常微分方程及其 Maple，MATLAB求解

钟益林 彭乐群 刘炳文 编著

清华大学出版社

常微分方程及其Maple，MATLAB求解

钟益林 彭乐群 刘炳文 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是常微分方程基础理论、基本方法和数学软件的系统应用相结合的教材. 它保持了当前通用教材中理论系统相对完整，方法与技巧多样化的特点，突出了从问题出发引导、发现解决问题的途径，进而导出重要的概念、命题、定理和解题方法的过程，体现了“诱导发现法”的教学思想方法. 采用了求解常系数齐次线性方程组的B.Van Rootselaar方法，计算机的实现充分表现了它较其他方法的显著优越性.

本书用详尽的实例较系统地介绍了在Maple与MATLAB两个数学软件平台中实现基础理论与基本方法的基本知识，本着学以致用的原则，简单介绍了求数值解的基本原理与方法及其计算机的实现，用生动的实例让读者了解微分方程数学建模的方法，并通过求解析解与数值解实现解决应用问题的大致过程.

本书可以作为数学、应用数学、计算数学、信息与计算科学等专业的常微分方程课程的教材，还可以作为其他理工科学生数学实验与数学建模课程的教学参考书. 本书所附的光盘内的原程序一般都具有通用性，可以作为应用工具或开发新解题方法应用程序的参考.

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程及其Maple, MATLAB求解/钟益林，彭乐群，刘炳文编著. —北京：清华大学出版社，2007.10

ISBN 978-7-302-15391-7

Ⅰ.常…　Ⅱ.①钟…　②彭…　③刘…　Ⅲ.常微分方程-数值计算-应用软件，Maple、MATLAB　Ⅳ.O241.81

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第081752号

责任编辑：刘　颖　赵从棉
责任校对：赵丽敏
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：三河市金元印装有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　**印　张**：20　**字　数**：406千字
附光盘1张
版　次：2007年10月第1版　　**印　次**：2007年10月第1次印刷
印　数：1～4000
定　价：29.80元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：024476-01

前 言

常微分方程是数学、应用数学、计算数学、信息与计算科学等专业继数学分析与高等代数等课程之后的的必修基础课程. 我们在近 20 年常微分方程教学实践中, 努力做到寓学习能力的培养于知识传授之中, 对发现式教学作了一些探索. 总结我们的教学实践, 为编写更有利于培养学生创新能力的教材提供新的思路, 是我们编写本教材的主要目的.

加强素质教育, 应该在基础知识的传授过程中, 把发现问题, 合理地提出问题, 应用常用的基本数学思想方法去研究和解决问题, 归纳形成科学的数学结论等能力的培养作为素质教育的基本内容而摆到重要的位置. 我们认为教材应该有别于学术论文和专著, 多一些启发性的问题, 尽量采用对数学知识的 “诱导发现” 式的叙述方式, 让读者在学习中真正体验认识知识的过程, 这是我们编写本教材的基本着眼点之一.

对初等积分法的内容, 我们力求抓住更本源的寻求可积类型的动机. 把对常微分方程经典解题方法的介绍, 变成引导学生探索解题方法的过程. 不是直接给出现成的经典解法的结果, 而是从特定方法所能解决的最一般类型的问题探索中, 引导学生归纳出应有的结果, 并在探索过程中运用开放性思维方式逐步把问题引向深入, 给读者留下更加广阔的想像与发展空间.

存在唯一性定理的证明, 我们是把它放在一般向量空间来处理的, 既可避免在讲线性系统时的重复, 又不会太增加对定理证明理解的难度. 对线性系统解空间的结构, 我们重点介绍线性方程组解空间的结构, 而把高阶线性方程解空间的结构尽量通过等价的方程组导出. 这既可减少重复, 又可加深读者对把高阶线性方程转化为等价的线性方程组来处理的方法的认识. 所有的命题、引理和定理一般都是对所提出的一定问题作充分讨论、严谨推导结果的归纳, 而把传统意义的书写证明作为学生的练习.

关于求常系数齐次线性方程组的基解矩阵, 我们采用了 B.Van Rootselaar 的方法, 即利用系数矩阵特征方程所对应的高阶齐次线性方程的基本解组来构造方程组标准基解矩阵的方法. 这既拓广了高阶常系数齐次线性方程的基本解组的应用, 又进一步加深了读者对高阶线性方程与线性方程组的内在联系的认识. 这种方法不再需要诸如将向量空间沿若尔当基分解或求特征向量或广义特征向量这类繁琐的计算, 而归结为某些向量函数和 Wronskain 矩阵的构造以及矩阵、向量求和与乘积等简单运算. 计算机的实现表明, 它的运行速度远快于已知的其他方法.

计算机技术的迅速发展和大量数学软件的开发应用为学习数学知识提供了强有力的工具. 让学生在本科学习阶段学会运用数学软件求微分方程的解析解与数值解的基本方

法, 了解数学方法的计算机实现过程, 让学生有可能通过较复杂的实例, 在将数学原理通过数学软件实现的过程中更深刻地体会所学的基本理论和知识, 并提高学生应用微分方程解决实际问题的能力, 是我们为培养创新型人才力求实现的愿望. 本着学以致用的原则, 我们在每章最后一节介绍用 Maple 和 MATLAB 求解微分方程的知识, 循序渐进地把大多数经典解题方法设计成具有通用性的 Maple 和 MATLAB 程序, 为学生提供了一些通过计算机实现数学方法的范例. 我们特别为读者介绍了用计算机绘制积分曲线图形的各种方法, 这更有利于从直观形象的角度认识微分方程解的性质. Maple 和 MATLAB 两种数学软件平台可以任选其一进行教学, 暂时无条件的略去用数学软件求解的内容不会影响整个教材内容的完整性, 还可以把这部分内容作为自学或数学实验的内容. 为了方便读者学习, 我们把书中所有源程序汇集在所附的光盘上, 所有程序都是在 Maple 7.0 环境中或 MATLAB 6.5 环境中运行并检验无误的, 都可在相应的软件平台上直接运行, 这不仅可以使读者节省大量输入程序的时间, 而将更多时间用于对数学方法的计算机实现过程的理解上, 也为读者开发更加完善的新程序提供参考. 未经作者授权, 任何人不得将光盘内容复制为商业电子出版物的内容.

常微分方程是一门紧密联系实际的学科, 为了帮助读者学得懂, 用得上, 我们用一章的篇幅介绍了几个典型的应用实例, 并介绍了微分方程数值解法的简单原理和基本方法. 求微分方程数值解的基本方法也为读者用微分方程知识解决实际问题打下基础. 考虑到不同院校本课程计划课时的限制, 我们把它作为选修或自修内容安排, 授课时可以根据实际情况决定取舍.

考虑到已具有大众教育特点的本科教育, 我们适当减少了理论部分的内容. 比如, 初值问题解对初值的连续依赖, 我们就只作简单的概念的描述与结论的引述; 完全略去了定性理论与稳定性理论的初步知识的介绍等.

凡标有 “*” 号的章、节、小节均可作为选修或自修内容.

全书内容是我们长期教学体会的积累, 由钟益林主笔撰写全书, 设计并调试所有计算机程序. 根据彭乐群、刘炳文在对初稿试用中反馈的意见, 我们反复进行修改后定稿. 本书的写作借鉴和参考了参考文献中所列大量文献的内容与教育思想, 在此向各位前辈与同仁表示由衷的谢意. 北京大学王铎教授审阅了书稿, 提出了中肯而宝贵的指导意见, 我们在此谨表示诚挚的谢意! 同时对清华大学出版社刘颖博士提出的增补内容的建议表示感谢.

由于经验不足, 特别是知识水平的限制, 可能有不少欠妥乃至错误之处, 敬请读者和同仁批评指正!(E-mail 地址为:bdzhongyilin@126.com)

目　录

第1章　绪　　论

常微分方程作为现代数学的一个重要分支，它的产生几乎与微积分是同时代的，经过历史的演变，它已经是各种应用学科和数学理论研究都不可缺少的工具. 随着计算机技术的飞速发展，更使它的应用渗透到力学、天文、物理、化学化工、生命科学、航空航天、经济科学等各个领域. 本章介绍常微分方程数学模型产生的实例与有关的基本概念，这是本课程学习的基础.

1.1　产生微分方程数学模型的实例

研究任何实际问题，弄清楚反映问题的变量之间的函数关系及因变量随自变量变化的趋势往往是问题的关键. 而在大量问题中，人们通过实验或凭借经验认识到的往往不是因变量与自变量之间的直接关系，而可能是联系着包括变化率在内的关系. 函数的变化率就是导数，因此往往先得到的是包括自变量、未知函数和未知函数的导数之间的关系 (方程式)，我们把 **包含自变量、未知函数和未知函数的导数 (或微分) 的等式** 称为 **微分方程**. 如果未知函数是单变量的，这样的微分方程叫做 **常微分方程**，而未知函数是多变量的微分方程就叫做 **偏微分方程**. 学习常微分方程也为学习偏微分方程打下基础.

例 1　设将温度为 u_0 的某小物体置于密闭的大空间内，大空间内的初始温度为 u_h，这里 $u_0 > u_h$，物体将被冷却. 试求物体温度 u 和时间 t 的关系.

解　为确定物体温度 u 和时间 t 的关系，需要用到热力学的一些基本定律，并需要对问题作一些简化假设. 由于空间密闭，可假定密闭空间内与外界没有热交换；又由于密闭空间较大，可认为密闭空间空气的温度不因小热物体冷却而改变，即保持常温 u_h. 根据热力学的 **牛顿冷却定律**，在一定的温度变化范围内，物体温度变化的速度与该物体与其所在介质温度的差成比例.

设温度为 u_0 的物体置入室内的时刻为 $t=0$，物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$，根据以上的假设和牛顿冷却定律，即可得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -k(u-u_h).$$

这里，负号表示热传导过程为冷却过程，常数 $k>0$ 为比例系数，称为介质的热传导系数，它可以通过实验测定. 为确定具体的冷却过程的解，还应该加上初始条件 $u(0)=u_0$.

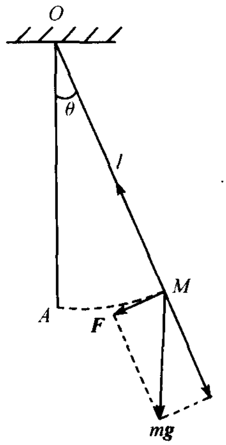

图 1.1 数学摆

例 2 一根质地很轻且细而长的刚性杆, 长度为 l, 末端连着一个质量为 m 的小球, 使小球稍微离开自由悬挂的平衡位置后, 让其在一个铅直平面内自由摆动, 这样的装置称为数学摆 (图 1.1). 这里, 杆的质量忽略不计, 且假定杆既不伸缩, 也不变形, 在悬挂点没有摩擦. 在这些假设下, 我们来建立数学摆的运动方程.

解 设细杆的铅直位置 OA 为平衡位置, 用逆时针方向作为摆偏离平衡位置的角度 θ 的正方向. 小球视为质量为 m 的质点, 它所受的重力 mg 分解为沿着质点作圆周运动的切线方向和细杆 OM 方向的两个分力, 其中沿细杆方向的分力与细杆对质点指向 O 的拉力平衡而不会对质点运动的速度变化产生影响, 而沿圆周运动切线方向的分力 $\boldsymbol{F}$ 则总是使质点回到平衡位置, 对质点运动的速度产生影响.

先考虑在无阻力介质中的情形. 时刻 t 质点所受对运动速度有影响的分力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

$$F = -mg\sin\theta.$$

这里的负号表示力的方向总是使 θ 的绝对值变小的方向. 用 v 表示质点的线速度, a 表示质点的加速度, 有

$$v = l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad 及 \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}.$$

根据牛顿第二定律, 得到

$$-mg\sin\theta = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2},$$

即质点的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

如果考虑数学摆在有阻力的介质中摆动, 假定阻力的大小与运动速度的大小成正比, 比例系数设为 μ, 那么由于阻力的方向总是与运动的方向 (即速度的方向) 相反, 于是有

$$-mg\sin\theta - \mu v = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}, \qquad 即 \quad -mg\sin\theta - \mu l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}.$$

这时质点的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{l}{m}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

如果在数学摆运动的方向存在一个外力 $F(t)$ 的干扰, 则运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{l}{m}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\sin\theta=\frac{1}{ml}F(t).$$

为了确定数学摆的运动, 我们还需要知道小球在初始时刻的偏离角度 θ 和角速度 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, 即明确, 当 $t=0$ 时,

$$\theta=\theta_0,\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega_0.$$

例 3 如图 1.2 所示为各种复杂电路中最基本的单元 R-L-C 回路. 设电源的电动势为 $E(t)$, 是时间 t 的已知函数, 电路中电阻值为 R, 电感为 L, 电容为 C, 求开关合上后, 电流强度 I 随时间变化的规律.

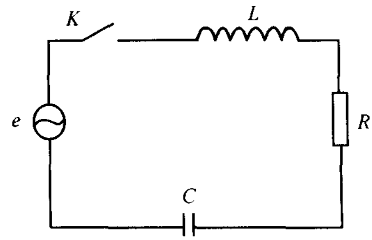

图 1.2 R-L-C 电路的电流

解 根据闭合回路的基尔霍夫第二定律, 在闭合回路中, 沿回路一周在各段支路上的电压降的代数和为零. 在时刻 t, 电阻上的电压降为 IR, 电感上的电压降为 $L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$, 而电容上的电压降为 $\frac{Q(t)}{C}=\frac{1}{C}\int_0^t I(t)\mathrm{d}t$. 所以有

$$E(t)-IR-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{C}\int_0^t I(s)\mathrm{d}s=0.$$

再将上式对 t 求导, 并进行整理后得

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}.$$

这就是在 R-L-C 回路的电流强度 $I(t)$ 所满足的微分方程. 如果电路是无源的, 则方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=0.$$

同样我们还知道在开关将合上的瞬间, 即 $t=0$ 时, 有 $I=0, \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=0$, 这就是初始条件.

从以上几个简单的例子我们可以看到, 对实际问题通过合理地简化条件, 找出刻画实际问题变化规律的关键变量并将其作为因变量, 根据已有的知识和经验, 设法建立起它与自变量及自身的变化率的关系, 就可以建立起这个实际问题的数学模型, 即常微分方程. 在 6.3 节, 我们还将介绍更多的微分方程模型并通过求解它来解决实际问题或解释实际问题中的客观现象.

1.2 微分方程的基本概念

本教材中将常微分方程简称为微分方程, 下面介绍几个有关的基本概念.

微分方程中未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的**阶数**. 一般 n 阶微分方程的形式为

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0. \tag{1.1}$$

其中等式左边的 F 是 $x, y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的已知函数, x 为自变量, y 为未知函数, 作为 n 阶微分方程必须含有未知函数的 n 阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$, 最简单的 n 阶微分方程为 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = 0$. 如果从方程 (1.1) 中可以解出最高阶导数而得到

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right), \tag{1.2}$$

这里右边的 f 为 $x, y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}$ 的已知显函数, 我们称形如方程 (1.2) 的方程为 n 阶的**显方程**, 而称形如方程 (1.1) 的一般方程为 n 阶**隐方程**. 特别地, 一阶隐方程和显方程的一般形式分别为

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y).$$

形如

$$a_0(x)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n(x)y = f(x)$$

的方程, 其左边为未知函数与未知函数的各阶导数的线性组合, 构成线性组合的系数 $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ 为已知函数 (或常数), 右边的 $f(x)$ 为已知函数, 我们把具有这种特征的方程称为 n **阶线性微分方程**. 除此以外的微分方程都一律称为**非线性微分方程**. 在 $a_0(x) \neq 0$ 的区间上, 上面的方程可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n(x)y = f(x). \tag{1.3}$$

通常的情况下只研究方程 (1.3) 这种形式的 n 阶线性微分方程. 线性微分方程由于其结构的特殊性, 对它的研究已经有相对完善的结果, 而且这些结果也是研究非线性微分方程的基础, 因此对它的研究有着十分重要的意义.

例如 1.1 节中的

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{l}{m}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\theta=\frac{1}{ml}F(t)$$

都是线性方程, 而

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{l}{m}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\sin\theta=\frac{1}{ml}F(t) \quad 和 \quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\sin x)y=0$$

却都是非线性方程.

微分方程中的未知量是函数, 我们把函数 $y=\varphi(x)$ 称为微分方程 (1.1) 或者 (1.2) 在某区间 I 上的 **解**, 如果将函数 $y=\varphi(x)$ 和它的各阶导数代入方程 (1.1) 或者 (1.2) 会使它们成为区间 I 上的恒等式. 如果由方程 $\Phi(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 是方程 (1.1) 或 (1.2) 的解, 则称 $\Phi(x,y)=0$ 为方程 (1.1) 或者 (1.2) 的 **隐式解**. 我们把微分方程的解或隐式解所表示的曲线, 称为 **积分曲线**. 把求微分方程的解的过程称为 **解方程**.

微分方程的解是一个可微函数, 它可以是显函数、隐函数, 也可以是用参数方程表示的函数, 甚至还可以是各项可微的一致收敛的函数项级数的和函数等. 读者可以根据微分方程解的概念考虑对各种形式的函数如何验证其是否为某微分方程的解的方法.

看一个很简单的方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$, 不难验证, 对任意常数 C, 函数 $y=x^2+C$ 都是方程的解. 这表明微分方程的解一般有无数个, 而实际问题中要求的解通常都是确定的, 从这无数个解中确定所需要的解就需要给出一定的条件, 比如对上面这个简单微分方程, 我们要求所求的解通过平面上的点 $(1,0)$, 从 $y=x^2+C$ 中令 $x=1, y=0$, 就可得到 $C=-1$, 因此 $y=x^2-1$ 就是所求符合要求的解.

从以上简单的例子中可以提出两个问题:

问题 1 微分方程有无数多的解, 这么多的解的表达式有何特点? 能否用一个统一的表达式表示它们?

问题 2 如何能从方程的无数个解中确定所需要的解?

从上面简单的例子可以看出, 方程有无数多个解通过表达式中含有任意常数反映出来. 长期研究的结果表明, 许多情况下要找到包含方程的所有解的共同表达式是有困难甚至是不可能的, 但是基本上包含了方程尽可能多的解的共同表达式还是存在的. 我们把含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

称为微分方程 (1.1) 或 (1.2) 的 **通解**. 这里所谓 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 含有 n 个独立的任意常数, 乃是指在 $(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 的某邻域内, 有 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$

的雅可比行列式不等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.4}$$

含有 n 个独立的任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的隐函数方程 $\Phi(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$ 称为方程 (1.1) 或 (1.2) 的**隐式通解**, 如果由此隐函数方程所确定的隐函数 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是方程 (1.1) 或 (1.2) 的通解. 这里, 任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的取值范围至少应该保证隐函数方程确实可以确定隐函数 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$. 因此, 任意常数的任意性也只是一定范围内的任意. 为简便起见, 以后我们约定把解与隐式解, 通解与隐式通解都一律称作解或通解.

我们把不包含任意常数的解叫做方程的 **特解**, 特解也可以理解为满足某种特定条件的解, 这种特定条件就称为 **定解条件**. 根据这些条件, 或者可以从通解中把所有任意常数变成确定的常数而得到所需要的解, 或者从不包含在方程的通解中的那些解中找到符合条件的解. 例如, 我们不难验证方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6y - x^2y^2$ 的通解为 $\dfrac{x^6}{y} - \dfrac{x^8}{8} = C$, 而 $y = 0$ 也是方程的一个解. 如果我们要求满足条件 $y(1) = 4$ 的解, 可以通过在通解中选择 $C = \dfrac{1}{8}$ 而得到, 而要求满足条件 $y(1) = 0$ 的解, 就不可能通过在通解中选择常数 C 的值得到, 但可以确定通解以外的解 $y = 0$ 恰好是满足这个条件的特解. 定解条件之一称为 **初始条件**, 即对自变量的一个初始值, 给定未知函数及其直到 $n-1$ 阶导数的值. 方程 (1.1) 或 (1.2) 的初始条件的一般形式为, 当 $x = x_0$ 时,

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{1.5}$$

其中 $y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ 为在某一允许范围内可任意给定的一组常数. 把求方程 (1.1) 或 (1.2) 满足初始条件 (1.5) 的特解的问题称为 **初值问题**或称 **柯西问题**. 如方程 (1.1) 的初值问题通常记作

$$\begin{cases} F\left(x, y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0, \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{1.6}$$

例 1 设 A, B 为任意常数但 $A \neq 0$, 试验证 $y = A\sin(2x+B)$ 是微分方程 $y'' + 4y = 0$ 的通解, 且求此方程满足初始条件 $y(0) = \dfrac{1}{2}, y'(0) = 1$ 的特解.

解 对任意的常数 A,B, 有 $y'=2A\cos(2x+B), y''=-4A\sin(2x+B)$, 于是方程的左端 $y''+4y=-4A\sin(2x+B)+4A\sin(2x+B)\equiv 0$, 即对于任意的常数 A,B, 函数 $y=A\sin(2x+B)$ 都是方程的解. 又因为

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial A} & \dfrac{\partial y}{\partial B} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial A} & \dfrac{\partial y'}{\partial B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(2x+B) & 2A\cos(2x+B) \\ 2\cos(2x+B) & -4A\sin(2x+B) \end{vmatrix} = -4A \neq 0,$$

两个任意常数 A,B 是独立的, 故 $y=A\sin(2x+B)$ 是微分方程 $y''+4y=0$ 的通解. 根据初始条件 $y(0)=\dfrac{1}{2}, y'(0)=1$, 有 $A\sin B=\dfrac{1}{2}, 2A\cos B=1$, 由此得出 $\sin B=\cos B=\dfrac{1}{2A}$, 解出 $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, B=\dfrac{\pi}{4}$, 所求的特解为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

在以后的学习中, 按照合理的解法求解, 自然产生的与方程阶数相同个数的积分常数通常的情形下应该是独立的, 因此并不要求所有求解问题都要对通解表达式中任意常数的独立性进行验证.

例 2 形如 $x^2y'+f(xy)=0$ 的方程, 从方程的结构分析, 它应该存在形如 $y=\dfrac{k}{x}$ 的解, 其中 k 是某个待定的常数. 我们将 $y=\dfrac{k}{x}$ 代入方程, 就应得到恒等式 $-k+f(k)=0$. 方程是否真正存在这种形式的解就取决于代数方程 $f(k)=k$ 是否存在实根了 (暂且只考虑实值函数解).

这种求微分方程的待定形式解的方法称为待定常数法 (或叫待定系数法), 将在以后经常用到.

两个或者两个以上的未知函数, 它们及它们的导数之间存在着一组相互关联的关系式 (方程式), 如

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-z, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y+x^2, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x^2+z,$$

我们称这样的联系着自变量和几个未知函数及它们的导数的多个方程式为 **微分方程组** .[1] 如果一组定义域之交非空的函数对应代入方程组的各个未知函数, 使得微分方程组中每个方程式都在某同一个区间 I 成为恒等式, 则称这组函数为微分方程组在 **区间 I 上的解**. 如 $x=1+\mathrm{e}^t, y=(1+2t)\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2t}-1, z=2t\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2t}-1$ 在整个实数集上为上述方程组的解 (请读者自行验证).

如果微分方程组中所有方程中未知函数的导数都不超过一阶, 则称这样的方程组为一阶微分方程组, 方程组的所有方程式中导数的最高阶数为 n, 就称该方程组为 n 阶方程组. 以后我们将知道关于高阶微分方程的研究通常可以转化为对一阶微分方程组的研究.

[1] 这里关于微分方程组的若干概念只是一种描述, 都非严格意义上的定义.

如果微分方程组中所有的方程都是线性的 (关于未知函数与未知函数的导数), 则称这样的微分方程组为 **线性微分方程组**. 我们将在以后重点讨论一阶线性微分方程组解空间的结构与求解方法.

对于方程个数与未知函数个数都为 n 的一阶微分方程组, 如果存在一组含 n 个独立的任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的解, 比如 $x_i = \varphi_i(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则也称它为方程组的通解. 所谓 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为独立的任意常数, 乃是指雅可比行列式 $\dfrac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(c_1, c_2, \cdots, c_n)} \neq 0$ 在解的定义区间上成立.

对于一阶微分方程组, 求每个未知函数在自变量的初始点等于各自事先给定的值的问题就是一阶微分方程组的初值问题, 相应的事先给定的各未知函数在自变量初始点处的一组值, 就构成初始条件.

1.3 初识 Maple 与 MATLAB*

目前 Maple, MATLAB, Mathematica, Mathcad, SPSS 等已成为世界上最流行的数学软件. 它们的强大科学计算功能已为世界上的科技工作者和教育工作者广泛应用于科学研究与教学之中. 本教材将较为系统地介绍前两种软件在微分方程中的应用. 我们仅对首次出现的指令的用途与语法规则给予说明, 请读者注意积累.

1.3.1 在微分方程基本概念应用中初识 Maple

在 Maple 界面输入指令, 用分号或冒号结束每个指令, 前者将显示运行结果, 后者则不显示该指令运行结果. 屏幕上一行中可以输入多个用分号或冒号分隔的指令. 按 **Shift+Enter**键, 是在输入时换行而不运行, 直接按 **Enter**键则执行光标所在程序段所有指令, 这与按窗口上方的快捷工具按钮 “*!*” 是一样的, 如果要执行工作区的所有程序, 则可按快捷工具按钮 “*!!!*”.

最基本也最常用的指令是给变量赋值. 赋值指令 **varname:=expr**都通过赋值号 “:=” 将其右边表达式 (值)expr 赋给其左边的变量 varname.

在 Maple 中, 以 **diff**(y(x), x) 表示 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 用 **diff**(y(x), x\$2) 表示 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 等, 依此类推. 在运行结果中, 表示导数的符号与偏导数符号是一样的.

例 1 验证函数 $y = \dfrac{\sin x}{x}$ 是方程 $xy' + y = \cos x$ 的解.

解 在 Maple 的工作界面输入以下一段简单的程序

```
> eqn := x * diff(y(x), x) + y(x) = cos(x);
  sol := x- > sin(x)/x;
```

```
is(eval(subs(y(x) = sol(x), eqn)));
```

第 1 行定义微分方程 eqn, 方程中未知函数必须用表示因变量的变量名 (字符串) 后加上用圆括号括起来的自变量符号表示, 如 y(x). 第 2 行定义所验证的解 $\mathrm{sol}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. 在 Maple 中, 提供函数运算符 "− >", 用语句 "y := x− > f(x)" 定义 x 的函数 $y = f(x)$, 这里 f(x) 可以是任何一个想要定义的函数表达式. 注意, 在 Maple 中所有函数的自变量一律要用圆括号 ( ) 括起来, 多个自变量之间用逗号分隔. 第 3 行的 **is**(expr) 是一个逻辑判断语句, 其中 expr 是只有 true 或 false 值的逻辑表达式. 这里的逻辑表达式, 是先用代换指令 **subs**(y(x)=sol(x), eqn) 将方程 eqn 中的未知函数 y(x) 用所要验证的解 sol(x) 作代换, 然后通过求值指令 **eval**() 对代换后的表达式进行计算得到的一个等式. 最后由指令 **is**返回 true 或者 false, 表示这个等式是否成立的验证结果.

说明：为节省篇幅, 本教材绝大多数计算机程序的运行结果都请读者上机运行程序之后察看.

例 2 验证 $x + y + \mathrm{e}^{xy} = 0$ 是微分方程 $(1 + x\mathrm{e}^{xy})\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 + y\mathrm{e}^{xy} = 0$ 的隐式解.

解 验证隐式解, 可以直接调用求隐函数导数的指令 **implicitdiff**( ).

```
> eq := (1 + x * exp(x * y(x))) * diff(y(x), x) + 1 + y(x) * exp(x * y(x)) = 0;
  sol := x + y + exp(x * y) = 0;
  subs(y(x) = y, solve(eq, diff(y(x), x))):
  implicitdiff(sol, y, x):
  is(% = %%);
```

在 Maple 中, 指数函数 e^{ax} 用 exp (a ∗ x) 表示. 第 3 行先用解代数方程的指令 **solve**() 从微分方程 eq 中解出导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 再通过代换指令 **subs**将得到的表达式中的 y(x) 换成 y. 第 4 行的 **implicitdiff**(sol, y, x) 为求隐函数式 sol 的隐式导数 $y'(x)$ 的指令, 导数用 x, y 的函数表示. 注意在输入参数中因变量 y 在前, 自变量 x 在其后. 最后的逻辑判断语句中, 逻辑表达式等号两边的 % 和 %% 分别表示上一语句的运行结果和上上个语句的运行结果, 依此类推.

下面的方法适合于不便从微分方程中解出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的情形验证隐式解.

```
> eq := (1 + x * exp(x * y(x))) * diff(y(x), x) + 1 + y(x) * exp(x * y(x)) = 0;
  sol := x + y + exp(x * y) = 0;
  subs(y = y(x), implicitdiff(sol, y, x)):
  is(subs(diff(y(x), x) = %, eq));
```

下面我们来验证用参数方程形式表示的微分方程的解.