求 $\sqrt[4]{z}$.

解　因 $z=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$

故 $r=1,\arg z=\frac{\pi}{4}$．于是，z 的四个四次方根为

$$w_0=\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}$$

$$w_1=\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}$$

$$w_2=\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}$$

$$w_3=\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}$$

1.2.4 无穷远点与复球面

由于某种需要，引入一个特殊的复数——**无穷大**，记作∞.

关于∞，没有定义其实部、虚部与辐角，但规定其模$|\infty| = +\infty$.

有关∞参与的运算规定如下：

设 a 是异于∞的一个复数，规定

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty, \qquad \frac{a}{\infty} = 0, \qquad \frac{\infty}{a} = \infty$$

设 b 是异于 0 的一个复数，规定

$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty, \qquad \frac{b}{0} = \infty$$

关于$\infty \pm \infty$，$0 \cdot \infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$及$\dfrac{0}{0}$，仍无定义.

∞的几何解释：由于在复平面上没有一点能与∞相对应，所以，只得假想在复平面上添加一个“假想点”(或“理想点”)使它与∞对应，称此“假想点”为无穷远点.

关于无穷远点，约定：在复平面添加假想点后所成的平面上，每一条直线都通过无穷远点，同时，任一半平面都不包含无穷远点.

为与复平面区别，称复平面添加无穷远点后所成平面为**扩充复平面**. 扩充复平面又称**闭平面**，复平面又称**开平面**. 有时与扩充复平面相对而言也把复平面称为**有限复平面**.

这里要特别注意的是，这里的记号∞是一个数，而在高等数学中所见的记号$+\infty$或$-\infty$均不是数，它们只是表示变量的一种变化状态.

为使无穷远点有更加令人信服的直观解释，人们引入了**黎曼球面**(或复球面)：

将一个球心为O'，半径为$\dfrac{1}{2}$的球按照以下方法放在直角坐标系 $Oxyz$ (见图 1.3)中(设复平面与 Oxy 坐标平面重合)：使球的一条直径与 Oz 轴重合，并且使球与 Oxy 平面相切于原点 O. 球面上的点 O 称为南极，点 N 称为北极.

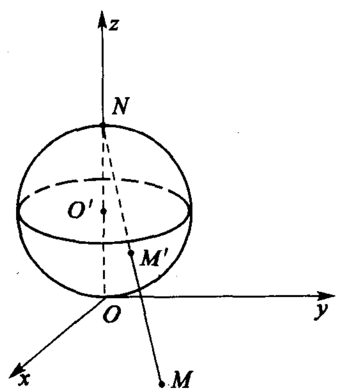


图 1.3

对于复平面内任一点M，如果用一直线把点M与北极点N连接起来，那么该直线一定与球面相交与异于北极的一点M'，反过来，对于球面上任何一个异于N的点M'，用直线把N与M'连接起来，这条直线的延长线就与复平面相交于一点.

若规定点N为点∞在黎曼球面上的对应点，而点∞是点N在扩充复平面上的对应点，则扩充复平面与黎曼球面之间便建立了一一对应关系.

至此，关于复数的几何解释又可以这样来说：复数域的几何模型是复平面或挖掉点N的黎曼球面，复数域添加无穷大后所成集合的几何模型是扩充复平面或黎曼球面.

1.3 平 面 点 集

本节主要是对一些常见的点与点集作出规定. 若无特殊声明，则总在复平面上讨论.

1.3.1 邻域

若$z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i},\quad z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$，则点$z_1$与$z_2$间的距离$d(z_1,z_2)$规定为

$$d(z_1,z_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

显然，$d(z_1,z_2)=|z_2-z_1|$.

设z_0为一定点，$\rho>0$，称满足$|z-z_0|<\rho$的点z的全体为点z_0的ρ**邻域**，记作$U(z_0,\rho)$. $U(z_0,\rho)$简称为点z_0的邻域.

$U(z_0,\rho)$的几何意义是，以z_0为圆心，以ρ为半径的圆内的全体点所组成的集合.

称$U^{\circ}(z_0,\rho)=U(z_0,\rho)-\{z_0\}=\{z\,|\,0<|z-z_0|<\rho\}$为$z_0$的去心$\rho$邻域，简称为点$z_0$的**去心邻域**.

$U^{\circ}(z_0,\rho)$的几何意义是，以z_0为圆心，以ρ为半径的圆内的全体点挖掉z_0后所组成的集合.

下面利用邻域来刻画一些特殊的点与点集.

设E是一点集，z_0是一定点：

若z_0的任意一个邻域内都含有E的无穷多个点，则称z_0为E的**聚点**.

若$z_0\in E$且存在某个$U(z_0,\rho)$，使得$U(z_0,\rho)$内除z_0外再无E的点，则称z_0为E的**孤立点**.

若$z_0\in E$且存在某个$U(z_0,\rho)$，使得$U(z_0,\rho)\subset E$，则称点z_0为E的**内点**.

若存在某个$U(z_0,\rho)$，使得$U(z_0,\rho)$内的全部点都不属于E，则称z_0为E的**外点**.

若z_0的任意一个邻域内既有属于E的点，又有不属于E的点，则称z_0为E的**边界点**.

称由E的全部边界点组成的集合为E的**边界**，记作∂E.

若E的点都是E的内点，则称E为**开集**.

若E的全部聚点都属于E，则称E为**闭集**.

若存在一个正数 M，使得 E 内的任意一点 z 都满足 $|z|<M$，则称 E 为**有界集**，否则，称 E 为**无界集**.

【例 1.8】 设点集 $E=\{z\,\|z|<1\}$，则点 $z=1/2$ 是 E 的内点；$z=\mathrm{i}$ 是 E 的聚点和边界点；$z=1+\mathrm{i}$ 是 E 的外点；E 是开集且为有界集；$\partial E=\{z\,\|z|=1\}$，∂E 是闭集且为有界集；$E\cup\partial E=\{z\,\|z|\leqslant 1\}$ 是闭集且为有界集．这里的 E 即 $U(0,1)$，常称为**单位圆**.

1.3.2 曲线

定义 1.2 设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是定义在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的实值连续函数，称由

$$z(t)=x(t)+y(t)\mathrm{i}$$

确定的点集 C 为复平面上的**连续曲线**，$z(\alpha)$ 与 $z(\beta)$ 分别称为曲线 C 的**起点**与**终点**．若 $z(\alpha)=z(\beta)$，则称曲线 C 为**闭曲线**.

曲线 C 的方向规定为参数 t 增加的方向．曲线 C 的反向曲线记为 C^{-}.

若连续曲线 C 仅当 $t_1=t_2$ 时，$z(t_1)=z(t_2)$，则称 C 为**简单曲线**或**约当曲线**．当 $t_1\neq t_2$ 而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)=z(t_2)$ 称为曲线 C 的**重点**．没有重点的连续曲线即为简单曲线或约当曲线.

若连续曲线 C 是一闭曲线，且仅当 t_1,t_2 中一个是 α，另一个是 β 时，才有 $z(t_1)=z(t_2)$，则称 C 是**简单闭曲线**或**约当闭曲线**(即简单曲线起点与终点重合).

若 C 是简单曲线，$x'(t)$ 与 $y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且对 $t\in[\alpha,\beta]$，有

$$z'(t)=x'(t)+y'(t)\mathrm{i}\neq 0\ (\text{或者记为}\ [x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0)$$

则称 C 为**光滑曲线**，称由有限条光滑曲线首尾连接而成的曲线为**逐段光滑曲线**.

为方便起见，称逐段光滑的闭曲线为围线．关于围线的方向规定为：逆时针方向为正向，顺时针方向为负向.

1.3.3 区域

设 E 为点集，若对 E 中任意两点，总能用一条完全属于 E 的连续曲线将它们连接起来，则称 E 是**连通的**.

设 E 为点集，若它是开集，且是连通的，则称 E 为**区域**.

若点集 D 为区域，则称 D 连同其边界 ∂D 所成的集合为**闭区域**，记作 $\overline{D}$.

任意一条简单闭曲线 C 必将复平面唯一地分成 D_1、C、D_2 三个点集(见图 1.4)，使它们满足：

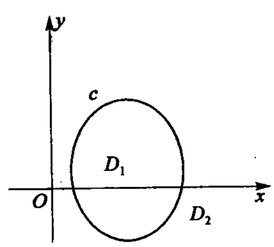


图 1.4

(1)彼此不相交；

(2)D_1是一个有界区域(称为曲线C的**内部**)；

(3)D_2是一个无界区域(称为曲线C的**外部**)；

(4)C既是D_1的边界又是D_2的边界；

(5)若简单折线(指满足简单曲线定义的折线)Γ的一个端点属于D_1，另一个端点属于D_2，则Γ必与C相交.

设D为区域，若D中任意一条简单闭曲线的内部仍属于D，则称D为**单连通区域**，不是单连通区域的区域称为**复连通区域**.

【例 1.9】 设$E=\{z|\operatorname{Im}z>0\}$，$D=\{z|1<|z|<2\}$，由定义得知，$E$是单连通区域，$D$是复连通区域.

单连通区域的特征是在该区域内任一个简单闭曲线可经过连续变形而缩成一个点. 而复连通区域不具有这个特征.

1.3.4 无穷远点的邻域

设$\rho>0$，称满足$|z|>\rho$的点z的全体所成的集合为无穷远点的ρ邻域，记作$U(\infty，\rho)$.

$U(\infty，\rho)$的几何意义：表示曲线$|z|=\rho$的外部.

有时为了方便起见，也简称$U(\infty，\rho)$为**无穷远点的邻域**.

在扩充复平面上，若一个区域内的每一条简单闭曲线的内部或外部(包含无穷远点)都属于这个区域，则称该区域为**单连通区域**. 称不是单连通区域的区域为**复连通区域**.

【例 1.10】 在扩充复平面上，$E=\{z||z|<1\}$为单连通区域；$D=\{z||z|>1\}$是单连通区域；$D=\{z|1<|z|<\infty\}$是复连通区域.

1.4 复 变 函 数

复变函数研究的主要对象是定义在复数域上的解析函数，而解析函数是一种特殊的复变函数，因此，在讨论了复数集后，还需要讨论复变函数的有关概念，进而为研究解析函数作好准备.

1.4.1 复变函数的概念

定义 1.3 设G与E为复平面上的两个复数集，若存在对应关系f，使对每一个$z\in G$，都有确定的$w\in E$与之对应，则称在G上确定一**函数**，记作

$$w=f(z)，\ z\in G$$

习惯上称复变数w是复变数z的函数，简称复变函数.

若依f只有一个确定的w与z对应，则称$w=f(z)$为**单值函数**. 否则，称$w=f(z)$为**多值函数**.

例如，$w=z^2, w=|z|$为单值函数，$w=\sqrt[3]{z}, w=\operatorname{Arg}z$为多值函数.

今后，若无特殊声明，则讨论的函数均为单值函数．

同高等数学一样，在上述定义中，称集合 G 为函数的**定义域**，称 G 的生成集

$$G' = f(G) = \{w | w = f(z), z \in G\}$$

为函数的**值域**，z 与 w 分别称为函数的**自变量**与**因变量**．

函数 $w = f(z)$ 又称为**变换**或**映射**．变换或映射着重刻画点与点之间的对应关系，而函数则着重刻画数与数之间的对应关系．

设有函数 $w = f(z)$，$z \in G$，G 为区域，若对 $z_1, z_2 \in G$，当 $z_1 \neq z_2$ 时，有 $f(z_1) \neq f(z_2)$，则称 $w = f(z)$ 为 G 上的**单叶函数**，称 G 为 $w = f(z)$ 的**单叶性区域**．

例如，$w = z + 1$ 是复平面上的单叶函数，复平面是该函数的单叶性区域．

设有函数 $w = f(z)$，$z \in G$．若对值域 $G' = f(G)$ 中的每一个 w，都有确定的 $z \in G$ 与之对应，且使 $w = f(z)$，则称在 G' 上确定一函数，记作 $z = f^{-1}(w), w \in G'$，称为函数 $w = f(z)$ 的**反函数**．

显然，反函数也有单值函数与多值函数之分．

例如，$w = z + 1$ 的反函数 $z = w - 1$ 是单值函数，而 $w = z^3$ 的反函数 $z = \sqrt[3]{w}$ 是多值函数．

本书中，如无特殊说明，所讨论的函数均为单值函数．

设有函数 $w = f(z)$，$z \in G$，若存在 $M > 0$，使对任意的 $z \in G$ 都有 $|f(z)| < M$，则称函数 $w = f(z)$ 为 G 上的**有界函数**；否则，称为**无界函数**．

复变函数与实变量的实值函数有无联系呢？为弄清这个问题，来观察一个例子．设 $w = z + z^2$，$z \in$ 复平面．令

$$z = x + y\mathrm{i}, \qquad w = u + v\mathrm{i}$$

则有　$u + v\mathrm{i} = (x + y\mathrm{i}) + (x + y\mathrm{i})^2 = (x^2 - y^2 + x) + (2xy + y)\mathrm{i}$

于是有　$u = x^2 - y^2 + x$，　$v = 2xy + y$

由此可知，函数 $w = z + z^2$ 的实部与虚部均为二元实值函数．

一般而言，对于 $w = f(z)$，$z \in G$，若令 $z = x + y\mathrm{i}$，$w = u + v\mathrm{i}$，则由对应关系 f 与复数相等的定义，易知 u 与 v 均是二元实值函数．

若设 $z = x + y\mathrm{i}$，$w = u + v\mathrm{i}$，则有

$$w = f(z) = u(x, y) + v(x, y)\mathrm{i}$$

因此，研究复变函数可以转化为研究二元实值函数．

一般来讲，当 z 与 w 用不同的复数表示法时，刻画函数 $w = f(z)$ 的两个二元实值函数会发生相应的变化．

至此，可以说，复变函数与实变量的实值函数有联系．这种联系表现为：**复变函数的实部与虚部均可用二元实值函数来表示**．

由于复变函数 $w = f(z)$ 的几何图形需在四维空间里考虑的缘故，所以，不可能有实值函数 $y = f(x)$ 与 $z = f(x, y)$ 的那种直观的感觉．为了赋予复变函数以形的解释，从变换或映射的角度来考虑．

设有函数 $w = f(z)$，$z \in G$，值域 $G' = f(G)$．取两张复平面，分别称为 z 平面和 w 平