

新课标 新教材



导学导练

数学

必修 4

(配人教版)

丛书主编 金鹰



安徽大学出版社

新课标 新教材

导学导练

数 学

必修 4 (配人教版)

本册主编	张中发	孙勇军	
编写人员	进 一	孙勇军	张中发
	李 斌	苗 勇	高 歌
	舜之臣		

安徽大学出版社

新课标 新教材 导学导练

数学必修4(配人教版)

丛书主编 金鹰

出版发行 安徽大学出版社(合肥市肥西路3号 邮编 230039)

联系电话 编辑室 0551-5108438

发行部 0551-5107784

电子信箱 ahdxcchps@mail.hf.ah.cn

责任编辑 鲍家全 王先斌 朱夜明

封面设计 孟献辉

印 刷 合肥现代印务有限公司

开 本 787×1092 1/16

总 印 张 30

总 字 数 703 千

版 次 2006 年 12 月第 1 版

印 次 2006 年 12 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-81110-243-9 / G·421

总 定 价 41.00 元(共 3 册)

如有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

前 言

春生夏长,秋收冬藏。我们的努力,赢得了广大读者热情的赞扬。愿《新课标 新教材 导学导练》成为你腾飞的翅膀!

“如切如磋,如琢如磨。”这套丛书是我们研讨、交流、推敲、合作的结晶。我们的作者队伍中,有课程与教学研究专家,有重点中学教学经验丰富、成绩突出的骨干教师。长期的课程改革研讨和教学经验交流,使我们形成一支思维开放、锐意进取、团结合作的编写队伍。

“鸳鸯绣出从教者,莫把金针度与人。”尽管我们付出了巨大的劳动,但是我们还不放自诩我们的作品便是“度人金针”。我们只是本着“春蚕吐丝”的精神,将我们研究和教学的心得,拿出来与朋友们分享。在科学面前,按新课标的要求,我们永远是探索者,只是我们永远不会停下探索的脚步。我们愿意与广大朋友们共享探索、进取的喜悦。

朋友们,你们是学习的主体。在学习中,培养创新精神和实践能力,提高综合素质,主动地、生动活泼地学习,促进全面发展,这就是新课标的要求和方向。

《导学导练》突出新课标的要求与方向:在栏目的安排、材料的选择、例题的配置、习题的设计等方面努力体现这一要求和方向。

《导学导练》保持与既有教学方式的衔接:不忽视基本知识的介绍;突出知识的内在联系和重难点的讲解;注重课后练习和单元检测。

《导学导练》最大程度地方便广大师生使用。每一种都是分两次印装:“导学导练”部分,包括知识网点、重难点、能力导航、知识拓展、典型例题、课时练习或周练等,以 16 开印装;“单元检测”部分,包括单元卷和练合卷,以 8 开印装,活页形式。

“路漫漫其修远兮,吾将上下而求索。”朋友们,让我们努力探索,相互交流,携手共进,迎接美好的明天。

金鹰

2006 年 12 月

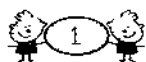


第一章 三角函数

- 1.1 任意角和弧度制 1
 - 1.1.1 任意角 1
 - 1.1.2 弧度制 5
- 1.2 任意角的三角函数 9
 - 1.2.1 任意角的三角函数 9
 - 1.2.2 同角三角函数基本关系 13
- 1.3 三角函数的诱导公式 18
- 1.4 三角函数的图像及性质 23
 - 1.4.1 正弦函数、余弦函数的图像 23
 - 1.4.2 正弦函数、余弦函数的性质 29
 - 1.4.3 正切函数的图像与性质 35
- 1.5 函数 $y=A \cdot \sin(\omega x+\varphi)$ 的图像 41
- 1.6 三角函数模型的简单应用 47

第二章 平面向量

- 2.1 平面向量的实际背景及基本概念 51
 - 2.1.1 向量的物理背景与概念 51





- 2.1.2 向量的几何表示 51
- 2.1.3 相等向量与共线向量 56
- 2.2 平面向量的线性运算 61
 - 2.2.1 平面向量加法运算及几何意义 61
 - 2.2.2 平面向量减法 64
 - 2.2.3 实数与向量的乘积及几何意义 67
- 2.3 平面向量的基本定理及坐标表示 72
 - 2.3.1 平面向量基本定理 72
 - 2.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示 76
 - 2.3.3 平面向量的坐标运算 76
 - 2.3.4 平面向量共线的坐标表示 80
- 2.4 平面向量数量积 84
 - 2.4.1 平面向量的物理背景及其含义(1) 84
 - 2.4.1 平面向量的物理背景及其含义(2) 89
 - 2.4.2 平面向量数量积的坐标表示、模、夹角 93
- 2.5 平面向量应用举例 97
 - 2.5.1 平面几何中的向量方法 97
 - 2.5.2 向量在物理中的应用举例 101

第三章 三角恒等变换

- 3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 105
 - 3.1.1 两角差的余弦公式 105
 - 3.1.2 两角和与差的正弦、余弦、正切公式 109
 - 3.1.3 二倍角的正弦、余弦、正切公式 113
- 3.2 简单的三角恒等变换(一) 117
- 3.2 简单的三角恒等变换(二) 121



第一章 三角函数

§ 1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

初中所学的角的范围是 $[0^\circ, 360^\circ]$,而日常生活中经常能见到超过 360° 的角,如体操比赛中的旋转角为 540° 等.为了使三角学更加实用,有必要对角的范围进行推广,这是本节所研究的内容.



知识网点

1. 任意角
- 定义:
 - 静态定义(即初中平面几何中的角的定义)
 - 动态定义(即旋转定义)
 - 分类:
 - 按旋转方向可分为:正角、负角、零角
 - 按终边位置:象限角、轴线角
 - 应用:终边相同的角的表示



重/难/点/解/析

1. 任意角的定义:角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成图形.

注意:(1)角的范围不再限于 $0^\circ \sim 360^\circ$;(2)角的概念是通过角的绕边的运动来推广的,根据旋转方向,得到正角、负角和零角,由此我们应意识到角的终边位置的重要性;(3)当角的始边相同时,角相等,则终边也相同;终边相同,角不一定相等.

2. 象限角和轴线角

使角 α 的顶点与原点重合,始边与 x 轴非负半轴重合,终边落在第几象限,则称 α 是第几象限角;终边落在坐标轴上的角 α ,则称 α 为轴线角.注意:可以用集合来表示象限角和轴线角,但表示方法不唯一.

3. 终边相同的角

与角 α 终边相同的角为 $\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha (k \in \mathbb{Z})$,连同角 α ,可以构成集合: $A = \{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$.



典型例题

[例 1] 写出下列角的集合:

- (1)锐角 (2) 0° 到 90° 的角 (3)小于 90° 的角 (4)第一象限角 (5) $0^\circ \sim 90^\circ$

[解] (1) $\{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$ (2) $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ\}$ (3) $\{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$





$$(4) \{ \alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z} \} \quad (5) \{ \alpha | 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ \}$$

[评析] 这五种角既有区别又有联系,如锐角是小于 90° 的角,但小于 90° 的角不一定是锐角,还包括零角和负角.

[例 2] 试写出所有终边在直线 $y = -\sqrt{3}x$ 上的角的集合.

[分析] 角的终边是一条射线,而该题角的终边在一条直线上,所以,所求角有两部分组成.

[解] 所有终边在 $y = -\sqrt{3}x$ 上的角的集合是:

$$\begin{aligned} & \{ \alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 300^\circ, k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ \alpha | \alpha = 2k \cdot 180^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \alpha | \alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ \alpha | \alpha = 120^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

[评析] 注意将两个集合并成一个集合的方法.

[例 3] 在与角 10030° 终边相同的角中,求满足下列条件的角:

(1)最大的负角;(2)最小的正角;(3) $360^\circ \sim 720^\circ$ 的角

[分析] 先写出终边相同的角的一般形式,再求满足条件的整数 k 即可,其中最大的负角在 $-360^\circ \sim 0^\circ$ 之间,最小正角在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间.

[解] 与 10030° 终边相同的角的一般形式为: $\beta = k \cdot 360^\circ + 10030^\circ, k \in \mathbb{Z}$

(1)由 $-360^\circ < k \cdot 360^\circ + 10030^\circ < 0^\circ$, 得 $-10390^\circ < k \cdot 360^\circ < -10030^\circ$,

解得 $k = -28$, 故所求最大负角为 $\beta = -50^\circ$

(2)由 $0^\circ < k \cdot 360^\circ + 10030^\circ < 360^\circ$, 得 $-10030^\circ < k \cdot 360^\circ < -9670^\circ$,

解得 $k = -27$, 故最小正角为 $\beta = 310^\circ$

(3)由 $360^\circ < k \cdot 360^\circ + 10030^\circ < 720^\circ$, 得 $-9670^\circ < k \cdot 360^\circ < -9310^\circ$,

解得 $k = -26$, 故所求角为 $\beta = 670^\circ$

[评析] 注意终边相同的角的表示方法及满足条件的角的集合的表示方法.

[例 4] 已知 α 是第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角?

[分析] 先写出角 α 的集合, 再求 $\frac{\alpha}{2}$ 的集合, 最后再分析 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限.

[解] $\because \alpha$ 是第三象限角, $\therefore 180^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{即 } 90^\circ + 180^\circ \cdot k < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ + 180^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{当 } k=2n \text{ 时, 得 } 90^\circ + 360^\circ \cdot n < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

故 $\frac{\alpha}{2}$ 在第二象限.

$$\text{当 } k=2n+1 \text{ 时, 得 } 270^\circ + 360^\circ \cdot n < \frac{\alpha}{2} < 315^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

故 $\frac{\alpha}{2}$ 在第四象限.

[评析] 该题还可以通过单位圆来求, 如图 1-1, 可画出 $\frac{\alpha}{2}$ 所

在象限.

[例 5] 若集合 $A = \{ \alpha | k \cdot 180^\circ + 30^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$, 集合 $B = \{ \beta | k \cdot 360^\circ$

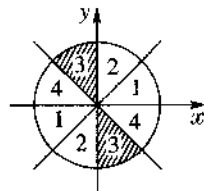


图 1-1



$-45^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}$, 求 $A \cap B$.

[分析] 求两个角集合的交集, 可以在直角坐标平面内分别画出集合 A 和集合 B 中角的终边所在区域(如图 1-2), 再求 $A \cap B$.

[解] 集合 A 中的角的终边在横线所表示的阴影内, 集合 B 中的角的终边在竖线所表示阴影内, 所以 $A \cap B = \{\alpha \mid 30^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 45^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$

[评析] 利用图形的直观性来解题, 是学习三角函数常用的方法.

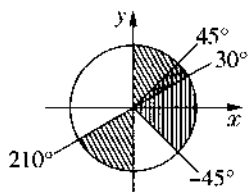


图 1-2



实践与探究

1. 给出下列四个命题: (1) -60° 是第四象限角; (2) 268° 是第三象限角; (3) 455° 是第二象限角; (4) -315° 是第一象限角, 其中正确的有: ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 若角 α 和 β 的关系 $\alpha + \beta = (2n+1) \cdot 180^\circ (n \in \mathbb{Z})$, 则角 α 和 β 的终边关于 ()

- A. x 轴对称 B. y 轴对称 C. 直线 $y=x$ 对称 D. 直线 $y=-x$ 对称

3. 已知角 2α 的终边在 x 轴下方, 则 α 是第 _____ 象限角 ()

- A. 二、四 B. 一、二 C. 二、三 D. 一、四

4. 已知角 α 和 β 的终边相同, 那么 $\alpha - \beta$ 终边在 ()

- A. x 轴的非负半轴上 B. y 轴的非负半轴上
C. x 轴的非正半轴上 D. y 轴的非正半轴上

5. 角 α 的终边与 -60° 角的终边相互垂直, 则角 α 的集合可表示为 _____.

6. 在 $160^\circ, 470^\circ, -960^\circ, -1600^\circ$ 这四个角中, 是第二象限角的是 _____.

7. 求终边在直线 $y=-x$ 上的角的集合.

8. 若 α 为小于 360° 的正角, 这个角的 6 倍角的终边与这个角的终边重合, 求角 α .

9. 若角 α 的终边所在直线过点 $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 且 $\alpha \in (-360^\circ, 360^\circ)$, 试求角 α .

10. 2003 年 10 月 15 日上午 9 时, 中国首位航天员杨利伟乘坐的“神舟五号”载人飞船, 在酒泉卫星发射中心用“长征二号”F 型运载火箭发射升空, 按预定轨道环绕地球十四圈, 在太空飞行 21 小时 18 分, 16 日 6 日 23 分, 在内蒙古中部地区成功着陆, 中国首次载人航天



飞行任务获得圆满成功. 设飞船在距地面 343 公里的太空中绕地球作匀速圆周运动, 90 分钟绕地球一周, 地球半径为 6738 公里, 计算:

(1) 飞船绕地球 14 周共转过的角度是多少?

(2) 在太空飞行中, 杨利伟与家人进行了一场特别的通话, 通话的时间持续 4 分 50 秒, 在这段时间内, 杨利伟所乘坐的飞船转过的角度是多少? 飞船走了多少公里? (不考虑其他因素)



知识拓展

平面三角史略(一)

勾股测量方面的卓越成就足以使古代中国比西方更早发明三角学. 但是, 由于中国古代缺乏角的正确概念, 三角学始终没能在中国产生.

三角学最早产生于古希腊. 此后, 印度、阿拉伯、欧洲都对三角学做出了不少贡献, 并最终使三角学成为一门独立的数学分支. 它的发展大体上可分为三个时期: 从远古到 11 世纪以前为第一期; 从 11 世纪到 18 世纪是第二期; 从 18 世纪到以后为第三期.

在第一期中, 只是用已知几何知识解决三角学内的一些问题, 如根据正多边形边长与外接圆半径的关系计算弧的长度等. 此时, 还没有角的函数概念, 没有提出三角形中的边角关系. 伊巴谷(Hipparchus, 约公元前 180~前 125)是三角学的开山鼻祖. 他是古希腊的天文学家, 为了天文观测的需要, 作了一个和如今三角函数表相仿的“弦表”, 就是在固定的圆内, 不同圆心角所对弦长的表. 西翁(Theon)告诉我们, 伊巴谷计算弦长的著作有 12 部之多, 并据说他还知道 $\sin(\alpha \pm \beta)$ 和 $\cos(\alpha \pm \beta)$ 的公式、三角形外接圆半径公式 $R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$ 和恒等式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 等.

公元 50 年左右, 希腊数学家海伦在三角形度量方面做了很多工作. 众所周知的海伦公式即是其中之一. 海伦研究了圆内接正多边形面积 S_n 和边长 a_n 之间的关系, 如

$$S_3 = \frac{13}{30}a_3^2, S_5 = \frac{5}{3}a_5^2 \text{ 或 } \frac{12}{7}a_5^2, S_6 = \frac{13}{5}a_6^2, S_7 = \frac{43}{12}a_7^2.$$

$$S_8 = \frac{29}{6}a_8^2, S_9 = \frac{81}{5}a_9^2 \text{ 或 } \frac{38}{6}a_9^2, S_{10} = \frac{15}{2}a_{10}^2, S_{12} = \frac{45}{4}a_{12}^2.$$

公元 100 年左右, 希腊天文学家梅内劳斯(Menelaus)在球面三角学方面做出了许多贡献, 和伊巴谷一样, 他也制作过弦表.





1.1.2 弧度制

函数的定义要求定义域和值域均是数集,而初中度量角的大小用的是角度制,用度来作为三角函数的定义域是不准确的,所以我们必须采用另外一种度量角的大小的方法,即弧度制.



知识网点

1. 度量角的大小 $\begin{cases} \text{角度制} \\ \text{弧度制} \end{cases}$
2. 角度制与弧度制之间的关系
3. 扇形的弧长公式与面积公式



重/难/点/解/析

1. 弧度制是以“弧度”为单位来度量角的单位制,而角度制是以“度”为单位来度量角的单位制.无论是“弧度”还是以“度”为单位,角的大小是一个与“半径”大小无关的定值.

2. 用“度”作单位度量角时,“度”(即“°”)不能省略,而以“弧度”作单位度量角时,“弧度”二字或“rad”通常省略不写.

3. 扇形的弧长与面积公式及其变形:

若扇形的圆心角为 α (α 为弧度制),半径为 r ,弧长为 l ,面积为 s ,则

$$l = r|\alpha|, s = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$$

其变形形式有: $|\alpha| = \frac{l}{r}, r = \frac{l}{|\alpha|}, |\alpha| = \frac{2s}{r^2}$ 等.



典型例题

[例1] (1) 已知四边形的四个内角之比为1:3:5:6,分别用角度制和弧度制将这些内角的大小表示出来;

(2) 将下列角转化为另一种形式表示:① -210° ② $\frac{7}{6}\pi$.

[分析] 本题主要考查角度制与弧度制的互化.

[解] (1) 设四边形四个内角分别为 $\alpha, 3\alpha, 5\alpha, 6\alpha$, 则 $\alpha + 3\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 360^\circ$.

$\therefore \alpha = 24^\circ$, 故四个内角大小为: $24^\circ, 72^\circ, 120^\circ, 144^\circ$.

又 $24^\circ = \frac{\pi}{180} \times 24 = \frac{2\pi}{15}$, $\therefore$ 用弧度制表示四个内角大小为: $\frac{2\pi}{15}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}$

(2) ① $-210^\circ = -210 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7\pi}{6}$, ② $\frac{7\pi}{6} = \frac{7}{6} \times 180^\circ = 210^\circ$.

[评析] 角度制与弧度制的换算的关键在于抓住“ $\pi = 180^\circ$ ”.

[例2] 已知锐角 α 终边上一点 $A(1,1)$, 则角 α 的弧度数为_____.

[分析] A 点在第一象限角平分线上, 即角 α 的终边是第一象限角平分线.

[解] $\alpha = \frac{\pi}{4}$





[评析] 知道角 α 终边的位置是解此题的关键.

[例 3] 已知扇形的面积为 25cm^2 , 当扇形的中心角为多少弧度时, 扇形的周长最小? 试求出此最小值?

[分析] 将扇形的周长表示为半径 r 的函数, 转化为求函数的最小值问题.

[解] 由扇形面积公式 $s = \frac{1}{2}lr$, $l = \frac{2s}{r} = \frac{50}{r}(\text{cm})$.

设扇形周长为 C , 则 $C = 2r + l = 2r + \frac{50}{r}$, 即

$2r^2 - Cr + 50 = 0$, 由题意知 r 必有解, 故 $\Delta = C^2 - 400 \geq 0$, 即 $C \geq 20$

$\therefore$ 周长的最小值为 20, 代入方程得: $2r^2 - 20r + 50 = 0$

得 $r = 5(\text{cm})$, 又由 $s = \frac{1}{2}|\alpha| \cdot r^2$, 得 $|\alpha| = 2\text{rad}$,

所以当扇形的中心角为 2rad 时, 扇形周长最小, 最小值为 20cm .

[评析] 若将该题改为“扇形周长为 20cm , 当扇形的中心角为多少弧度时, 扇形的面积最大? 并求出最大面积”, 应如何解答?

[例 4] 已知集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则()

A. $M = N$ B. $M \supsetneq N$ C. $M \subsetneq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

[分析] 找出集合 M, N 中的角的终边的位置是解决本题的关键.

[解] 对于 $M: x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2k\pi + \pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$,

所以其分子表示终边在 x 轴非正半轴的角的集合.

对于 $N: x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{k\pi + 2\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$,

所以其分子表示终边在 x 轴上的角的集合.

即 $M \subsetneq N$, 选 C.

[例 5] 如图 1-3, 已知一长为 $\sqrt{3}\text{dm}$, 宽为 1dm 的长方形木块在桌面上作无滑动的翻滚, 翻滚到第三面时, 被一小木板档住, 使木块底面与桌面成 30° 的角, 问点 A 走过的路程的长及走过的弧所在扇形的总面积.

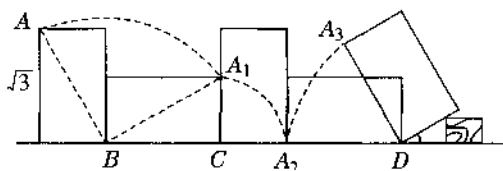


图 1-3

[分析] 本块翻滚时, 点 A 的运动轨迹, 如图 1-3 上虚线所示.

[解] $\widehat{AA_1}, \widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}$ 所在圆的圆心分别是 B, C, D , 半径分别是 $2, 1, \sqrt{3}$. $\widehat{AA_1}$ 的圆心角为 $\frac{\pi}{2}$, $\widehat{A_1A_2}$ 的圆心角为 $\frac{\pi}{2}$, $\widehat{A_2A_3}$ 的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$, 所以 A 走过的路程是 3 段圆弧之和, 即

$$2 \times \frac{\pi}{2} + 1 \times \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} = \frac{9+2\sqrt{3}}{6} \pi (\text{dm})$$

3 段弧所在扇形面积总和是:



$$\frac{1}{2} \times 2 \times \pi + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}\pi}{3} = \frac{7\pi}{1} (\text{dm}^2)$$

[评析] 解决问题的关键是找出点 A 的运动轨迹, 要注意第三次翻滚时, 点 A 并没有运动.



实践与探究

1. 下列命题中是真命题的是: ()

- A. 1 弧度就是 1 度的圆心角所对的弧
- B. 1 弧度是长度为半径的弧
- C. 1 弧度是 1 度的弧与 1 度的角之和
- D. 1 弧度是长度等于半径的弧所对的圆心角, 它是角的一种度量单位

2. $M = \{\alpha | \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{\alpha | -\pi < \alpha < \pi\}$, 则 $M \cap N$ 是 ()

- A. $\{-\frac{7\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}\}$
- B. $\{-\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}\}$
- C. $\{-\frac{7\pi}{10}, -\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}\}$
- D. $\{-\frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\}$

3. 若一圆弧长等于其所在圆的内接正三角形的边长, 则其圆心角的弧度数是 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$
- B. $\frac{2\pi}{3}$
- C. $\sqrt{3}$
- D. 2

4. 与 $-\frac{25}{6}\pi$ 的终边相同的角的集合是 ()

- A. $\{\alpha | \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- B. $\{\alpha | \alpha = \frac{10\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- C. $\{\alpha | \alpha = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- D. $\{\alpha | \alpha = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

5. 如果 α 是第二象限的角, 则 $\pi - \alpha$ 是第_____象限角.

6. -885° 化成 $2k\pi + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 2\pi, k \in \mathbb{Z}$) 的形式是_____.

7. 设角 $\alpha_1 = -570^\circ, \alpha_2 = 570^\circ, \beta_1 = \frac{3\pi}{5}, \beta_2 = -\frac{7\pi}{3}$.

(1) 将 α_1, α_2 用弧度表示出来, 并指出它们各自所在象限;

(2) 将 β_1, β_2 用角度制表示出来, 并在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 之间找出与它们终边相同的所有角.

8. 在 1 时 15 分钟, 时针与分针所成的最小正角是多少弧度?



9. 已知集合 $M = \{x | k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x^2 - 4 \leq 0\}$, 求 $M \cap N$.

10. 设集合 $M = \{\alpha | \alpha = x^\circ, k \in \mathbf{R}\}$, $N = \{\alpha | \alpha = x \text{ rad}, k \in \mathbf{R}\}$, 则集合 M, N 及实数集合两两能否构成映射, 若能该怎样建立映射? 若不能, 请说明理由.



知识拓展

平面三角史略(二)

三角学最早的系统性论著是希腊著名天文学家托勒密(C. Ptolemy, 100~178)的《数学汇编》(Almagest). 该书本来是研究天文的专著, 其中使用了三角知识. 后来的评论家为了把它和其他篇幅较小的天文学著作区别开来, 称之为《大汇编》. 全书共 13 篇, 书中介绍了用托勒密定理推导弦表的方法(相当于从 0° 到 90° 每隔 $(\frac{1}{4})^\circ$ 的正弦函数表), 还推出正弦、余弦的和差关系及一系列三角恒等式. 值得注意的是, 托勒密采用巴比伦的 60 进制, 把圆周分为 360° , 又将半径分为 60 等份, 每一份分为 60 小份, 每一小份再分为更小的份, 依次类推. 把这些小份依次叫做“第一小份”、“第二小份”等等. 后来“第一小份”变成了“分”, “第二小份”变成了“秒”(拉丁文转化), 这就是“分”、“秒”名称的来源. 托勒密研究的是球面三角形, 但是制定出的弦表实际上奠定了平面三角学的基础.

公元 6 世纪, 印度的阿耶波多对三角学做出了很大贡献. 他制作了一个正弦表, 计算出了第一象限内每隔 $3^\circ 45'$ 的正弦长. 他的作法与古希腊的作法不同, 计算的是半弦(相当于现在的正弦线)而不是全弦. 同时, 阿耶波多认为圆弧与弦长应取同一单位来度量. 将圆周分为 360 度, 每度分为 60 分, 整个圆周是 21600 个单位(分), 那么半径就是 3438 个单位, 这种统一度量弧长与半径单位的思想, 正是弧度制的精髓.

阿耶波多给半弦长的命名(jya), 至 12 世纪意译成拉丁文 sinus, 这就是今天“正弦”一词的来源, 但已与当初印度人弓弦的意义相去甚远. 1631 年德国来华耶稣会士邓玉函(J. T. Terrenz, 1576~1630)、汤若望(J. S. von Bell, 1592~1666)和中国的徐光启(1562~1633)等人编《大测》一书, 译 sinus 为“半正弦”或“前半弦”, 简称为“正弦”, 这是中国“正弦”这一术语的由来.



§ 1.2 任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数

角的推广与弧度制的建立,已经为任意角的三角函数的定义铺平了道路,本节即研究任意角的三角函数.



知识网

1. 任意角的三角函数
- 定义:
 - 代数定义(比值定义)
 - 几何定义(三角函数线)
 - 三角函数符号:一正二正弦三切四余弦
 - 应用:化简、求值、证明
2. 诱导公式一



重/难/点/解/析

- 三角函数值是比值,是一个实数,这个实数的大小与角 α 终边上点 $P(x, y)$ 的位置无关,而只由角 α 的终边位置决定.
- 三角函数符号可简记作:一正二正弦三切四余弦,即按象限依次为:第一象限全为正,第二象限正弦为正,第三象限正切为正,第四象限余弦为正.
- 正弦线、正切线的正向与 y 轴的正向相同,向上为正,向下为负,余弦线的正向与 x 轴正向一致,向右为正,向左为负;当 α 终边与 y 轴重合时,角 α 的正切线不存在.
- 诱导公式一: $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$, $\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, 实质是终边相同的角的三角函数值相同.



典型例题

【例 1】 有下列命题:

- (1) 终边相同的角的同名三角函数值相同.
- (2) 终边不同的角的三角函数值不同.
- (3) 若 $\sin \alpha > 0$, 则 α 是第一、二象限角.

(4) 若 α 是第二象限角, 且 $P(x, y)$ 是其终边上一点, 则 $\cos \alpha = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 其中正确的命题个数是

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】 该题主要考查三角函数的定义.

【解】 根据三角函数定义知(1)正确. 对于(2), 可举反例: $\sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3}$. 对于(3)可举

反例 $\sin \frac{\pi}{2} = 1 > 0$, 但 $\frac{\pi}{2}$ 不在第一、二象限. (4) 应该是 $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 综上所述, 应选 A.





[评析] 要准确理解三角函数的定义,并用它来正确地解决问题.

[例2] 已知角 α 的终边上 P 点的坐标是 $(3a, -4a)$,其中 $a < 0$,求 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ 的值.

[解] $\because x=3a, y=-4a, a < 0, \therefore r = \sqrt{(3a)^2 + (-4a)^2} = -5a$

$$\therefore \sin\alpha = \frac{-4a}{-5a} = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3a}{-5a} = -\frac{3}{5}, \tan\alpha = \frac{-4a}{3a} = -\frac{4}{3}$$

[评析] 准确理解和熟练掌握三角函数的定义是学好三角函数的基础,解题时要注意 a 的符号,必要时对 a 进行讨论,如将本题 $a < 0$ 改为 $a \neq 0$,应该如何解答?

[例3] 已知角 α 的终边与函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图像重合,求 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ 的值.

[分析] 函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图像是过原点在第一、三象限的直线,因此角 α 的终边在第一、三象限,在角 α 终边任取一点,即可求出相应三角函数值.

[解] 若 α 的终边落在直线位于第一象限部分上,在其上取点 $P(1, \sqrt{3})$

$$\text{又 } r = |OP| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \therefore \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\alpha = \frac{1}{2}, \tan\alpha = \sqrt{3}$$

若 α 的终边落在直线位于第三象限部分上,在其上取点 $P(-1, -\sqrt{3})$

$$r = |OP| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \therefore \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\alpha = -\frac{1}{2}, \tan\alpha = \sqrt{3}$$

[评析] 该题有两组解.

[例4] 判断下列各三角函数式的符号

$$(1) \sin 350^\circ \cdot \cos 370^\circ \cdot \tan 165^\circ \quad (2) \frac{\tan 4^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \sin(-\frac{23\pi}{4})}{\tan \frac{16}{3}\pi}$$

[分析] 先根据诱导公式,把各角化到 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内,再根据各角所在象限,判断其三角函数符号.

[解] (1) 由于 $350^\circ, 370^\circ = 360^\circ + 10^\circ, 165^\circ$ 分别在第四、一、二象限,所以 $\sin 350^\circ < 0, \cos 370^\circ > 0, \tan 165^\circ < 0$,即 $\sin 350^\circ \cdot \cos 370^\circ \cdot \tan 165^\circ > 0$.

$$(2) \text{ 由于 } \frac{\pi}{2} < 2 < \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}, -\frac{23}{4}\pi = -6\pi + \frac{\pi}{4}, \frac{16\pi}{3} = 4\pi + \frac{4\pi}{3}$$

$\therefore 4, 2, -\frac{23\pi}{4}, \frac{16\pi}{3}$ 分别在第三、二、一、三象限.

$$\therefore \tan 4^\circ > 0, \cos 2^\circ < 0, \sin(-\frac{23\pi}{4}) > 0, \tan \frac{16\pi}{3} > 0, \text{ 即 } \frac{\tan 4^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \sin(-\frac{23\pi}{4})}{\tan \frac{16}{3}\pi} < 0$$

[评析] 要熟记三角函数在各象限的符号.

[例5] 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{2\sin x + 1} \quad (2) y = \lg(2\cos x - \sqrt{3})$$

[分析] 首先作出单位圆,然后根据各问题的约束条件,利用三角函数线画出角 x 满足条件的终边范围.

$$[\text{解}] (1) \text{ 如图 1-4. } \because 2\sin x + 1 \geq 0, \therefore \sin x \geq -\frac{1}{2}$$



(2) 如图 1-5. $\because 2\cos x - \sqrt{3} > 0, \therefore \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

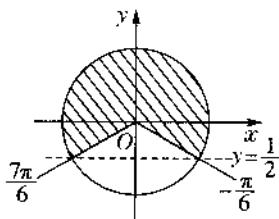


图 1-4

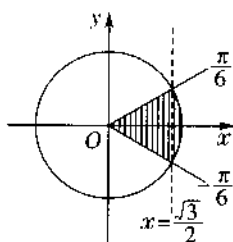


图 1-5

由图知(1)的解集为 $\{x | -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(2)的解集为 $\{x | -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

[评析] 要学会用三角函数线解三角不等式.



实践与探究

1. 已知 α 的终边过点 $P(-2, -3)$, 则下列各式中正确的是 ()

A. $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ B. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ C. $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ D. $\cot \alpha = -\frac{2}{3}$

2. 已知 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$, 则 θ 在 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 若 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 的大小关系为 ()

A. $\tan \alpha < \cos \alpha < \sin \alpha$ B. $\sin \alpha < \tan \alpha < \cos \alpha$
C. $\cos \alpha < \tan \alpha < \sin \alpha$ D. $\cos \alpha < \sin \alpha < \tan \alpha$

4. 设 θ 为第二象限, 则 ()

A. $\tan \frac{\theta}{2} > \cot \frac{\theta}{2}$ B. $\tan \frac{\theta}{2} < \cot \frac{\theta}{2}$ C. $\sin \frac{\theta}{2} > \cos \frac{\theta}{2}$ D. $\sin \frac{\theta}{2} < \cos \frac{\theta}{2}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < 0$, 则这个三角形的形状是_____.

6. 函数 $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{|\tan x|}{\tan x} + \frac{|\cot x|}{\cot x}$ 的值域为_____.

7. 若 $f(\cos x) = x, x \in [0, \pi]$, 则 $f(-\frac{1}{2}) =$ _____.

8. 化简: (1) $\cot \alpha \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}$ (2) $\frac{\tan \alpha + \tan \alpha \cdot \sin \alpha}{\tan \alpha + \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$