



ANSYS

建筑钢结构工程 实例分析

◆ 徐鹤山 编著

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



ANSYS

建筑钢结构工程实例分析

徐鹤山 编著



机械工业出版社

本书基于 ANSYS9.0 版程序,对典型的建筑钢结构工程实例进行了分析,主要内容有钢门窗结构分析;幕墙结构分析,包括弧形雨篷、复合拉索、圆形采光顶和玻璃肋驳接结构分析;钢骨架结构分析,包括钢楼梯、钢框架分析;连接件结构分析,包括耳环、销钉和齿轮的分析;以及钢结构地震响应分析。并在第 8 章中进行了门窗结构的传热分析。

书中还介绍了有限元应用知识、ANSYS9.0 的主要功能,并根据不同的工程类型穿插介绍了结构线弹性、弹塑性、几何非线性,以及结构模态分析、屈曲分析、接触分析、地震响应分析的力学知识和分析方法,分析实例全面,步骤清晰,命令流完整,参考价值高,适用于从事建筑结构分析与设计的工程技术人员和高等院校的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

ANSYS 建筑钢结构工程实例分析/徐鹤山编著. —北京:机械工业出版社, 2007.4

ISBN 978-7-111-21321-5

I. A… II. 徐… III. 建筑结构:钢结构-有限元分析-应用程序, ANSYS IV. TU391

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 054279 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:马 宏 版式设计:冉晓华 责任校对:张晓蓉

封面设计:张 静 责任印制:李 妍

保定市中华美凯印刷有限公司印刷

2007 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·22.5 印张·557 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-21321-5

ISBN 978-7-89482-185-0 (光盘)

定价:48.00 元(含 1CD)

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

销售服务热线电话:(010)68326294

购书热线电话:(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话:(010)68327259

封面无防伪标均为盗版

前 言

随着国民经济的发展,我国工程建设呈现出一派欣欣向荣的景象:一座座桥梁横跨大江南北,天堑变通途;一座座高楼拔地而起,广厦千万竞峥嵘;一座座电视塔直冲云霄,欲与天公试比高。此情此景,使我们不难想到高新科技的神奇力量。科学技术是第一生产力。当前我国建筑行业竞争非常激烈,对于一个企业而言,贯彻科学发展观,重视高新科学技术的应用和发展,重视新型技术人才的培养,就能立于不败之地。全球建筑行业的技术发展更快,所以我们必须更新观念,学习、引进、发展、创新先进的科学技术,才能使我国的建筑行业赶超世界先进水平。

有限元是随着电子计算机的发展而发展起来的新的结构分析技术。在有限元未兴起以前,建筑工程往往使用经典的结构分析方法。虽然经典的结构分析方法可以得到准确的理论解,但它只适用典型的结构。超出这个范围,比如对于大量的静不定结构,它就无能为力了。有限元则不然,它对任何结构都是适用的。它的解虽然是近似解,但是很多工程并不一定要求理论结果,而是要求满足一定公差范围的工程设计结果。有限元正好适用这个情况。

当前的有限元技术发展已经相当成熟,人们已经把这种技术编制成了大量非常优秀的计算机软件(ANSYS、MARC、NASTRAN 以及 ABAQUS 等)。这些软件不仅在航空、航天、造船等高科技领域得到了广泛应用,而且已推广到了国民经济建设的很多方面。编者多年来从事有限元技术的应用,也想在有限元技术应用的推广方面尽一点微薄之力,使它的应用不断发展。

本书内容分三部分。第一部分介绍有限元技术的应用知识,包括有限元的一般概念、有限元平衡方程的建立方法、有限元平衡方程常用的求解方法和如何对有限元计算结果进行评定等。其目的在于给使用大型结构分析程序打下基础。

第二部分介绍 ANSYS9.0 结构分析程序的使用,包括 ANSYS9.0 程序界面和主要菜单、ANSYS9.0 程序前处理、加载求解和后处理介绍等。其目的在于教会不会使用 ANSYS9.0 程序的读者为具体结构计算分析打下基础。

第三部分是工程结构实例分析,在编写时本书选择了多种不同类型的典型工程项目,共包括六章内容。其中第3章介绍门窗结构的计算分析,包括门、活动窗和固定窗户框,活动窗和门在边界条件和受力状态是属于同一个类型的。同时还分析了传统门窗计算时存在的问题。第4章介绍幕墙结构的计算分析。当前幕墙结构形式繁多,编者选择了弧形雨篷、复合拉索、圆形采光顶和玻璃肋驳接等典型结构进行了分析。第5章介绍钢骨架结构分析。钢骨架结构属于刚性结构,包括钢结构楼梯结构、一榀钢框架结构和巨型钢框架结构。第6章介

绍连接结构计算分析。在建筑结构当中，一个结构的失效往往首先发生在连接结构中，连接结构是比较重要的，但它往往被忽略。第7章介绍钢结构的地震作用分析。这一内容在编者编写的《ANSYS在建筑工程中的应用》一书中有所介绍。因为它在建筑工程中是很重要的内容，因此编者在本书中进一步地进行介绍。第三部分基本上是按照工程类型介绍的，同时根据不同的工程类型穿插介绍了线弹性、弹塑性、几何非线性、模态分析、屈曲分析、接触分析以及响应分析等相关力学知识。第8章介绍门窗结构传热计算分析，包括用有限元方法进行传热分析的基本知识和三种典型的门窗结构：单片玻璃窗、中空玻璃窗和三腔室铝型材窗框的传热分析实例。

本书中的实例分析绝大多数取自于实际工程项目。为了写书方便，对原工程项目中的原始数据均作了不同程度的变动，即不完全是原来的工程项目，其计算结果也不能照搬作为工程项目的依据，分析结论不对任何项目负责。在此特别加以说明。

由于编者的水平和精力所限，书中难免有疏漏之处，欢迎读者批评指正。编者的电子邮箱为：XHS606@163.com。

编 者

目 录

前言

第 1 章 有限元应用知识介绍	1
1.1 有限元平衡方程、求解知识概述	1
1.2 有限元理论的应用基础	2
1.2.1 有限元平衡方程的建立	2
1.2.2 有限元计算常用的求解方法	9
1.2.3 有限元计算模型的形成	16
1.2.4 有限元计算结果的评定	19
第 2 章 ANSYS9.0 程序使用介绍	21
2.1 ANSYS9.0 程序菜单路径命令中的符号说明	21
2.2 ANSYS9.0 程序图形用户界面及主要菜单	21
2.2.1 ANSYS9.0 程序图形用户界面	21
2.2.2 ANSYS9.0 程序主要菜单	21
2.3 ANSYS9.0 程序前处理、加载求解和后处理	30
2.3.1 ANSYS9.0 程序前处理	30
2.3.2 施加边界条件、荷载及选择求解方法	54
2.3.3 ANSYS9.0 程序通用后处理	60
2.3.4 ANSYS9.0 程序时间历程后处理【Time Hist Postpro】	66
第 3 章 门窗结构分析	67
3.1 相关知识介绍	67
3.1.1 工程单位制说明和约定	67
3.1.2 ANSYS 结构分析命令流的使用	68
3.1.3 梁单元 Beam3、Beam4、Beam188 和管单元 Pipe16 的使用介绍	68
3.2 玻璃门窗结构计算模型简化	70
3.3 建筑外窗（门）风荷载分布与计算	70
3.4 外门结构计算分析	71
实例 1 地铁门结构计算分析	71
3.5 外窗结构计算分析	87
实例 2 固定外窗结构计算分析	87
实例 3 活动外窗结构计算分析	95
实例 4 单窗框结构计算分析	104

第4章 幕墙结构分析	117
4.1 相关知识介绍	117
4.1.1 几何非线性计算方法	117
4.1.2 杆单元 Link1、Link8 和拉索单元 Link10 的使用介绍	118
4.2 弧形玻璃雨篷结构计算分析	118
4.3 复合拉索结构计算分析	130
4.4 玻璃采光顶结构计算分析	137
4.4.1 采光顶结构分析的目的和方法	137
4.4.2 采光顶结构分析过程	138
4.4.3 采光顶结构的计算分析实例	139
4.5 玻璃肋驳接结构计算分析	155
第5章 钢骨架结构分析	165
5.1 相关知识介绍	165
5.1.1 金属材料的拉伸应力-应变曲线及其使用	165
5.1.2 线弹性计算方法和材料非线性计算方法	166
5.1.3 模态分析	167
5.2 钢结构楼梯主结构计算分析	168
5.2.1 钢结构楼梯主结构线弹性分析	168
5.2.2 钢结构楼梯主结构弹塑性分析	190
5.3 钢结构楼梯段与转角平台计算分析	202
5.4 一榀钢框架结构计算分析	213
5.5 巨型钢框架结构的模态计算分析	228
第6章 连接件结构分析	245
6.1 相关知识介绍	245
6.1.1 按接触问题计算的方法	245
6.1.2 按接触节点对位移协调计算的方法	249
6.1.3 按接触面法向均布荷载计算的方法	249
6.2 耳环销钉连接结构计算分析	250
6.2.1 按点-面接触问题计算	250
6.2.2 按节点对法向位移协调计算	258
6.2.3 按接触面法向均布荷载计算	263
6.3 齿轮连接结构计算分析	271
第7章 钢结构地震作用分析	285
7.1 有限元法计算钢结构地震作用的四种方法	285
7.1.1 将地震作用按外荷载处理	285
7.1.2 将地震作用按惯性力处理	285
7.1.3 将地震作用按瞬态动力响应处理	286
7.1.4 将地震作用按地震谱响应处理	288

7.2 预热器塔架结构地震作用计算分析	290
7.2.1 方案一:地震作用按外荷载计算	290
7.2.2 方案二:地震作用按惯性力计算	295
7.2.3 方案三:地震作用按瞬态动力响应计算	298
7.2.4 方案四:地震作用按谱响应计算	315
第8章 门窗结构传热分析	321
8.1 相关知识介绍	321
8.1.1 建筑节能设计标准及三种传热方式	321
8.1.2 ANSYS 程序传热计算分析功能及常用单元	322
8.1.3 传热分析的理论基础及有关单位	323
8.1.4 传热分析的有限元平衡方程	323
8.1.5 传热分析中的边界条件	324
8.1.6 ANSYS 程序的传热分析步骤及所用菜单路径	324
8.2 单片玻璃窗传热分析	326
8.3 中空玻璃窗传热分析	331
8.4 三空腔室铝型材窗框传热分析	336
附录	342
附录 A 建筑外窗抗风强度计算方法	342
附录 B 变分法有关知识介绍	347
参考文献	352

第 1 章 有限元应用知识介绍

本章内容包括有限元知识概述、有限元平衡方程的建立、有限元计算常用的求解方法、有限元计算模型的形成和有限元计算结果的评定。

有限元平衡方程的建立介绍了用功的原理和能的原理（最小位能原理）两种方法建立有限元平衡方程。用最小位能原理建立有限元平衡方程介绍了变分法，这一部分是供具有高等数学基础的读者参考的。

有限元计算常用的求解方法介绍了线弹性问题最基本也是最常用的两种求解方法：高斯消去法和三角分解法。非线性求解方法中，在笔者编著的《ANSYS 在建筑工程中的应用》一书中，介绍了材料非线性问题的求解方法：牛顿-拉普森法（Newton - Raphson）、修正牛顿-拉普森法（Modified Newton - Raphson）和准牛顿-拉普森法（Quasi - Nowton - Raphson）。在本书中将着重介绍几何非线性求解方法，特别是非稳定的几何非线性问题所采用的求解方法：与修正牛顿-拉普森法相结合的弧长法。所谓弧长法实际上是一种控制增量载荷的约束条件。这个约束条件对于处理非稳定的几何非线性问题中的“疾速通过现象”是非常必要的。它使得求解过程能真实地追踪结构的载荷-位移历史过程。

有限元计算模型的形成主要介绍模型的简化。由结构到计算模型是每个从事计算分析的技术人员所面临的问题。这个问题看似简单，实际上没有有限元技术知识和工程概念是难于处理的实际工程问题。

最后介绍有限元计算结果的评定，它包括有限元计算结果正确性的评定和对有限元计算结果工程可用性评估。这对缺乏结构分析经验的工程师是非常有用的。

1.1 有限元平衡方程、求解知识概述

设有一个连续弹性体在外力作用下处于平衡状态。现在将这个连续弹性体分割成有限个单元体，而且每个单元体的性质（几何性质和物理性质）用节点表达。例如：一个方板分割成 81 个单元，100 个节点，每个节点具有三个自由度（X、Y 和 Z 向），共有 300 个自由度。利用几何关系（位移和应变）、物理关系（应力和应变），而且将外力按照一定的原则分配到每个节点的自由度上。由于连续弹性体处于平衡状态，因此就可建立一个用节点自由度表达的连续体在外力作用下的平衡方程组（1-1）。

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= f_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m &= f_3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= f_n \end{aligned} \quad (1-1)$$

下面用矩阵表达这个方程组就得到方程（1-2）和方程（1-3）。公式如下：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (1-2)$$

矩阵简化为下式:

$$[K]_{n \times m} \{\delta\}_{m \times 1} = \{F\}_{n \times 1} \quad (1-3)$$

这样就形成了结构的平衡方程。

式中

$$[K]_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \{\delta\}_{m \times 1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix}, \{F\}_{n \times 1} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

平衡方程的系数 $[K]_{n \times m}$ 称为刚度矩阵, 平衡方程的未知数 $\{\delta\}_{m \times 1}$ 称为位移, 平衡方程的右端项 $\{F\}_{n \times 1}$ 称为荷载。

由上式可知用有限元推出的结构的平衡方程是一个多元一次方程组。解有限元平衡方程就是解一个多元一次方程组。从概念上讲, 有限元不难理解。

1.2 有限元理论的应用基础

1.2.1 有限元平衡方程的建立

建立有限元平衡方程通常有两个途径: 一个途径是功的原理; 另一个途径是能的原理, 而且通常采用位能原理。建立有限元平衡方程无论从哪个途径, 都必须首先利用几何关系(位移和应变的关系)和物理关系(应力和应变的关系), 也就是首先建立这两种关系, 然后从功的原理或从能的原理导出有限元平衡方程。

下面就从这两个途径着手介绍有限元平衡方程的建立。

1.2.1.1 用虚功原理建立有限元平衡方程

用虚功原理建立有限元平衡方程, 首先应该掌握弹性力学中的一些概念, 这些概念主要是单元位移模式的建立、单元应力和应变关系的建立、虚功原理和静力等效原则等。

1. 单元位移模式的建立

计算坐标系内单元节点位移 (u, v, w) 和节点坐标 (x, y, z) 之间的关系称为单元位移模式。弹性体被离散为单元以后, 首先用几何方程建立单元的位移模式。不同单元需要建立不同的位移模式, 建立位移模式时要根据单元的自由度(转动和移动)建立, 位移模式决定了单元的精度。现将本书中常用的单元的位移模式表达式分述如下。

(1) 杆单元的位移模式 杆单元的位移模式用单元节点的位移表示, 其表达式为

$$u = u_{si} + \frac{S}{L}(u_{sj} - u_{si}) \quad (1-4)$$

式中, L 为杆单元长度; S 为任意一点的局部坐标; u_{sj} 、 u_{si} 为杆单元 i 、 j 节点的位移。

(2) 弯曲梁单元的位移模式 采用两节点 Hermite 单元表示的梁单元挠度为

$$w(\zeta) = \sum_{i=1}^2 H_i^{(0)}(\zeta) w_i + \sum_{i=1}^2 H_i^{(1)}(\zeta) \theta_i \quad (1-5)$$

或

$$w(\zeta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta) \delta_i = [N] \{\delta\}^e$$

其中

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

$$\{\delta\}^e = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T \quad \theta_i = \left(\frac{dw}{dx}\right)_i \quad (i=1, 2)$$

$$N_1(\zeta) = H_1^{(0)}(\zeta) = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3$$

$$N_2(\zeta) = H_1^{(1)}(\zeta) = (\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3)l$$

$$N_3(\zeta) = H_2^{(0)}(\zeta) = 3\zeta^2 - 2\zeta^3$$

$$N_4(\zeta) = H_2^{(1)}(\zeta) = (\zeta^3 - \zeta^2)l$$

式中, ζ 为梁单元局部坐标, $\zeta = \frac{x-x_1}{L}$ ($0 \leq \zeta \leq 1$); x 为总体坐标; x_1 为梁单元第一点坐标。

(3) 四边形平面单元的位移模式 四边形平面单元具有 8 个自由度, 它的位移模式中必须有 8 个待定系数, 其表达式为

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$$

$$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy$$

上式代入单元边界条件后, 可确定 8 个待定系数。

用形状函数表示四边形平面单元的位移模式如下:

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_n u_n \quad (1-6)$$

$$v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m + N_n v_n$$

式中, u_i 、 u_j 、 u_m 、 u_n 为四边形四个节点的 X 向位移; v_i 、 v_j 、 v_m 、 v_n 为四边形四个节点的 Y 向位移; N_i 、 N_j 、 N_m 、 N_n 为四边形的形状函数, 其表达式为

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)$$

$$N_j = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta)$$

$$N_m = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta)$$

$$N_n = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)$$

其中, ζ 、 η 为四边形的局部坐标。

(4) 四边形薄壳单元的位移模式 四边形薄壳单元见图 1-1, 四边形薄壳单元具有 12 个自由度, 它的位移模式中就必须有 12 个待定系数, 其表达式为

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3$$

上式代入单元边界条件后, 可确定 12 个待定系数。

用形状函数表示四边形薄壳单元的位移模式如下

$$w = N_i w_i + N_{xi} Q_{xi} + N_{yi} Q_{yi} + N_j w_j + N_{xj} Q_{xj} + N_{yj} Q_{yj} + N_m w_m + N_{xm} Q_{xm} + N_{ym} Q_{ym} + N_n w_n + N_{xn} Q_{xn} + N_{yn} Q_{yn} \quad (1-7)$$

式中

$$[N_i \quad N_{xi} \quad N_{yi}] = \frac{X_1 Y_1}{16} [X_1 Y_1 - X_2 Y_2 + 2X_1 X_2 + 2Y_1 Y_2 \quad 2b Y_1 Y_2 \quad -2a X_1 X_2]$$

$$[N_j \quad N_{xj} \quad N_{yj}] = \frac{X_2 Y_1}{16} [X_2 Y_1 - X_1 Y_2 + 2X_1 X_2 + 2Y_1 Y_2 \quad 2b Y_1 Y_2 \quad 2a X_1 X_2]$$

$$[N_m \quad N_{xm} \quad N_{ym}] = \frac{X_2 Y_2}{16} [X_2 Y_2 - X_1 Y_1 + 2X_1 X_2 + 2Y_1 Y_2 \quad -2b Y_1 Y_2 \quad 2a X_1 X_2]$$

$$[N_n \quad N_{xn} \quad N_{yn}] = \frac{X_1 Y_2}{16} [X_1 Y_2 - X_2 Y_1 + 2X_1 X_2 + 2Y_1 Y_2 \quad -2b Y_1 Y_2 \quad -2a X_1 X_2]$$

其中

$$X_1 = 1 - \frac{x}{a} \quad X_2 = 1 + \frac{x}{a} \quad Y_1 = 1 - \frac{y}{b} \quad Y_2 = 1 + \frac{y}{b}$$

(5) 三维立体单元的位移模式 以 20 节点六面体单元为例, 20 节点六面体单元具有 60 个自由度, 用形状函数和单元节点位移表示, 它的位移模式为

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \\ w &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \end{aligned} \quad (1-8)$$

式中, u_i 、 v_i 、 w_i 为单元节点位移; $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ 为形状函数, 其单元节点排列顺序见图 1-2, 其表达式如下:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(\zeta-\eta-\zeta-2) \\ N_2 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta-\zeta-2) \\ N_3 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-\xi+\eta-\zeta-2) \\ N_4 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2) \\ N_5 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(\xi-\eta+\zeta-2) \\ N_6 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(\xi+\eta+\zeta-2) \\ N_7 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta-2) \\ N_8 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-\xi-\eta+\zeta-2) \\ N_9 &= \frac{1}{4} (1-\eta^2)(1+\xi)(1-\zeta) \\ N_{10} &= \frac{1}{4} (1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_{11} &= \frac{1}{4} (1-\eta^2)(1-\xi)(1-\zeta) \\ N_{12} &= \frac{1}{4} (1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{13} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi)(1+\zeta) \\
 N_{14} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta) \\
 N_{15} &= \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\xi)(1+\zeta) \\
 N_{16} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta) \\
 N_{17} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)(1-\eta) \\
 N_{18} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi)(1+\eta) \\
 N_{19} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)(1+\eta) \\
 N_{20} &= \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1-\xi)(1-\eta)
 \end{aligned} \tag{1-9}$$

式中, 形状函数 $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ 是局部坐标 ξ 、 η 、 ζ 的函数, i 是单元节点号。有关形状函数的概念, 详见参考文献。

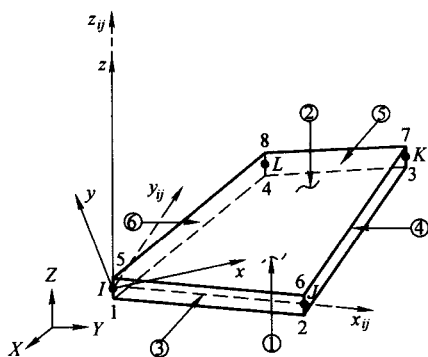


图 1-1 四边形薄壳单元

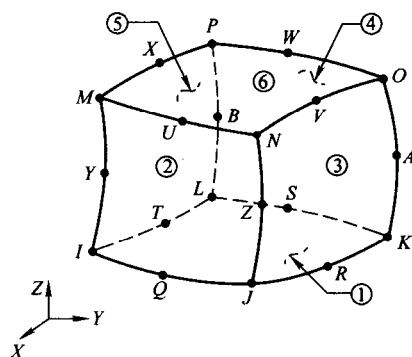


图 1-2 20 节点单元

(单元节点顺序与上述形状函数节点顺序一致)

2. 应变分量的形成

应变最简单的形式是弹性体单向受力时的相对伸长量, 即 $\epsilon = (L - L_0)/L_0$ 。上述单元的应变都可以用微分式表达成各种分量。例如: 杆单元的应变分量为 $\epsilon = \frac{\partial U_s}{\partial S}$ 。其余单元的应变分量在以下各节分别介绍。

3. 单元应力和应变关系的建立

一般来讲, 任何弹性体都具有一定的物理关系, 其中最简单的形式就是胡克定律。材料力学中给出了弹性体单向受力时的胡克定律: $\sigma = E\epsilon$ 。这个关系式表达了弹性体的应力和应变关系, 可以用于建立单元的应力和应变关系。各种单元的应力和应变关系式的建立, 在以下各节分别介绍。

4. 虚功原理

功的概念即力与位移之积, 其中的位移是在力的方向上发生的真实位移。而虚功也是力与位移之积, 但是它的位移是虚构的, 它的方向和大小是想像的, 因此它具有任意性。

虚功原理: 如果在虚位移发生之前, 弹性体处于平衡状态, 那么, 在虚位移发生时, 外

力在虚位移上的虚功就等于（整个弹性体内）应力在虚应变上的虚功。

5. 静力等效原则

所谓静力等效原则，是指移置前的原载荷与移置后的节点载荷在任何虚位移上的虚功都相等。它是虚功原理的另一种形式。

6. 用虚功原理建立单元平衡方程

设有受外力作用的弹性体，它所受的外力已经按照静力等效原则移置到单元节点上，成为单元节点力 $\{F\}^e$ ，弹性体所引起的应力为 $\{\sigma\}$ ，应变为 $\{\epsilon\}$ ，单元发生的虚位移为 $\{\delta^*\}^e$ ，引起的虚应变为 $\{\epsilon^*\}$ 。

这个虚位移和虚应变一般不是上述实际外力引起的，而是为了分析问题假想在弹性体中发生的，即虚位移具有任意性。

前面已经讲过，建立有限元平衡方程首先要利用弹性体的几何关系（位移和应变的关系）和物理关系（应力和应变的关系），即用虚功原理建立单元平衡方程的前提是这两个关系已经存在，它们是（以三维单元为例）：

$$(1) \text{ 位移和应变的关系: } \{\epsilon\}^e = [B]\{\delta\}^e \quad (1-10)$$

式中

$$\begin{aligned} \{\epsilon\}^e &= \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T \\ \{\delta\}^e &= \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \cdots u_n \quad v_n \quad w_n\}^T (n \text{ 为单元节点数}) \\ [B] &= [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \cdots B_n] \\ [B_i] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 应力和应变的关系: } \{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (1-11)$$

式中

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad l_{xy} \quad l_{yz} \quad l_{zx}\}^T \\ [D] &= \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} [D_1] &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\nu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\nu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\nu \end{bmatrix} \\ [D_2] &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad \nu = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$[D]$ 为弹性矩阵; $[B]$ 为几何矩阵。

用虚功原理: 外力在虚位移上所做的虚功等于内力在虚应变上的虚功, 建立单元的虚功方程如下。

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iiint \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy dz \quad (1-12)$$

由于 $\{\epsilon^*\} = [B]\{\delta^*\}^e$ 和 $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = [D][B]\{\delta\}^e$ 代入单元的虚功方程后得到:

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iiint \{[B]\{\delta^*\}^e\}^T [D][B]\{\delta\}^e dx dy dz$$

根据矩阵乘积的逆序法则, 上式可化为:

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iiint (\{\delta^*\}^e)^T [B]^T [D][B]\{\delta\}^e dx dy dz$$

又由于虚位移的任意性, 可以将方程右端的虚位移提到积分式前面, 从而得到单元的平衡方程

$$\{F\}^e = \iiint [B]^T [D][B]\{\delta\}^e dx dy dz \quad (1-13)$$

将单元的位移提出, 上式成为

$$\{F\}^e = \iiint [B]^T [D][B] dx dy dz \{\delta\}^e$$

可写成

$$\{F\}^e = [K]^e \{\delta\}^e \quad (1-14)$$

式中, $[K]^e$ 为单元的刚度矩阵, 用下式表示:

$$[K]^e = [B]^T [D][B]V \quad (1-15)$$

其中, $[B]$ 为单元的几何矩阵; $[D]$ 为单元的弹性矩阵; V 为单元的体积。

1.2.1.2 用变分法建立有限元平衡方程

这部分内容可供有高等数学基础的读者参考。

由弹性力学基础知识可知, 弹性力学问题的解的数学表达式是一组偏微分方程, 但直接解这个偏微分方程存在一定的难度。如果把它化成相当的泛函数变分求极值问题, 并且在求解以前将整个区域进行剖分, 得到有一定规则的单元, 用单元求这个偏微分方程的解, 就方便多了。

下面以建立平面问题的有限元平衡方程为例, 说明这个方法。因为求有限元的解, 最有效的办法是先求其位移, 再用应力-应变关系得到应力。因此, 首先用最小位能原理建立偏微分方程的泛函数表达式并求其极值, 得到有限元的平衡方程。变分法的有关知识见附录 B。

1. 建立有限元偏微分方程的泛函数表达式

建立有限元偏微分方程的前提条件, 与用虚功原理建立有限元平衡方程的前提条件相同, 即弹性体的几何关系 (位移和应变的关系) 和物理关系 (应力和应变的关系) 已经存在, 接下来就是能量原理的应用。

弹性体在外力作用下处于平衡状态, 由物理关系得总位能的泛函数表达式如下:

$$I_e(u(x), v(x)) = \iint_e \frac{1}{2} \{\delta\}^e T [B]^T \{\sigma\} t dx dy - \iint_e \{\delta\}^e T [N]^T \{g\} t dx dy - \int_{s_e} \{\delta\}^e T [N]^T \{q\} t ds$$

$$= \frac{1}{2} \{\delta\}^e T \iint_e [B]^T [D] [B] \{\delta\}^e t dx dy - \{\delta\}^e T \iint_e [N]^T \{g\} t dx dy - \{\delta\}^e T \int_{s,\sigma} [N]^T \{q\} t ds \quad (1-16)$$

式中, I 为泛函数; δ 为位移; $[B]$ 为几何矩阵; σ 为应力; $[D]$ 为弹性矩阵; t 为厚度; N 为型函数; g 为重力; q 为面力; 上角标 e 代表单元; 上角标 T 代表转置; 下角标 e 代表单元域; 下角标 s, σ 代表面域。

$$\begin{aligned} \text{设} \quad [K]^e &= \iint_e [B]^T [D] [B] t dx dy \\ \{F\}_g^e &= \iint_e [N]^T \{g\} t dx dy \\ \{F\}_q^e &= \int_{s,\sigma} [N]^T \{q\} t ds \end{aligned}$$

代入上式得

$$\begin{aligned} I_e &= \frac{1}{2} \{\delta\}^e T [K]^e \{\delta\}^e - \{\delta\}^e T (\{F\}_g^e + \{F\}_q^e) \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^e T [K]^e \{\delta\}^e - \{\delta\}^e T \{F\}^e \end{aligned} \quad (1-17)$$

把各单元的位能进行迭加, 得到弹性体的总位能。在迭加前把上式中的单元刚度矩阵 $[K]^e$ 和单元位移 $\{\delta\}^e$ 扩大成总体结构的刚度矩阵 $[K]_{n \times n}$ 和位移 $\{\delta\}$, $[K]_{n \times n}$ 中空白项为零。

∴ 总位能为

$$I = \sum_{e=1}^n I_e = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \sum_{e=1}^n [K]^e \{\delta\} - \{\delta\}^T \sum_{e=1}^n \{F\}^e = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{F\} \quad (1-18)$$

2. 求泛函数的极值导出有限元的平衡方程

∵ $I = I(\delta)$ 是弹性体节点位移的多元函数, 即对于平面问题:

$$\delta = u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$$

$$\frac{\partial I}{\partial U_i} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial V_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n; n \text{ 为自由度数})$$

根据二次型的微商公式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \{\delta\}} \left(\frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \{\delta\}} (\{\delta\}^T [K] \{\delta\}) = \frac{1}{2} 2 [K] \{\delta\} = [K] \{\delta\} \\ \frac{\partial}{\partial \{\delta\}} (\{\delta\}^T \{F\}) &= \{F\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \{\delta\}} = \frac{\partial}{\partial \{\delta\}} \left(\frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} \right) - \frac{\partial}{\partial \{\delta\}} (\{\delta\}^T \{F\}) = [K] \{\delta\} - \{F\} = 0$$

3. 平面问题的有限元平衡方程

$$[K] \{\delta\} = \{F\} \quad (1-19)$$

该平衡方程是 n 个线性代数方程组, n 为自由度数。

式中, $[K] = [K]_{n \times n}$ 称为结构的刚度矩阵; $\{\delta\} = \{\delta\}_{n \times 1}$ 称为结构的位移; $\{F\} = \{F\}_{n \times 1}$ 称为结构的载荷。

上述内容就是用变分法建立有限元平衡方程的全部过程。这一过程虽然是从二维得到

的,但它也适用于一维和三维。

1.2.2 有限元计算常用的求解方法

有限元计算采用的求解方法很多,线弹性计算常采用高斯消去法、三角分解法以及波前法等;材料非线性计算常采用牛顿-拉普森法(Newton-Raphson,图1-3)、修正牛顿-拉普森法(Modified Newton-Raphson,图1-4)和准牛顿-拉普森法(Quasi-Newton-Raphson,图1-5)等,而且这三个方法中以增量修正牛顿-拉普森法采用的最多;几何非线性计算也可采用牛顿-拉普森法、修正牛顿-拉普森法和准牛顿-拉普森法,但是对于非稳定结构,例如屈曲问题、接触问题等,就必须采用弧长法,以解决所遇到的复杂的荷载-位移历史路径过程(图1-6),较快地得到收敛解。

牛顿-拉普森法是在一个载荷步内,每次迭代所用切变模量(切线的夹角 E)都不相同;修正牛顿-拉普森法是在一个载荷步内,每次迭代所用切变模量(E)都相同;准牛顿-拉普森法是在一个载荷步内,每次迭代所用切变模量改用割线刚度(割线夹角 E)也不相同。

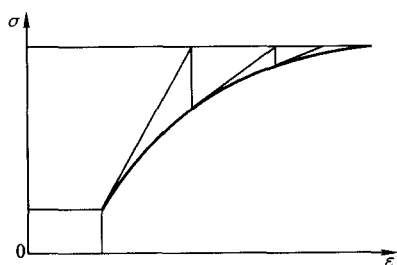


图 1-3 牛顿-拉普森法

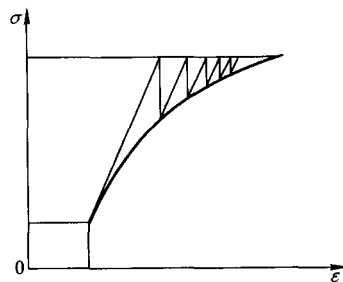


图 1-4 修正牛顿-拉普森法

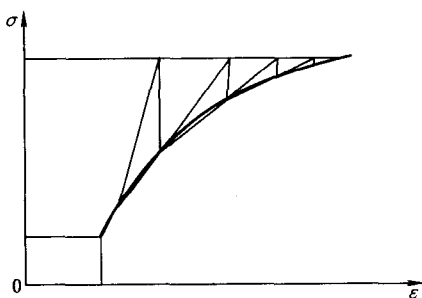


图 1-5 准牛顿-拉普森法

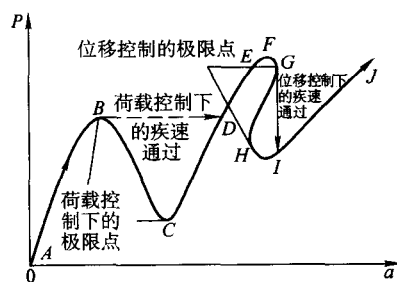


图 1-6 几何非线性的荷载-位移路径

上述方法前人很早就推导出来了,而且经过很多后人的补充已经相当完善了。在这里选取本书涉及较多的高斯消去法、三角分解法和弧长法三种方法进行介绍。

1. 高斯消去法

高斯消去法是一个古老的方法,但实践证明它仍然是当前有限元中一种常用和有效的方法。高斯消去法的基本做法是首先将一个 n 阶线性代数方程组,通过消元转化为一个等价的上三角形方程组,然后回代求解。

有限元平衡方程即这个 n 阶线性代数方程组,在加入边界条件以后,它的刚度矩阵(n 阶线性代数方程组系数矩阵)成为正定对称矩阵,即刚度矩阵中的对角元素(主元素)不为