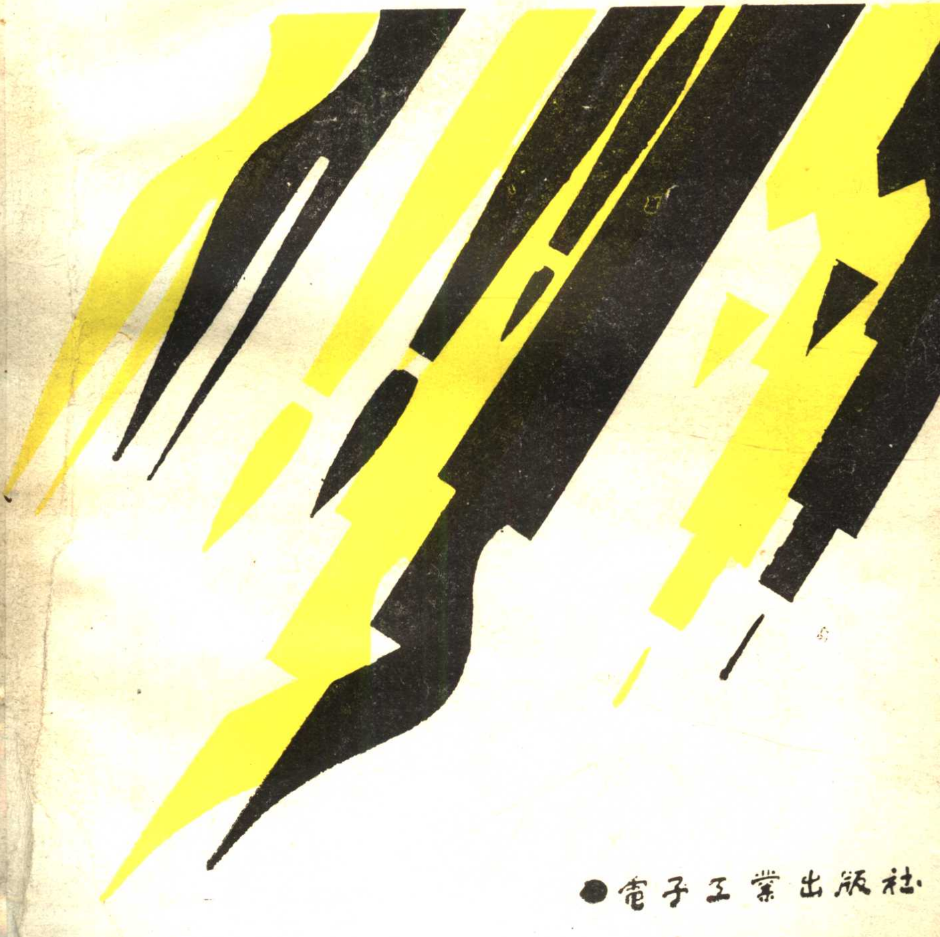
●青年学习辅导丛书

高中数学学习指导

●高中数学编写组　编



●電子工業出版社

青年学习辅导丛书

高中数学学习指导

高中数学编写组编写

内 容 提 要

本书是为指导青年学习高中数学而编写的，本书参考了目前所用的高中数学的各册教科书，分代数、三角、立体几何、解析几何和综合练习五篇，每章中又安排有知识要点、例题选编和练习题三部分，书中概念清楚，内容安排合理，讲解深入透彻，不失为广大自学青年和中学师生的一本很有实用价值的参考书。

青年学习辅导丛书

高中数学学习指导

高中数学编写组编

责任编辑：洋　溢

电子工业出版社出版　（北京海淀区万寿路）

电子工业出版社发行　各地新华书店经销

山东电子工业印刷厂印刷（淄博市周村）

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：18.375 字数：412 千字

1988年12月第一版　1988年12月第一次印刷

印数：1—10530册　定价：4.50元

ISBN7-5053-0390-2/G·53

前　言

本书参考了目前高中数学各册教科书，按代数、三角、立体几何、解析几何分篇章编写的，每一章中安排有知识要点、例题选编、练习与习题三部分。

知识要点向读者阐明了应该掌握的知识内容，剖析了知识的内涵，揭示了各部分知识的内在联系。

例题选编向读者列举了各种类型的例题，它不仅向读者提供了信息，也开扩了读者的眼界。

练习与习题为读者提供了少、精、活的一组习题，它狠抓了双基训练，重在培养读者的能力。

这册书的特点是紧扣大纲，突出双基，联系高考，培养能力。

为了便于读者使用，本书附有部分练习和习题的答案或指示供读者参考。

参加本书编写的有北京市东城区，西城区，海淀区，朝阳区，丰台区的数学教师王建民、任光辉、周沛耕、苏陈耀、志鸣道、李寅荣、戴志年、邴福林、据春华、李冰、郑学逻等 。

诚恳欢迎广大读者对本书提出意见和建议。

编　者

目　录

第一篇　代数部分

第二篇　三角函数

第三篇　立体几何

第四篇　平面解析几何

第五篇　综合练习

第一篇　代数部分

第一章　初中代数知识的回顾

数学是系统性很强的学科，把初中代数的主要内容进行一些必要的复习，对学好高中数学是十分有益的。

本章知识要点

1．系数表

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数——正分数和负分数
  - 无理数——无限不循环小数

几个数集的记号：实数集 R，有理数集 Q，整数集 Z，自然数集 N。它们之间的关系是：$R\supset Q\supset Z\supset N$。有理数是一切形如$\frac{n}{m}$的数($m$、$n\in Z$，$m\neq 0$)，实数集与数轴上的点集是一一对应的。

2．实数的几个简单性质

（1）若a是实数，则 $a^2\geqslant 0$；$|a|\geqslant 0$；若 $a\geqslant 0$，则 $\sqrt{a}\geqslant 0$。即a^2、$|a|$、$\sqrt{a}$是非负数。

（2）有限个非负数之和为零，则每个非负数都等于零，

即

如果 $a^2+b^2=0$，那么 $a=b=0$，$(a、b\in R)$；

如果 $|a|+|b|=0$，那么 $a=b=0$，$(a、b\in R)$；

如果 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$，那么 $a=b=0$，$(\sqrt{a}、\sqrt{b}\in R)$。

（3）算术根和绝对值

在实数集中，正数 a 的正的方根叫做算术根；零的算术根是零，a 的 n 次算术根记作 $\sqrt[n]{a}\,(a\geqslant 0)$。

算术平方根与绝对值有如下重要关系：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a<0)。\end{cases}$$

（4）如果 $a_1、a_2、b_1、b_2\in Q$，$\sqrt{c}$ 是无理数，那么，$a_1+b_1\sqrt{c}=0$ 的充要条件是 $a=b=0$；$a_1+b_1\sqrt{c}=a_2+b_2\sqrt{c}$ 的充要条件是 $a_1=a_2$ 且 $b_1=b_2$。

3．因式分解

把一个多项式化成几个既约多项式的积的过程叫做多项式的因式分解，因式分解是在指定数集内进行的，如果不加任何说明，是指在有理数集内进行分解。在不计非零常数因子的条件下，因式分解是唯一的。在熟练掌握提取公因式法、公式法、分组分解法这三种基本方法后，还应注意几种特殊方法：十字相乘法，配方法，求根分解法，待定系数法等。对于利用余数定理、因式定理及综合除法分解整系数一元 n 次多项式的方法，也应当有所了解。

4．指数和对数

正整数指数幂　$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n个}$，$(a\in R，n\in N)$

零指数幂　　$a^0=1$　　$(a\neq 0)$

负整数指数幂　　$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$　　$(a\neq 0,\ n\in N)$

分数指数幂　　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　　$(a\geqslant 0,\ n>1,\ n、m\in N)$

$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　　$(a>0,\ n>1,\ n、m\in N)$

无理数指数幂　a^α ($a>0$，α 是一个无理数时，a^α 是一个确定的实数。

当指数扩展到实数时，仍有以下运算法则：

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；$(a^m)^n=a^{mn}$；$(ab)^n=a^nb^n$ $(a>0,\ b>0,\ m、n\in R)$

对数定义：如果 $a^b=N(a>0,\ a\neq 1)$，那么 b 叫做以 a 为底的 N 的对数，记作 $\log_a N=b$。

对数恒等式：$a^{\log_a N}=N$

对数的运算法则：$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N;$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N;$$

$$\log_a M^n=n\log_a M;\ (n\in R)$$

$$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M;\ (n\in N,\ n>1)$$

对数换底公式　$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$．$(a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1,\ N>0)$

自然对数：以无理数 $e=2.71828\cdots$ 为底的对数叫做自

然对数，$\log_e N$ 简记为 $\ln N$。

常用对数：以10为底的对数叫做常用对数，记作 $\lg N$，一个正数的常用对数可分为首数（整数）和尾数（正的纯小数或零）两部分，把已知正数 N 写成 $a\times 10^n$ 的形式（其中 $1\leqslant a<10$），n 是整数，那么 n 就是 $\lg N$ 的首数，只有小数点位置不同的数，它们的对数尾数都相同。

5. 方程

掌握整式方程、分式方程、无理方程、简单的高次方程以及一次方程组，二元二次方程组的解法。注意含有参数的方程的讨论及列方程（组）解应用题；注意解分式方程和无理方程必须验根；注意解对数方程可能产生增根或减根，必须验根并设法避免减根。通过同解变形或换元法，把多元转化为一元，把高次转化为低次，把无理方程转化为有理方程。消元、降次、有理化这是解方程（组）的总方向。

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 当判别式 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时，求根公式是 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ （a、b、$c\in R$）。

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根。（有两个共轭虚根是 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$）

根与系数的关系：如果 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的两个根，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ 且 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$。

以上命题的逆命题也成立。

初中数学是高中数学的基础，许多数学概念、公式以及数学方法，都是从初中开始引入，到高中才逐步完善的。下面我们对贯穿于初高中数学，并起着重要作用的一些数学概念和数学方法进行分类总结。

1. 算术根和绝对值

例1 判断下列各式化简结果是否正确：

(1) $\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}\ (0<x<1)=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=x-\frac{1}{x}$；

(2) $\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}28-\log_{\frac{1}{2}}7)^2}=\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}4)^2}$

$=\log_{\frac{1}{2}}4=-2$；

(3) $\sqrt{\cos^2x-4\cos x+4}=\sqrt{(\cos x-2)^2}=\cos x-2$)；

(4) $\sqrt{-a-b-2\sqrt{ab}}\ (b<a<0)=\sqrt{(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})^2}$

$=\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$；

(5) $\sqrt{a^{2n}-2+a^{-2n}}\ (0<a<1,\ n>0)$

$=\sqrt{(a^n-a^{-n})^2}=a^n-a^{-n}$。

解：

(1)不正确，由 $0<x<1$ 得 $x<\frac{1}{x}$，$x-\frac{1}{x}<0$。正确答案是 $\frac{1}{x}-x$。

(2)不正确 $\log_{\frac{1}{2}}4<0$，正确答案是 $-\log_{\frac{1}{2}}4=2$。

（3）不正确，因为 $\cos x<2$，所以答案是 $2-\cos x$。

（4）不正确，因为 $b<a<0$，所以 $-b>-a>0$，因而正确答案是$\sqrt{-b}-\sqrt{-a}$。

（5）不正确。由 $0<a<1$，有 $\frac{1}{a}>a>0$；$\left(\frac{1}{a}\right)^n>a^n$，即 $a^{-n}-a^n>0$。正确答案是 $a^{-n}-a^n$。

上述例题经过变形，都可化为$\sqrt{a^2}$的形式，并且在所给条件下，确定 a 的正负，进而化简，如果所给条件不能确定 a 的正负，则应分区间进行讨论。

例 2　化简　$y=\sqrt{(x+2)^2}+|x-2|$

解：当 $x<-2$ 时，$x+2<0$，$x-2<0$，函数化成 $y=-2x$；

当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$x+2\geqslant 0$，$x-2<0$，函数化成$y=4$；

当 $x>2$ 时，$x+2>0$，$x-2>0$，函数化成 $y=2x$。

$$\therefore\quad y=\begin{cases}-2x & (x<-2),\\ 4 & (-2\leqslant x\leqslant 2),\\ 2x & (x>2)。\end{cases}$$

例 3　设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，化简 $y=(\cos\theta)^{|\log_{\cos\theta}x|}$

解：$\because$　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，　$0<\cos\theta<1$，

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$\log_{\cos\theta}x>0$，$y=(\cos\theta)^{\log_{\cos\theta}x}=x$；

当 $x>1$ 时，$\log_{\cos\theta}x<0$，$y=(\cos\theta)^{-\log_{\cos\theta}x}=\frac{1}{x}$。

$$\therefore\quad y=\begin{cases}x & (0<x\leqslant 1)\\ \frac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$$

在初中学习根式化简时，曾规定字母取正值，回避了一些字母讨论的难点，但是，随着知识的扩充及进一步学习的需要，算术根与绝对值的化简中对字母的讨论，必须引起高度重视，算术根的化简，可以说是一个带有全局性的重要概念，要深刻理解$\sqrt{a^2}$与$|a|$的一致性及讨论方法。在实数范围内，去掉绝对值号及二次根号常用的方法是分区讨论法和平方法。要善于根据具体题目的需要，采取适当的处理方法。

2．配方法及其应用

把二次三项式 ax^2+bx+c 配成一个完全平方式与一个常数(可能是零)的和的形式，$a(x+m)^2+n$，这种方法叫做配方法。它在因式分解、根式化简、解方程或解不等式以及研究二次函数的性质等方面有着广泛的应用。不等式证明、三角函数式恒等变形、解析几何中坐标变换，方程讨论以及二次曲线性质的研究等等，也都离不开配方法这个重要工具。

（1）配方法在因式分解中的应用

因式分解最常用的方法是提取公因式　、公式法及分组分解法。但有一些多项式的因式分解需要分组配方，然后才能继续用公式进行分解。例如 $x^2-4xy+4y^2-4z^2$，前三项是一个完全平方式，配方得 $(x-2y)^2-(2z)^2$，再用平方差公式继续分解。

例1　分解因式：

(1) x^4+4；　　　　(2) $x^4+x^2y^2+y^4$；

(3) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$。

解：（1）加减项化为 $x^4+4x^2+4-4x^2$，配方得$(x^2+$

$2)^2-(2x)^2$ 再用平方差公式分解。

(2)分裂中项，化为 $x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$，分组配方得 $(x^2+y^2)^2-x^2y^2$，再用公式分解。

(3)利用公式 $(a+b+c)^2=a^2+b+c^2+2ab+2ac+2bc$。

$$\begin{aligned}原式&=(x^2+y^2-z^2)^2-4x^2y^2\\&=(x^2+y^2-z^2-2xy)(x^2+y^2+2xy-z^2)\\&=[(x-y)^2-z^2][(x+y)^2-z^2]\\&=(x-y+z)(x-y-z)(x+y+z)(x+y-z)\end{aligned}$$

例2　已知 x、y、z 都是实数，并且 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，求证 $y=\frac{x+z}{2}$。

证明：由已知展开得

$$x^2-2xz+z^2-4xy+4y^2+4xz-4yz=0,$$

重新分组配方得

$$(x+z)^2-4y(x+z)+4y^2=0,$$

$\therefore\quad (x+z-2y)^2=0,$

$\because\quad x$、y、z 都是实数

$\therefore\quad x+z-2y=0,$

$\therefore\quad y=\frac{x+z}{2}$

(2)配方法在根式化简中的应用

例1　化简 $\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$

解：$\because\quad \sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1^2}$

$$=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}=\sqrt{5}+1$$

$\therefore$原式$=\sqrt{8-2(\sqrt{5}+1)}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$。

例2　已知$\sqrt{11-6\sqrt{2}}$的整数部分是a，小数部分为b，求 $a^2+b^2+1-2ab+2a-2b$ 的值。

解：$\because$　$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{9\times2}}=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$

$=3-\sqrt{2}$。

$\therefore$整数部分 $a=1$，小数部分　$b=(3-\sqrt{2})-1=2-\sqrt{2}$，

$\therefore$　$a^2+b^2+1-2ab+2a-2b=(a-b)^2+2(a-b)+1$

$=(a-b+1)^2=[1-(2-\sqrt{2})+1]^2=2$。

（3）配方法在解方程中的应用

配方法是推导一元二次方程求根公式的主要依据，而且配方法也是解一元二次方程的基本方法之一。对于一些特殊类型的方程，也需要用配方法解。

例　设 $\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a 8+\log_a x+\log_a y$，求实数 x、y 的值。

解：原方程化为

$$\log_a(x^2+1)(y^2+4)=\log_a 8xy$$

$\therefore$　　$x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$，

把 $-8xy$ 拆成 $-4xy-4xy$，再分组配方，得

$$(xy-2)^2+(2x-y)^2=0,$$

$\because$　　　　x，$y\in R$

$\therefore\quad xy-2=0$ 且 $2x-y=0$,

$\therefore\quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2, \end{cases}$

检验，舍去 $x=-1$，$y=-2$，答：$x=1$，$y=2$。

(4) 配方法在不等式中的应用

例 解不等式：

(1) $x^2-4x+12>0$； (2) $x^2-4x+12<0$

解：(1)因为 $x^2-4x+12=(x-2)^2+8>0$ 对一切实数 x 都成立，所以 $x^2-4x+12>0$ 的解是全体实数。

(2)因为 $x^2-4x+12>0$ 对一切实数 x 都成立，所以 $x^2-4x+12<0$ 无解。

例 2 求证 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\geqslant 0$。($a$、$b$、$c\in R$

证明：$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)$$

$$=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)]$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2],$$

$\because\quad a$、b、$c\in R$

$\therefore\quad (a-b)^2\geqslant 0$，$(a-c)^2\geqslant 0$，$(b-c)^2\geqslant 0$，

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\geqslant 0$。

(5) 配方法在研究二次函数中的应用

用配方法把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 化成 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，从而求出顶点坐标、对称轴

方程、极值、增减区间，这是二次函数的基本问题。形如 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的最大值与最小值，采用配方法比较简便。运用配方法结合韦达定理研究二次函数的有关性质时，常用的几种配方变形有：

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2-4x_1x_2};$$

$$(x_1、x_2\in R)$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)。$$

熟练地运用这些变形方法，将给解题带来许多方便。

例1　a 为何实数时，函数 $y=x^2+ax+a-z$ 的图象与 x 轴两个交点间的距离最小？并求最小值。

解：$\because$　$\Delta=a^2-4(a-2)=(a-2)^2+4>0$ 对 $a\in R$ 总成立。

$\therefore$　抛物线与 x 轴总有两个不同交点 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$

$\therefore$　两个交点间的距离是

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{a^2-4(a-2)}=\sqrt{(a-2)^2+4},$$

$\therefore$　$a=2$ 时，距离最小值是2。

例2　实数m取何值时，方程 $x^2-(m-2)x+m^2-3m+2=0$ 两个实根的平方和取得最大值与最小值。

解：设方程两根为 x_1、x_2，

$\therefore$　$x_1+x_2=m-2,\qquad x_1x_2=m^2-3m+2$

$$\therefore\quad x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

$$=(m-2)^2-2(m^2-3m+2)$$

$$=-m^2+2m=-(m-1)^2+1。$$