新课标

配苏教版

高中数学

学习质量测评

《学习质量测评》编委会 策划编写

选修2-1

凤凰出版传媒集团
江苏文艺出版社
JIANGSU LITERATURE AND ART PUBLISHING HOUSE

i zhi liang ce ping xue xi zhi liang ce ping xue xi zhi liang ce ping

高中数学 选修2-1

主　编：肖立荣　闻建华

编　者：吴群英　张宏斌　陈树平

夏玉琴　吴海平　吕建林

张　亮

新课标学习质量测评

凤凰出版传媒集团

江苏文艺出版社

JIANGSU LITERATURE AND ART PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

新课标学习质量测评．高中数学．2—1：选修/王思俭主编．—南京：江苏文艺出版社，2007.5

ISBN 978-7-5399-2573-8

Ⅰ．新…　Ⅱ．王…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 068342 号

书　　名　新课标学习质量测评・高中数学・选修 2—1
编　　者　王思俭等
责任编辑　贾树人
责任监制　卞宁坚　江伟明
出版发行　江苏文艺出版社(南京湖南路 47 号　210009)
集团地址　凤凰出版传媒集团(南京中央路 165 号　210009)
集团网址　凤凰出版传媒网　http://www.ppm.cn
印　　刷　南京雄州印刷有限公司
经　　销　江苏省新华书店集团有限公司
开　　本　850×1168 毫米　1/16
印　　张　92.5
字　　数　236 万字
版　　次　2007 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
标准书号　ISBN 978-7-5399-2573-8
定　　价　135.00 元(全九册)

《高中学习质量测评》编委会

总策划:张志翔　伊　仁

委　员:张必忠(江苏省化学高级教师,江苏省如东高级中学)
钱　骏(江苏省物理特级教师,江苏省梁丰高级中学)
王思俭(江苏省数学特级教师,江苏省苏州中学)
黄建书(江苏省生物特级教师,江苏省南通第一中学)
王仁元(江苏省英语特级教师,南京市外国语学校)
章　宏(南京教育科学研究所主任,高级教师)
靳贺良(江苏省语文特级教师)
郭东辉(江苏省历史高级教师)
陆芷茗(江苏省地理高级教师)
陈明芬(江苏省政治高级教师)

编写说明

从2004年开始，江苏省的高考进入“国家统一考试，分省自主命题”的新阶段；2005年秋季起，江苏全省启用“普通高中课程标准实验教科书”，这意味着2008年的高考将以此为纲。面对如此快速的变动，研究教材、研究高考日显重要。江苏文艺出版社组织江苏省内教育发达地区的一线优秀骨干教师、教研员组成《学习质量测评》编委会，认真研究、分析了当前高中教育教学改革的需要，汲取优秀学习辅导资料的精华，为广大高中师生量身定做了达套教辅精品。本套丛书有以下特点：

贴近教学，重点突出。

2005年江苏全面进入高中课程改季，普通高中课程由必修和选修两部分构成，通过学分描述学生的课程修习状况。为此，《学习质量测评》丛书从高中一年级开始配合此次课程改季的要求，配套多个版本新课标教材的内容进行编写，做到与教材配套，与课改要求配套。

名校名师，倾力奉献。

达套丛书的编写人员由省内重点中学近百位教研专家、特高级教师组成，囊括众多名校名师：梁丰高级中学校长、物理特级教师钱骏；如东高级中学校长、化学高级教师张必忠；苏州中学数学特级教师王思俭；南通一中生物特级教师黄建书；南京教育科学研究所主任、高级教师章宏；语文特级教师新贺良等。

编写人员认真把握教学大纲的精神，分析、研究当前图书市场上同类教辅的优劣，结合自己多年的教学心得体会，力争把最便捷、最优秀、最实惠的教学成果奉献给广大师生。

命题设计，精当新活。

不论是名师点拨，还是水平自测、能力提升，所选的题目体现了一个“精”字；以点带面，突出一个“活”字。注重学生的能力培养，命题设计灵活多样，具有较强的前瞻性，充分体现了高考和课改中的能力要求，在练习中培养学生的创新思维和探索精神。

设计合理，便于使用。

编写体例按照学、练、考的教学思想、优化设计，合理安排。在栏目设置中考虑了有便于学生预习的**课前链接**；提炼重点的**知识网络**；师生互动的**名师点拨**；便于自测的**水平自测**；贴近高考，便于学有余力学生自学的**高考展望**和**能力提升**。

Contents
目录

第1章 常用逻辑用语

第2章 圆锥曲线与方程

Contents 目录

Contents

第 1 章　常用逻辑用语

第一课时　四种命题

问题情景设置
EN TI QING JING SHE ZHI

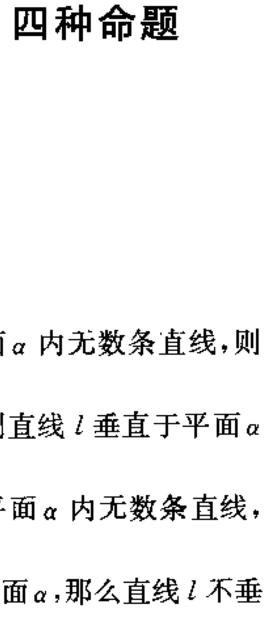
题目:研究下列命题:

(1)若直线 l 垂直于平面 α 内无数条直线,则直线 $l\perp$平面 α;

(2)若直线 $l\perp$平面 α,则直线 l 垂直于平面 α 内无数条直线;

(3)若直线 l 不垂直于平面 α 内无数条直线,则直线 l 不垂直于平面 α;

(4)若直线 l 不垂直于平面 α,那么直线 l 不垂直于平面 α 内无数条直线.



解析:(1)假命题.例如,直线 l 是平面 α 的斜线,斜足为 O,$P\in l$,作 $PH\perp\alpha$ 于 H,$\therefore OH$ 是 l 在 α 内射影.$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\subset$平面 α,$a_1/\!/a_2/\!/\cdots/\!/a_n/\!/\cdots$且使 $a_i\perp OH$.$\because PH\perp$平面 α,$\therefore PH\perp a_i$,又 $PH\cap OH=H$,$\therefore a_i\perp$平面 POH,$\therefore a_i\perp PO$,即 $a_i\perp l(i=1,2,3,\cdots)$.但 l 与平面 α 不垂直.

(2)真命题.由线面垂直定义可知.

(3)真命题.反证法,假设直线 $l\perp$平面 α,则 $l\perp$平面 α 内所有直线,这与"直线 l 不垂直于平面 α 内无数条直线"矛盾,所以假设不真.

(4)假命题.例如第(1)题中所举特例.虽然 l 与平面 α 不垂直,但平面内有无数条直线与 l 垂直,但必另有无数条直线与 l 不垂直.

命题(1)与命题(2)的条件与结论是互换的;命题(3)的条件与结论都是命题(1)的条件与结论的否定;命题(4)与命题(3)的条件与结论互换,故命题(1)与命题(2)互为逆命题;命题(3)与命题(1)互为否命题;命题(4)与命题(1)互为逆否命题;命题(2)与命题(4)互为否命题;命题(3)与命题(4)互为逆命题;命题(2)与(3)互为逆否命题.

解题回顾:从上述问题可以看出:原命题与逆否命题的真假性是一致的;逆命题与否命题的真假性是一致的.也就是说,四种命题中为真命题的个数可能为 0 个、2 个或 4 个,但不可能是奇数个.

知识网络梳理
HI SHI WANG LUO SHU LI

1. 命题的定义

能够判断真假的语句叫做命题.一般地,疑问句、祈使句等不能判断真假,所以它们不是命题.

2. 四种命题的定义

设"若 p 则 q"为原命题,那么"若 q 则 p"就叫做原命题的逆命题;"若非 p 则非 q"就叫做原命题的否命题;"若非 q 则非 p"就叫做原命题的逆否命题.

(1)在将一个命题改写为"若 p 则 q"的形式时,写法不是惟一的.

如:命题:"负数的平方是正数"可写成"若一个数是负数,则它的平方是正数",其对应的逆命题、否命题、逆否命题分别为:

逆命题:若一个数的平方是正数,则它是负数.

否命题:若一个数不是负数,则它的平方不是正数.

逆否命题:若一个数的平方不是正数,则它不是负数.

也可写成"若一个数是负数的平方,则这个数是正数",则其对应的逆命题、否命题、逆否命题相应变为:

逆命题:若一个数是正数,则它是负数的平方.

否命题：若一个数不是负数的平方，则这个数不是正数.

逆否命题：若一个数不是正数，则它不是负数的平方.

(2)不要忽视原命题的大前提

例如：判断命题"若 $a>b$，则 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$"的逆否命题的真假.

如果忽视命题的大前提 a,b 为实数，则会给出如下错误解答：

错解：其逆否命题为"若 $\sqrt{a}$不大于 $\sqrt{b}$，则 a 不大于 b". 由于"不大于"就是"小于等于"，所以这个逆否命题可变形为：若 $\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}$，则 $a\leqslant b$，逆否命题为真.

由条件可知，原命题为假，而逆否命题为真，这与教材的相关结论矛盾，原因在于：

命题的大前提是 a、b 为实数，对于逆否命题："若 $\sqrt{a}$不大于 $\sqrt{b}$，则 a 不大于 b."应分下列两种情况进行讨论：

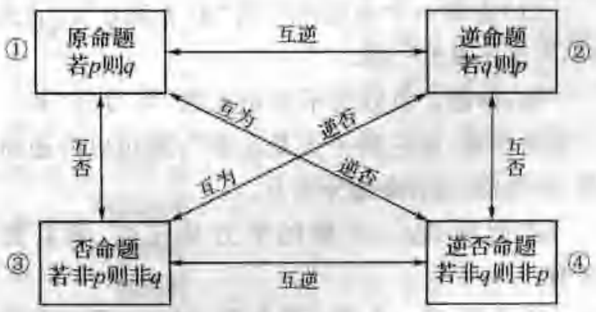
(1) $\sqrt{a}$不大于 $\sqrt{b}$有意义，即 $\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}$，推出 $a\leqslant b$；

(2) $\sqrt{a}$不大于 $\sqrt{b}$无意义(如 a、b 出现负值)，整个命题就无意义，$a\leqslant b$ 不一定成立.

由(1)、(2)可得，该命题的逆否命题为假.

3. 四种命题之间的相互关系

四种命题之间的相互关系如图所示



命题的四种形式中，谁是原命题是相对的，而不是绝对的. 如设图中④是原命题，则它的逆命题、否命题、逆否命题依次是③、②、①.

4. 会用原命题与逆否命题的等价关系间接证明有关问题

由于原命题和它的逆否命题有相同的真假性，所以当我们直接证明某一个命题为真命题有困难时，可以通过证明它的逆否命题为真命题，来间接地证明原命题为真命题.

5. 注意点

(1)理解命题的概念，能判断命题的真假.

(2)理解四种命题的概念，能根据原命题写出其逆命题、否命题、逆否命题，可以给出形式化的表示. 设 p 和 q 分别表示两个语句，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定，于是四种命题的形式就是：原命题"若 p 则 q"，逆命题"若 q 则 p"，否命题"若 $\neg p$ 则 $\neg q$"，逆否命题"若 $\neg q$ 则 $\neg p$".

(3)原命题与逆否命题同真或同假，逆命题与否命题同真或同假，即互为逆否命题的两个命题同真假.

(4)写出所给命题的逆命题、否命题、逆否命题时，如果命题不是"如果…那么…"(或"若…则…")的形式，应先将其改写成"若…则…"形式的命题，使原命题的条件和结论更加明确，便于写出命题的其他三种形式，这种"改写"的形式有时不惟一.

M ING SHI DIAN BO 名师点拨

例 (1)写出命题："如果两个实数的积是有理数，那么这两个数都是有理数"的逆命题、否命题、逆否命题；

(2)指出上述四个命题的真假，并证明你的结论.

思路分析：判断命题的真假性时，若是假命题举一反例即可，若命题是真命题时要给出证明，可以直接证明，也可以从反面入手，即反证法.

解：(1)逆命题："如果两个实数都是有理数，那么这两个实数的积是有理数."否命题："如果两个实数的积是无理数，那么这两个实数不都是有理数."逆否命题："如果两个实数中不都是有理数，那么这两个实数的积是无理数."

(2)原命题是假命题，举一反例：取两个实数分别是 $\sqrt{2}$与 $\sqrt{8}$，它们的积为 4，是有理数，但 $\sqrt{2}$与 $\sqrt{8}$均为无理数.

考虑原命题与它的逆否命题是等价命题，故逆否命题也是假命题.

现证明逆命题正确，设 m、n 都是有理数，由有理数定义，$m=\frac{q}{p}$，$n=\frac{b}{a}$ $(p,q,a,b\in\mathbf{Z},ap\neq0)$，则

$m \cdot n=\frac{q}{p} \cdot \frac{b}{a}$为有理数,考虑否命题,因为逆命题与否命题为等价命题,故否命题也是真命题.

解题回顾:对于假命题的判断要给出反例,本题求解过程中举出$\sqrt{2}$,那么如何证明$\sqrt{2}$是无理数呢?也可以利用反证法证明.

反设$\sqrt{2}$是有理数,即$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$(m、$n\in \mathbf{N}_+$ 且 m、n互质),$\therefore 2n^2=m^2$,$\because 2n^2$ 是偶数,$\therefore m^2$ 也是偶数,$\therefore m$ 必为偶数 $2k(k\in \mathbf{N}_+)$,$\therefore 2n^2=4k^2$,$\therefore n^2=2k^2$,又$\because 2k^2$ 为偶数,$\therefore n^2$ 必为偶数,即 n 必为偶数 $2p(p\in \mathbf{N}_+)$. $\therefore m=2k,n=2p$,这与 m、n 互质矛盾,所以反设不真,$\therefore \sqrt{2}$是无理数.

正确地作出反设(即否定结论)是正确运用反证法的前提,反证法是常用的间接证法之一,实质是:通过证明一个命题的否定为假来说明该命题为真,而要证明一个命题为假,是指由该命题可以推出矛盾,即推出一个命题同时推出它的否定,中学数学中的"逆否证法"即是反证法的一种形式. 反证法证题步骤:第一步,假设要证命题的反面成立;第二步,从这个假设出发推理论证,得出矛盾;第三步,由矛盾判断假设不成立,从而肯定结论正确.

水平自测
HUI PING ZI CE

1. 下列说法中错误的是 ( )
   A. "平面内,对角互补的四边形有外接圆"的否命题是真命题
   B. "平面内,对角互补的四边形有外接圆"的逆命题是真命题
   C. "平面内,对角互补的四边形有外接圆"的逆否命题是真命题
   D. "平面内,对角互补的四边形有外接圆"是假命题
2. 一个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中 ( )
   A. 真命题的个数一定是奇数
   B. 真命题的个数一定是偶数
   C. 真命题的个数可能是奇数也可能偶数
   D. 以上判断均不正确
3. 命题"对应角相等的两个三角形相似"的逆命题的否命题是 ( )
   A. 如果两个三角形相似,那么这两个三角形的对应角相等
   B. 如果两个三角形不相似,那么这两个三角形的对应角相等
   C. 如果两个三角形不相似,那么这两个三角形的对应角不相等
   D. 如果两个三角形相似,那么这两个三角形的对应角不相等
4. 对于命题"若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下,则$\{x|ax^2+bx+c<0\}\neq\varnothing$"的逆命题、否命题、逆否命题,以下说法中正确的是 ( )
   A. 都真　　B. 都假
   C. 否命题真　　D. 逆否命题真
5. 已知命题:"若 $x=3$ 且 $y=5$,则 $x+y=8$". 写出:
   其逆命题:__________,
   其否命题:__________,
   其逆否命题:__________.
6. 把下列命题改写成"若 p 则 q"的形式,并写出它们的逆命题、否命题、逆否命题,并指出它们的真假:
   (1)对顶角相等;
   (2)对角线互相垂直的四边形是菱形.
7. 写出命题"正数 a 的平方根不等于0"的逆命题、否命题、逆否命题.

高考展望
AO KAO ZHAN WANG

例 (2006年上海卷第20题改编)在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 与抛物线 $x^2=2y$ 相交于 A、B 两点.

(1)求证:"如果直线 l 过定点 $T(0,3)$,那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题;

(2)写出第(1)问中命题的逆命题,判断它是真命题还是假命题,说明理由.

思路分析:(1)先考虑斜率不存在时的情况,再写出直线 l 的方程 $y=kx+3$,代入抛物线方程,消去 y,得出关于 x 的一元二次方程.拟出 x_1 与 x_2 的关系式,而 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$,此时 y_1,y_2 分别用 x_1,x_2 表示,从而求出 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的值.(2)先写出它的逆命题,设直线 l 过点 $T'(0,b)$,仿照(1)的思路代入建立关于 b 的方程,求出 b 的值.如果只有一个值 $b=3$,就说明逆命题成立,否则逆命题就不成立.问题迎刃而解.

解:(1)设过点 $T(0,3)$ 的直线 l 交抛物线 $x^2=2y$ 于点 $A(x_1,y_2)$,$B(x_2,y_2)$.当 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程是 $x=0$,此时,直线 l 与抛物线相交于点 $0(0,0)$,不合适.

当 l 的斜率存在时,设 l 的方程为 $y=kx+3$.由 $\begin{cases}y=kx+3,\\x^2=2y,\end{cases}$ 消去 y 得,$x^2-2kx-6=0$,$\Delta=4k^2+24>0$,$\therefore x_1+x_2=2k$,$x_1x_2=-6$.

又点 A、B 在抛物线上,$\therefore y_1=\frac{1}{2}x_1^2$,$y_2=\frac{1}{2}x_2^2$,$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\frac{1}{4}(x_1x_2)^2=-6+\frac{1}{4}\times(-6)^2=-6+9=3$.

综上所述,命题"如果直线 l 过点 $T(0,3)$,那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题.

(2)逆命题:"设直线 l 交抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 于 A、B 两点,如果 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$,那么该直线过点 $T(0,3)$",该命题是一个假命题.

例如,取抛物线上的点 $A(2,2)$,$B(1,\frac{1}{2})$,此时,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(2,2)\cdot(1,\frac{1}{2})=2\times1+2\times\frac{1}{2}=3$.

直线 AB 的方程是:$y-2=\dfrac{\frac{1}{2}-2}{1-2}\cdot(x-2)$,即 $y=\frac{3}{2}x-1$,而 $T(0,3)$ 不在直线 AB 上,故原命题的逆命题是假命题.

解题回顾:本题是考查学生对命题的理解和判断其真假的能力,该题是解析几何、平面向量与简易逻辑综合的试题,属于创新命题,同时也揭示了解析几何与代数的关系.

能力提升
NENG LI TI SHENG

1. 若命题 p 的逆命题是 q,命题 p 的否命题是 r,则 q 是 r 的 ( )
   A. 逆命题　　B. 否命题
   C. 逆否命题　　D. 以上都不对
2. 与命题"能被6整除的整数,一定能被3整除",真假性一致的命题是 ( )
   A. 能被3整除的整数,一定能被6整除
   B. 不能被6整除的整数,一定不能被3整除
   C. 不能被6整除的整数,不一定能被3整除
   D. 不能被3整除的整数,一定不能被6整除
3. 与命题"如果 $a\in M$,那么 $b\notin M$"真假性一致的命题是 ( )
   A. $a\in M$ 或 $b\in M$
   B. 如果 $b\notin M$,那么 $a\in M$
   C. 如果 $b\in M$,那么 $a\notin M$
   D. 如果 $a\notin M$,那么 $b\in M$
4. 下列命题:
   ①面积相等的三角形是全等三角形;
   ②"若 $xy=0$,则 $|x|+|y|=0$"的逆命题;
   ③"若 $a>b$,则 $a+c>b+c$"的否命题;
   ④"矩形的对角线互相垂直"的逆否命题.
   其中真命题共有________个.
5. (2005年江苏卷)命题:"若 $a>b$,则 $2^a>2^b-1$"的否命题是________________.
6. 将下列命题改成"若 p 则 q"的形式,并写出否命题.
   (1) $a>0$ 时,函数 $y=ax+b$ 的值随 x 值的增加而增加.
   (2)当两圆相切时,连心线经过两圆的交点.
   有人给出下列解法:请判断其解是否正确?若错误,请指出错误原因,并给出正确解答.
   (1)原命题改为:若 $a>0$ 时,x 的值增加时,则函数 $y=ax+b$ 的值也随着增加.

否命题为：$a\leqslant 0$ 时，x 的值不增加，则函数 $y=ax+b$ 的值也不增加.

(2)原命题为：若两圆相切，则连心线过两圆交点，否命题为：若两圆不相切，则不是连心线的直线不过两圆交点.

7. 已知 $a^2-4b^2-2a+1\neq 0$，求证：$a\neq 2b+1$.

第二课时　充分条件和必要条件(1)

问题情景设置

EN TI QING JING SHE ZHI

题目：数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

p：$\{a_n\}$是等差数列，q：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

试问 p 是 q 的什么条件，并说明理由.

解析：首先 p 是 q 的充分条件，$\because\{a_n\}$为等差数列，由等差数列性质可得 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_r+a_{n-r+1}=\cdots=a_n+a_1$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. $\therefore 2S_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1)=n(a_1+a_n)$，$\therefore S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$. $\therefore p$ 是 q 的充分条件.

其次，p 也是 q 的必要条件，因为 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$对一切 $n\in \boldsymbol{N}_+$ 都成立，

$$\therefore\begin{cases}S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}, & ①\\ S_{n+1}=\dfrac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}, & ②\end{cases}$$

② − ① 得，$S_{n+1}-S_n=\dfrac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}-\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{n+1}{2}a_{n+1}-\dfrac{n}{2}a_n$，

$\therefore 2a_{n+1}=a_1+(n+1)a_{n+1}-na_n$，

即$(n-1)a_{n+1}-na_n+a_1=0$.　③

将③中 n 替换为 $n+1$ 得，$na_{n+2}-(n+1)a_{n+1}+a_1=0$.　④

③−④得，$(n-1)a_{n+1}-na_n-na_{n-2}+(n+1)a_{n+1}=0$，$\therefore(2n-1+1)a_{n+1}=n(a_n+a_{n+2})$，$\therefore 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$. $\therefore a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$ 对一切 $n\in \boldsymbol{N}_+$ 都成立. $\therefore$数列$\{a_n\}$是等差数列，$\therefore p$ 又是 q 的必要条件.

综上所述，p 是 q 的充要条件，即$\{a_n\}$为等差数列的充要命件是 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

解题回顾:本题是在原有知识的基础上建构新的知识即充分条件和必要条件问题,这也是等差数列的一个重要性质.这种研究问题的方法正是新课标所倡导的方法,温故而知新,要学会探索问题、研究问题,归纳总结出一般规律.从命题的角度看,这是一对互为逆命题问题.所以在平时学习中要善于换个角度思考问题,要善于进行解题的反思与回顾,不仅要总结方法与得失,还要研究更换命题条件和结论后,新命题是否成立.正如本题就是一个典型问题.

知识网络梳理
ZHI SHI WANG LUO SHU LI

1. 有关概念

一般地,如果 $p\Rightarrow q$,那么称 p 是 q 的充分条件,同时称 q 是 p 的必要条件;如果 $p\Rightarrow q$,且 $q\Rightarrow p$,那么称 p 是 q 的充分必要条件,简称为 p 是 q 的充要条件,记作 $p\Leftrightarrow q$;如果 $p\Rightarrow q$,且 $q\nRightarrow p$,那么称 p 是 q 的充分不必要条件;如果 $p\nRightarrow q$,且 $q\Rightarrow p$,那么称 p 是 q 的必要不充分条件;如果 $p\nRightarrow q$,且 $q\nRightarrow p$,那么称 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

2. 判断充分条件、必要条件、充要条件的方法和应注意的问题

(1)充分而不必要条件、必要而不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件反应了条件 p 和结论 q 之间的因果关系,在结合具体问题进行判断时,要采用以下方法:

①确定条件 p 是什么,结论 q 是什么;

②尝试从条件推结论,如果 $p\Rightarrow q$,则充分性成立,p 是 q 的充分条件;

③再考虑从结论推条件,如果 $q\Rightarrow p$,则 q 是 p 的充分条件,p 是 q 的必要条件,必要性成立;

④要证明命题的条件是充要的,既要证明原命题成立,又要证明它的逆命题成立,证明原命题成立即证明了条件的充分性,证明逆命题成立即证明了条件的必要性.

(2)对于充要条件,要熟悉它的同义词语

在解题时常常遇到与充要条件同义的词语,如"当且仅当","必须且只需","等价于","……反过来也成立".准确地理解和使用数学语言,对理解和把握数学知识是十分重要的.

名师点拨
MING SHI DIAN BO

例 (1)设甲、乙、丙是三个命题,如果甲是乙的充要条件,丙是乙的充分不必要条件,那么 ( )

A. 丙是甲的充分不必要条件

B. 丙是甲的必要不充分条件

C. 丙是甲的充要条件

D. 丙既不是甲的充分条件,也不是甲的必要条件

(2)已知命题 $p:a^{|x|}-\dfrac{1}{a}>0\ (a>1)$;命题 $q:b^{\lg x^2}>1\ (0<b<1)$,那么 q 是 p 的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

思路分析:(1)利用充分条件、必要条件、充要条件的定义直接判断;(2)应把两命题都作等价变换,化成较简形式后再判断.

解:(1)由已知有乙⇔甲;丙⇒乙且乙$\nRightarrow$丙,于是有丙⇒乙⇒甲,但甲$\nRightarrow$丙(若甲⇒丙,则乙⇒甲⇒丙,这与乙$\nRightarrow$丙矛盾),所以丙是甲的充分非必要条件,故应选 A.

(2)$p:a^{-|x|}-\dfrac{1}{a}>0\Leftrightarrow a^{-|x|}>a^{1}\overset{a>1}{\Leftrightarrow}-|x|>-1\Leftrightarrow|x|<1\Leftrightarrow-1<x<1$.

$q:b^{\lg x^2}>1\overset{0<b<1}{\Leftrightarrow}\lg x^2<0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0,\\x^2<1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0,\\-1<x<1.\end{cases}$

$\therefore p$ 成立时,$x=0$,而 q 就不成立;当 q 成立时,$-1<x<0$ 或 $0<x<1$,一定有 p 成立,所以 q 是 p 的充分非必要条件.于是应选 A.

解题回顾:弄清充分条件、必要条件、充要条件的含义.在处理复杂问题,要先利用等价变换,再进行判断.等价变换是一种手段,化简易于判断才是目的.

(3)试证:一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根的充要条件是 $ac<0$.

思路分析:本题中一正根和一负根包含两层意思,首先是有根,其次是在有根的前提下,一根为正,一根为负.因此有:(1)$\Delta>0$,(2)$x_1x_2<0$,反之,如果上述两点成立,一根为正,一根为负.

解:必要性:由于方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根一负根,所以 $\Delta=b^2-4ac>0$,$x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$,所以

$ac<0$;

充分性:由 $ac<0$ 可推得

$\Delta=b^2-4ac>0$,及 $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$.

所以方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根,且两根异号. 即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根.

解题回顾:(1)证明充要条件,即证明命题的原命题和逆命题都成立. 证明充要性时一定要注意分类讨论,要搞清它的叙述格式,避免在论证时将充分性错当必要性证,而又将必要性错当充分性证.

(2)本例也可以结合二次函数的图象进行讨论.

水平自测 HUI PING ZI CE

1. “$a>2$ 且 $b>2$”是“$a+b>4$ 且 $ab>4$”的( )

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

2. 若 $x\in\mathbf{R}$,则 $(1-|x|)(1+x)$ 是正数的充要条件是 ( )

A. $|x|<1$ B. $|x|>1$

C. $x<1$ D. $x<1$ 且 $x\neq-1$

3. “p 是 q 的充分条件”是“p 是 q 的充分必要条件”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 不充分又不必要条件

4. 用符号“$\nRightarrow$”或“$\Rightarrow$”填空:

(1)$\sqrt{x}=\sqrt{4}$ __________ $x=4$;

(2)$x^2=4$ __________ $x=2$;

(3)$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{2}$ __________ $x^2-x+6=0$;

(4)$|x|=2$ __________ $x\in\{2,-2\}$;

(5)$x^3=8$ __________ $x^2=4$;

(6)$|x|=2$ __________ $x^2-x+6=0$.

5. 用“充分不必要条件”、“必要不充分条件”、“充要条件”或“既不充分又不必要条件”填空:

(1)“$A\subset B$”是“$A=B$”的__________;

(2)“$a=b$”是“$ac=bc$”的__________;

(3)“直线 l 平行于平面 α 内无数条直线”是“$l/\!/\alpha$”的__________;

(4)在三角形 ABC 中,“$\sin A=\sin B$”是“$A=B$”的__________.

6. 求证:关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为1的充要条件是 $a+b+c=0$.

7. 已知命题 p:$1-c<x<1+c$;命题 q:$x>7$ 或 $x<-1$ 且 p 是 q 的既不充分也不必要条件,求 c 的取值范围.

高考展望
AO KAO ZHAN WANG

例 (2006年湖南长沙)已知条件.

$p:\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$;条件 q:

$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$

若 p 是 q 的充分不必要条件,则实数 a 的取值范围是________.

(2)(2006·济宁模拟)

求证:关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 的两个负实根的充要条件是 $m\geqslant 2$.

思路分析:首先,确定条件 p 是什么,结论 q 是什么;其次,尝试从条件推结论,如果 $p\Rightarrow q$,则充分性成立,p 是 q 的充分条件,再考虑从结论推条件,如果 $q\Rightarrow p$ 则 q 是 p 的充分条件,p 是 q 的必要条件,必要性成立,即 p 是 q 的充要条件;如果 p 是 q 的充分不必要条件,则满足 $p\Rightarrow q$,$q\not\Rightarrow p$.

解:(1)$p:\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$,$q:a\leqslant x\leqslant a+1$

∵p 是 q 的充分不必要条件.

∴$p\Rightarrow q$ 即 $\{x|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\}\subsetneqq\{x|x\leqslant x\leqslant a+1\}$

等价于 $\begin{cases}a\leqslant\frac{1}{2},\\a+1\geqslant 1,\end{cases}$ 解得:$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,答案$[0,\frac{1}{2}]$.

(2)①充分性:因为 $m\geqslant 2$,所以 $\Delta=m^2-4\geqslant 0$.

方程 $x^2+mx+1=0$ 有实根.

设 $x^2+mx+1=0$ 的两个实根为 x_1,x_2,由根与系数的关系知 $x_1\cdot x_2=1>0$,所以 x_1,x_2 同号.

又因为 $x_1+x_2=-m\leqslant -2$,所以 x_1,x_2 同为负数,充分性得证.

②必要性:因为 $x^2+mx+1=0$ 的两个根 x_1,x_2 均为负,且 $x_1\cdot x_2=1$,$\Delta>0$,所以 $m\geqslant 2$ 或 $m<-2$,所以 $m-2=-(x_1+x_2)-2=-(x_1+\frac{1}{x_1})-2=-\frac{x_1^2+2x_1+1}{x_1}=-\frac{(x_1+1)^2}{x_1}\geqslant 0$.

故 $m\geqslant 2$,必要性得证.

综上知:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个负实根的充要条件是 $m\geqslant 2$.

解题回顾:(1)从集合观点来看,满足条件 p 的元素构成集合 A,满足条件 q 的元素构成集合 B,$A\subsetneqq B$,则 p 是 q 的充分不必要条件.

(2)证明充要条件,即证明命题的原命题和逆命题都成立,若遇求解充要条件问题,需要注意的是,在每一步变形、转化过程中,都必须是等价的,即能相互推出.

能力提升
NENG LI TI SHENG

1. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_n>0$,则"数列$\{a_n\}$为等比数列"是"数列$\{\lg a_n\}$为等差数列"的 ( )
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分又不必要条件
2. (2006年湖南卷)"$a=1$"是"函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间$[1,+\infty]$上为增函数"的 ( )
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分又不必要条件
3. (2006年安徽卷)设 $a,b\in\mathbf{R}$,已知命题 $p:a=b$,命题 $q:(\frac{a+b}{2})^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$,则 p 是 q 成立的 ( )
   A. 必要不充分条件
   B. 充分不必要条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分又不必要条件
4. "$ab<0$"是"$4a^2-4ab+b^2>0$"的________条件.
5. 现有下列命题:
   ①只要有条件 M,N 就一定成立,则 M 是 N 成立的充分条件;
   ②N 成立,不一定要有条件 M,则 M 不是 N 成立的必要条件;
   ③没有条件 M,N 就一定不成立,则 M 是 N 成立的必要条件;
   ④有条件 M,N 不一定成立,则 M 不是 N 成立的充分条件.
   命题中正确的命题是________.
6. 在下列表中指出 A 是 B 成立的什么条件:(选填:"充分不必要条件"、"必要不充分条件"、"充要条件"、"既不充分又不必要条件").

A	B	判断结果
两直线不相交	两直线异面	
$ab=0$	$a^2+b^2=0(a,b\in\mathbf{R})$	
$P\neq Q$(P、Q为集合)	$P\cap Q\subsetneqq P\cup Q$	
$b^2=ac$	a、b、c成等比数列	
$x>y$且$xy>0$	$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$	
$\alpha+\beta>2$且$\alpha\beta>1$	$\alpha>1$且$\beta>1$	
$x<1$	$x\leqslant 2$	
$\alpha=\beta$	$\tan\alpha=\tan\beta$	
两条直线$F(x,y)=0$和$G(x,y)=0$相交于点$p(x_0,y_0)$	曲线$F(x,y)+\lambda G(x,y)=0$(λ为常数)过点$p(x_0,y_0)$	
$A+B+C=180^\circ$	A、B、C为一个三角形的三个内角	

7. 设数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=p^n+q(p\neq 0$且$p\neq 1)$，求数列$\{a_n\}$成等比数列的充要条件.

第三课时　充分条件和必要条件(2)

问题情景设置

EN TI QING JING SHE ZHI

题目：研究一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根的分布情况. 求关于x的方程$x^2+(2k-1)x+k^2=0$的两个实根均大于1的充要条件. 根据下列解答过程再回答问题.

由题意$\begin{cases}(2k-1)^2-4k^2\geqslant 0,\\-(2k-1)>2,\\k^2>1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\leqslant\frac{1}{4},\\k<-\frac{1}{2},\\k>1,或k<-1.\end{cases}$

$\therefore k<-1$.

(1)上述解法是对还是错？为什么？

(2)如果原解法有错误，错误的原因是什么？

(3)根据你的判断，再给出正确的解法.

解析：(1)原解法是错误的，如反例$k=-2$时，方程为$x^2-5x+4=0$，两根为$x_1=1$，$x_2=4$，故$k<-1$不是所求的充要条件.

(2)错误原因是$\begin{cases}x_1>1,\\x_2>1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2>2,\\x_1x_2>1.\end{cases}$将其用于解题，用“必要条件”替代“充要条件”，这是因为$\begin{cases}x_1>1,\\x_2>1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2>2,\\x_1x_2>1,\end{cases}$为真命题，

但$\begin{cases}x_1+x_2>2,\\x_1x_2>1.\end{cases}\nRightarrow\begin{cases}x_1>1,\\x_2>1.\end{cases}$

(3)给出下列正确解法：

解：$\Delta=(2k-1)^2-4k^2\geqslant 0$，$\therefore k\leqslant\frac{1}{4}$. 设方程两根为$x_1$，$x_2$. $\therefore x_{1,2}=\frac{-(2k-1)\pm\sqrt{1-4k}}{2}$，

$\because$两根都大于1的充要条件是

$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\小根大于1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\leqslant\frac{1}{4},\\\frac{-(2k-1)-\sqrt{1-4k}}{2}>1.\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k\leqslant\frac{1}{4},\\ \sqrt{1-4k}<-2k-1.\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}k\leqslant\frac{1}{4},\\ -2k-1>0,\\ 1-4k<(-2k-1)^2.\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k\leqslant\frac{1}{4},\\ k<-\frac{1}{2},\\ 4k^2+8k>0,\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}k<-\frac{1}{2},\\ k>0\text{ 或 }k<-2,\end{cases}$

解得 $k<-2$.

所求的充要条件为 $k<-2$.

解题回顾:有关充要条件探求的问题中,易犯的解题错误是用"必要条件"或"充分条件"替代"充要条件",因此要进一步理解学习充要条件的目的,即准确把握"若 p 则 q"的命题中的条件和结论的逻辑关系,提高正确进行数学判断的能力.

知识网络梳理
HI SHI WANG LUO SHU LI

1. 正确判断充分条件、必要条件、充要条件

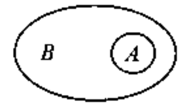
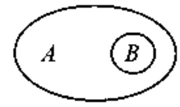
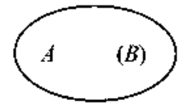
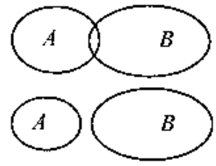
(1)从逻辑关系上,关于充分不必要条件、必要不充分条件、充分必要条件、既不充分也不必要条件的判定.

条件 p 与结论 q 的关系	结论
$p\Rightarrow q$,但 $q\not\Rightarrow p$	p 是 q 成立的充分而不必要条件
$q\Rightarrow p$,但 $p\not\Rightarrow q$	p 是 q 成立的必要而不充分条件
$p\Rightarrow q$,$q\Rightarrow p$,即 $p\Leftrightarrow q$	p 是 q 成立的充分条件
$p\not\Rightarrow q$,$q\not\Rightarrow p$	p 是 q 成立的既不充分也不必要条件

证明"p 是 q 的充要条件"时,充分性应证明 $p\Rightarrow q$,必要性应证明 $q\Rightarrow p$;证明"p 的充要条件是 q"时,充分性应证明 $q\Rightarrow p$,必要性应证明 $p\Rightarrow q$. 这是充要条件证明问题中最常见的两类情形,要仔细把握两者的区别与联系.

(2)从集合的观点上,关于充分不必要条件、必要不充分条件、充分必要条件、既不充分也不必要条件的判定.

首先建立与 p、q 相应的集合,即 p:$A=\{x\mid p(x)\}$,q:$B=\{x\mid q(x)\}$.

若 $A\subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件,若 $A\subsetneqq B$,则 p 是 q 的充分非必要条件	
若 $B\subseteq A$,则 p 是 q 的必要条件,若 $B\subsetneqq A$,则 p 是 q 的必要非充分条件	
若 $A=B$,则 p,q 互为充要条件	
若 $A\not\subseteq B$,且 $B\not\subseteq A$,则 p 既不是 q 的充分条件,也不是 q 的必要条件	

一般地,关于充要条件的判断主要有以下几种方法:

(1)定义法:直接利用定义进行判断

(2)等价法:"$p\Leftrightarrow q$"表示 p 等价于 q,等价命题可以进行转换,当我们要证明 p 成立时,就可以去证明 q 成立. 这里要注意"原命题$\Leftrightarrow$逆否命题"、"否命题$\Leftrightarrow$逆命题"只是等价形式之一,对于条件或结论是不等式关系(否定式)的命题一般应用等价法.

(3)利用集合间的包含关系进行判断:如果条件 p 和结论 q 都是集合,那么若 $p\subseteq q$,则 p 是 q 的充分条件;若 $p\supseteq q$,则 p 是 q 的必要条件,若 $p=q$,则 p 是 q 的充要条件.

2. 注意点

(1)从讨论充分条件、必要条件和充要条件的角度,讨论"若 p 则 q"的命题中的条件和结论的逻辑关系时,要理解这些概念及意义. 若 $\neg p\Rightarrow\neg q$,且 $\neg q\not\Rightarrow\neg p$,则 p 是 q 成立的必要不充分条件,$\neg p$ 是 $\neg q$ 的成立的充分非必要条件;若 $q\Rightarrow p$ 且 $\neg q\Rightarrow\neg p$,则 p 是 q 成立的充要条件.

(2)会判断条件的充分性和必要性,会探求充要条件、充分不必要条件及必要不充分条件.

(3)能自觉地运用充要条件解决有关问题,特别是求解取值范围问题.

M 名师点拨
ING SHI DIAN BO

例 已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=$