



丛书主编 陈东旭

2007

同步辅导用书

高二 下册

学习的艺术



数学

吉林文史出版社

学习的艺术

数学 (九 B)

江西金太阳教育研究所

主 编:杜建刚

副主编:刘光清

编 委: (按姓氏笔划排列)

王连云 刘光清 刘承永 巩 锋

何东华 李庆玲 杜建刚 沙丙海

殷晴霞 曹延锋 蒋小娜

吉林文史出版社

(吉)新登字 07 号

学习艺术

(B A) 卷 二

吉林文史出版社

出版发行

长春市人民大街 4646 号 130021

印刷厂

书 名 学习的艺术(高二)

丛书主编 陈东旭

责任编辑 周海英

出版发行 吉林文史出版社

地 址 长春市人民大街 4646 号 130021

印 刷 南昌市印刷一厂

规 格 787 mm×1092 mm

开 本 16 开本

印 张 125 印张

字 数 3975 千字

版 次 2006 年 10 月第 1 版 2006 年 10 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-80702-396-1

定 价 150.00 元

前言

数学是颇令人头疼的一门学科,许多学生为之投入了太多的时间,而成绩不佳,颇有“事倍而功半”的味道,于是乎,一片“数学难,难于上青天”的怨言,从根本上讲,这种现象是同学们没有掌握正确的学习方法造成的,我们说,学习是科学,但它更是一门艺术!如果真正掌握了学习方法,跨入了学习艺术的门槛,那么,许多难题也就迎刃而解了,也就起到了“事半功倍”的效果,这正是我们所追求的。

《学习的艺术》是什么?总体说来,主要是三个方面:

其一,对概念和定义进行严密的思考,只有全面深刻地理解概念的内涵与外延,构成完整的知识网络,才能在解题过程中有据可依,而不是乱套公式与定理。

其二,对例题与结论进行认真分析,书本上的例题是非常典型的,它们对理解概念,性质等都有着很好的帮助作用,而例题的解法更是经典的,既起到示范的作用,又揭示着某种规律性的东西,因此,那种对例题轻描淡写或者囫圇吞枣地看一下的做法是极端错误的。

其三,课外练习既要有针对性也要有一定的量,搞“题海战术”,毫无目标地乱做一气是错误的,然而“光说不练”同样也是不可取的,练习要有选择,要有针对性,在做题的过程中要思考“为什么这样做”,做完后要思考“有何规律,能否变形与拓展”,只有这样,才能起到做练习的作用,同时也会有做题的乐趣。

《学习的艺术》丛书,秉承“授人以鱼,不如授人以渔”的教育理念,带领大家跨入了学习艺术的门槛……

课前导航 用趣味性、知识性、规律性的数学知识引导你学习,提高学习兴趣。

要点索引 在透彻分析教材知识体系的基础上,把各个知识点系统化、网络化,使其易懂、易记、易用。

范例导学 依据知识结构,精心挑选典型例题,展示经典解法;题后变式,展现“变中学”的乐趣。

思维进阶 深入研究,提高层次,通过综合型例题,进一步提升解题技巧与知识综合能力,突破知识难点,跨越学习障碍。

错解剖析 展现普遍性错误,探究根源所在,揭示规避方法与技巧。

课间综述 概括重点难点,揭示命题规律,总结方法技巧,便于寻找解题突破口与切入点。

编者

金太阳系列丛书

特别鸣谢以下学校的大力协助:

江西省:	南昌二中 南昌十七中 新余四中 临川二中 赣县中学 贵溪一中	江西师大附中 临川一中 瑞昌一中 赣州一中 修水一中 鹰潭一中	景德镇一中	南昌一中 吉安一中 新建二中 江西南大附中 安福中学 赣州市三中	南昌三中 白鹭洲中学 上高二中 玉山一中 上饶一中 安义中学	南昌十中 新余一中 宜春中学 南康中学 萍乡中学 峡江中学
北京市:	北京四中 首都师大附中	北京景山学校 北师大附中		清华大学附中 北京二中	北师大附属实验中学 北京二十中	
天津市:	南开中学	耀华中学		天津实验中学	太港一中	静海县一中
河北省:	邯郸一中	唐山市一中		衡水中学	正定中学	遵化一中
内蒙古:	内蒙古师大附中	呼和浩特市二中		赤峰市二中		
山西省:	太原五中 临汾一中	平遥中学 运城中学	大同一中	晋城一中	怀仁县一中	沁县中学
辽宁省:	沈阳市二中	东北育才中学		大连市八中	庄河高中	
吉林省:	东北师大附中 松原前郭五中	省实验中学 松原市第二中学		长春市实验中学	吉林市一中	延边市二中
黑龙江:	哈尔滨市六中	哈尔滨市九中		鸡西市一中	齐齐哈尔市实验中学	
江苏省:	南京师大附中 姜堰中学	南京外国语学校 盐城中学		南京一中 徐州一中	南通中学 张家港高中	启东中学
浙江省:	杭州高级中学 浙师大附中	浙江大学附中 东阳中学		宁波效实中学 衢州二中	诸暨学勉中学 绍兴柯桥中学	金华市一中 温州中学
山东省:	省实验中学 滨州市北镇中学	济南市一中 烟台市二中		青岛市二中 济宁市实验中学	曲阜师大附中 牟平一中	潍坊市一中
安徽省:	合肥市一中	马鞍山市二中		安庆市一中	淮溪中学	
福建省:	福建师大附中	南平高级中学		福州三中	龙岩二中 龙岩一中	南平一中
河南省:	河南大学附中	开封市高中		潢川一中	新乡市一中	平舆二高
湖北省:	华中师大一附中 水果湖中学	黄冈中学 武汉二中		荆州中学 荆门市一中	武汉中学 仙桃中学	天门中学
湖南省:	湖南师大附中 沅江市三中	长沙市一中 岳阳市一中		郴州市一中 岳阳县一中	株洲市二中 桑植一中	衡阳市八中 株洲市南方中学
广东省:	华南师大附中 深圳教育学院附中	广东省实验中学 顺德市一中		汕头金山中学 高州中学	惠州市一中	
广西:	广西师大附中	南宁市二中		北海市教科所	桂林市临桂中学	
四川省:	成都市七中 彭州中学	成都石室中学 南充高级中学		成都市十二中 攀枝花市三中	四川师大附中	新都一中
重庆市:	西南师大附中	重庆市一中		重庆市十一中	重庆市三中	重庆市八中
贵州省:	凯里市一中	贵阳师大附中		兴义市一中		
云南省:	昆明一中	昆明三中		宣威一中	大理一中	曲靖一中
西藏:	拉萨中学					
陕西省:	陕西师大附中 咸阳中学	西安中学 韩城象山中学		安康中学 绥德中学	延安中学 榆林市第一中学	渭南市瑞泉中学 榆林中学
甘肃省:	西北师大附中	兰州市一中		天水一中		
宁夏:	宁夏大学附中	银川市一中		银川市唐徕回民中学		
新疆:	新疆实验中学	乌鲁木齐市一中		库尔勒华山中学兵团二中		乌鲁木齐铁路三中

(限于篇幅仅列部分学校,敬请谅解)

产品质量调查反馈表

尊敬的用户：

感谢您一直以来对金太阳教育事业的支持与厚爱。为了更好地回报用户,提高我们的服务水平和产品质量,希望您百忙之中抽空填写本表,我们不胜感激。表格填好后,您可交给为您服务的金太阳客户经理或同寄至以下地址:

江西南昌国家经济技术开发区 昌北·麦园·菊圃路 1818 号 研发中心质检部 邮编:330032

您的意见或建议对我们非常重要。再次衷心地感谢您!

学校名称

类 别

反馈人

联系电话

☐ 省重点 ☐ 市重点 ☐ 普通

产品名称				反馈科目	
体例安排		☐ 合理 ☐ 不合理	您的理由是:		
试题新颖性		☐ 好 ☐ 一般 ☐ 差	新颖性达到____%		
试题难度		☐ 难 ☐ 中等 ☐ 较易	难度系数大约为____		
知识内容		☐ 好 ☐ 中 ☐ 差	您的理由是:		
	知识结构安排	☐ 合理 ☐ 不合理	您的理由是:		
	主干知识	☐ 突出 ☐ 一般 ☐ 不突出			
错误之处	填写具体内容				
超纲之处	填写具体内容				
整体评价	不足				
	优点				

《金太阳》系列丛书

——江西金太阳教育研究所编著

——吉林文史出版社出版

《学习的艺术》(下册)

——2007 高二同步辅导用书

邮 购 目 录

书 名	邮购代码	邮购价(元)	数量
《学习的艺术》·语文分册	YSX21	14.50	
《学习的艺术》·数学(A)分册	YSX22A	19.50	
《学习的艺术》·数学(B)分册	YSX22B	19.50	
《学习的艺术》·英语分册	YSX23	17.00	
《学习的艺术》·物理分册	YSX24	10.50	
《学习的艺术》·化学分册	YSX25	17.00	
《学习的艺术》·生物分册	YSX26	15.50	
《学习的艺术》·政治分册	YSX27	10.50	
《学习的艺术》·历史分册	YSX28	10.50	
《学习的艺术》·区域地理	YSX29	15.50	

邮购方法:

注明所购图书代码、数量以及您的详细收件地址、姓名、邮编,将书款通过邮局汇至**330032 江西南昌国家经济技术开发区 昌北·麦园·菊圃路 1818 号 黄利平老师**收。款到三日内发书。

起邮数 100 册。

联系电话:13077966176

目录

Contents

第九章 直线、平面、简单几何体

§9.1 平面的基本性质(第1课时)	(1)
§9.1 平面的基本性质(第2课时)	(3)
§9.2 空间的平行直线和异面直线	(6)
§9.3 直线和平面平行与平面和平面平行(第1课时)	(9)
§9.3 直线和平面平行与平面和平面平行(第2课时)	(12)
§9.4 直线和平面垂直(第1课时)	(15)
§9.4 直线和平面垂直(第2课时)	(18)
§9.5 空间向量及其运算(第1课时)	(21)
§9.5 空间向量及其运算(第2课时)	(23)
§9.5 空间向量及其运算(第3课时)	(25)
§9.5 空间向量及其运算(第4课时)	(27)
§9.6 空间向量的坐标运算(第1课时)	(30)
§9.6 空间向量的坐标运算(第2课时)	(32)
§9.7 直线和平面所成的角与二面角(第1课时)	(35)
§9.7 直线和平面所成的角与二面角(第2课时)	(39)
§9.7 直线和平面所成的角与二面角(第3课时)	(42)
§9.8 距离(第1课时)	(45)
§9.8 距离(第2课时)	(48)
小结与复习(§9.1~§9.8)	(52)
§9.9 棱柱与棱锥(第1课时)	(57)
§9.9 棱柱与棱锥(第2课时)	(60)
§9.9 棱柱与棱锥(第3课时)	(63)
§9.9 棱柱与棱锥(第4课时)	(66)
§9.10 研究性课题:多面体欧拉定理的发现	(68)

目录

§9.11 球(第1课时)	(71)
§9.11 球(第2课时)	(74)
小结与复习(§9.9~§9.11)	(77)

第十章 排列、组合和概率

§10.1 分类计数原理与分步计数原理	(83)
§10.2 排列(第1课时)	(86)
§10.2 排列(第2课时)	(88)
§10.2 排列(第3课时)	(90)
§10.3 组合(第1课时)	(93)
§10.3 组合(第2课时)	(95)
§10.3 组合(第3课时)	(98)
§10.4 二项式定理(第1课时)	(101)
§10.4 二项式定理(第2课时)	(104)
小结与复习(§10.1~§10.4)	(107)
§10.5 随机事件的概率(第1课时)	(110)
§10.5 随机事件的概率(第2课时)	(113)
§10.6 互斥事件有一个发生的概率(第1课时)	(116)
§10.6 互斥事件有一个发生的概率(第2课时)	(118)
§10.7 相互独立事件同时发生的概率(第1课时)	(120)
§10.7 相互独立事件同时发生的概率(第2课时)	(123)
§10.7 相互独立事件同时发生的概率(第3课时)	(127)
小结与复习(§10.5~§10.7)	(130)
参考答案	(135)
附录:同步达标(共74页)	

第九章

直线、平面、简单几何体



§ 9.1 平面的基本性质(第1课时)



知识海洋 扬帆起航

课前导航

数学巨著《几何原本》

中学几何学大部分来自欧几里得的巨著《几何原本》,因此,搞清《几何原本》的形成、内容及作用对学习中学几何史无疑是重要的。

几何学经过漫长的萌芽时期之后,进入了独立的几何学形成时期,这一时期的代表著作就是欧几里得的《几何原本》。

《几何原本》的内容除了几何以外还有初等数论及初等代数,这部书有13卷,共计465个命题,中学几何的大部分内容来自这里。

第11、12、13卷讲的是立体几何,其中大部分是现行中学课本上的内容。例如,关于空间中的直线和平面的定义、定理,关于平行六面体的定理,关于球体的论述及球的五种内接正多面体的作图法等。

《几何原本》集前人数学研究之精华,以当时无与伦比的优点取代了以前所有的几何课本。在希腊之前的漫长年代里,人们的几何知识还处在零散的、互不联系的状态中,而欧几里得在《几何原本》中,由定义、公理和公设出发,从简到繁,有条不紊地阐述了一系列定理,对前人证明不够严密的所有定理都给出了论证,它对数学能在严密的推理中不断发展有极其深远的影响。《几何原本》的表现形式被称为公理的形式,这种形式已成为现代数学的原型,这种公理化的方法在今天已渗透于数学的各个领域。

2000多年来,《几何原本》这本世界上古老的数学巨著,在没有印刷术的古代,人们辗转传抄它作为数学教材,并把它译成多种文字。直到五十多年前,欧洲和美洲各国的学校还在用翻译的《几何原本》作为教科书,就是今天,各国中学几何课的主要内容也是来自《几何原本》。1607年我国数学家徐光启在利玛窦的协助下,将《几何原本》的前六卷译成中文,这对中国数学的发展有很大影响。



知识海洋 扬帆起航

要点索引

1. 平面的概念:①平面和点、线一样,是构成空间图形的基本要素之一;②平面是点的集合,平面无大小、厚薄,且具有无限延展性。

平面的画法:可用平行四边形、三角形、矩形、圆、梯形等平面图形来表示平面。

平面的表示:常用小写希腊字母 α, β, γ 等表示;如平面 α ,也可用平行四边形 $ABCD$ 的相对顶点的两个大写字母来表示,如平面 AC ,平面 BD ,或用表示多边形顶点的字母来表示,如平面 ABC 。

2. 平面图形是有大小、有面积可以度量的,故平面图形与平面是两个截然不同的概念。

3. 立体几何作图规则:看得见的画实线,看不见或被遮住的一般画虚线(或不画)。

4. 用集合语言描述点、线、面之间的关系:如果 A 在直线 l 上,记作 $A \in l$;点 A 在平面 α 上,记作 $A \in \alpha$;直线 l 在平面 α 内,记作 $l \subseteq \alpha$ 等。

5. 平面的基本性质

①公理1:如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内。若用符号语言表述,即: $A \in l, B \in l, A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow l \subseteq \alpha$ 。

公理1是判断直线在平面内的依据。

②公理2:如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,这些公共点的集合是一条直线。若用符号语言表述,即: $P \in \alpha, P \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = l$ 且 $P \in l$ 。

公理2是判断平面相交的依据。

③公理3:经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面。或:不共线的三点确定一个平面。若用符号语言表述,即: A, B, C 三点不共线 $\Rightarrow$ 有且只有一个平面 α ,使 $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$ 。

其中“有且只有一个”的含义是:“有”说明“存在”,“只有一个”说明“唯一”,因此公理3强调的是“存在”和“唯一”两个方面,而“确定一个平面”中的“确定”和“有且只有”是同义词,公理3是点确定平面的依据。

名师指点 注意领悟

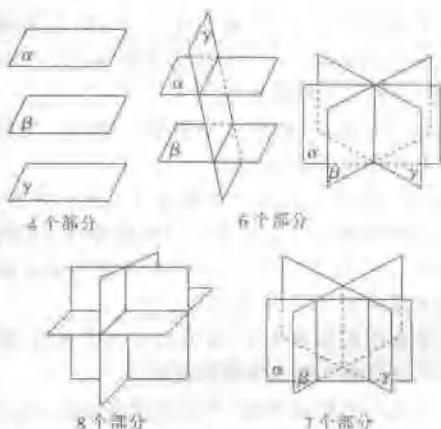
案例导学

1. 平面划分空间

【例1】三个平面将空间分成几部分？图示各种不同的情况。

【分析】本题可用递进的方法，先考虑两个平面的情况，然后再对添加第三个平面后的各种情况加以讨论。

【解析】共四种情况，各种情况的图形如下：



因此，三个平面可把空间分成4个、6个、7个或8个部分。

【变式1】正方体各面所在的平面可将空间分成几部分？

2. 平面的基本性质

【例2】判断下列命题是否正确。

(1) 两个相交平面有不在同一直线上的三个公共点。

(2) 经过空间任意三点有且只有一个平面。

【分析】利用公理判断。

【解析】命题(1)是错误的。因为由公理2知两平面相交必交于一直线，且由公理3知两平面有不在同一直线上的三个公共点时，两平面必重合。

命题(2)也是错误的。因为由公理3知只有经过空

间不共线的三点才能仅有一个平面，若三点共线，则经过此三点的平面有无数个。

【变式】有下列命题：

①公理1可用集合符号叙述为：若 $A \in l, B \in l$ ，且 $A \in \alpha, B \in \alpha$ ，则必有 $l \in \alpha$ 。

②四边形的两条对角线必相交于一点。

③用平行四边形表示的平面，以平行四边形的四条边作为平面边界线。

④梯形是平面图形。

其中正确的命题有_____。

百尺竿头 更进一步

思维进阶

【例】三个平面两两相交于三条直线，且三条直线不平行，则这三条直线相交于一点。

【分析】这是证明三线共点的问题，常规思路：先证两线交于一点，再证明这点在第三条直线上。

已知平面 α, β, γ 两两相交于三条直线 l_1, l_2, l_3 ，且 l_1, l_2, l_3 不平行，如图。

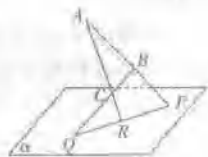
求证： l_1, l_2, l_3 相交于一点。

【证明】 $l_1 \subseteq \beta$
 $l_2 \subseteq \beta$
 $l_1 \not\parallel l_2$
 $\Rightarrow l_1 \cap l_2 = P$
 $\Rightarrow \begin{cases} P \in \alpha \\ P \in \gamma \end{cases}$
 $\Rightarrow P \in l_3$
 $\Rightarrow l_1, l_2, l_3$ 交于一点 P 。

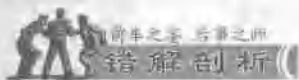
练习：

已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外， $AB \cap \alpha = P$ ， $AC \cap \alpha = R$ ， $BC \cap \alpha = Q$ ，如图。

求证： P, Q, R 三点共线。



集合符号语言
有助证明

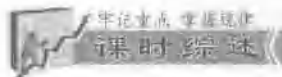


【例】在 $\triangle ABC$ 中, $A, B \in \alpha$, 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $O \in \alpha$, 则点 C 是否在平面 α 内?

【错解】因为外心 O 在 AB 外, 所以 AB 与点 O 确定一个平面, 这个平面就是 α , 这平面也是 $\triangle ABC$ 所在的平面, 故点 C 在平面 α 内.

【剖析】没有全面考虑 $\triangle ABC$ 的外心位置, 致使解题失误. 当 $\triangle ABC$ 是直角三角形时, 外心在斜边上, C 点就不一定在 α 内了. 考虑问题要全面哦.

【正解】点 C 不一定在 α 内. 当三角形的外心 O 不在 AB 边上时, 这时 O 点一定是直线 AB 外一点, O 与 AB 确定一个平面, 这个平面就是 α , 也是 $\triangle ABC$ 所在的平面, 此时 $C \in \alpha$; 若 O 点在 AB 上, 则 AB 为斜边, $\angle C$ 为直角, O 必为 AB 中点, 这时过 A, O, B 有无穷多个平面, C 点可以在这无穷多个平面中的任一平面内, 所以 C 不一定在 α 内.

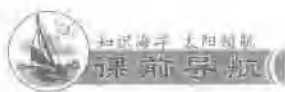


1. 平面分空间问题可采用先退后进的辩证思维策略: 由平面分空间退到直线分平面, 同时要正确应用分类讨论思想. 而对于点、线确定平面个数的问题, 常常是应用平面的基本性质及分类讨论思想.

2. 注意对平面基本性质的应用: 公理 1 既可判断线在面内, 点也在面内, 又可用直线检验平面; 公理 2 既是判断两平面相交的依据, 又可判断点共线和线共点; 公理 3 既可确定平面, 又可证明点、线共面问题. 在运用平面的基本性质时, 应充分注意其成立的前提条件.

3. 要充分理解开学会运用集合的符号语言表示点、线、面的关系.

§ 9.1 平面的基本性质(第 2 课时)

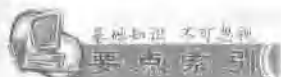


生活中的“平面”问题

我们知道, 自行车用一只撑脚就能停放平稳; 一扇门用两个合页和一把锁就可把门固定在墙面上; 而用两根拉紧的细绳就能检验桌子的四条腿的底端是否齐平.

我们还知道, 照相机支架、水准仪的腿只用三条而不用四条, 课桌、凳子的腿却用四条而不用三条, 这些事实的存在, 肯定是有道理的.

同学们能从数学的角度来阐述这些道理吗?



1. 公理 3 的推论

推论 1: 经过一条直线和直线外一点有且只有一个平面.

推论 2: 经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论 3: 经过两条平行直线有且只有一个平面.

公理 3 及其 3 个推论是确定平面及判断两个平面重合的依据, 是证点、线共面的依据, 也是作截面和辅助平面的依据.

2. 平面图形: 如构成图形的所有点都在同一平面内, 则这个图形称为平面图形.

直观图: 把空间图形在平面内画得既富有立体感, 又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的图形, 就是直观图.

3. 空间图形直观图的斜二测画法.

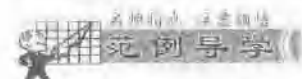
①在已知图形中取水平平面, 取两两互相垂直的 Ox, Oy, Oz 轴;

②画直观图时, 把它们画成对应的轴 $O'x', O'y', O'z'$, 使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°), $\angle x'O'z' = 90^\circ$, $x'O'y'$ 确定的平面是水平平面;

③已知图形中平行于 x, y, z 轴的线段, 分别画成平行于 x', y', z' 轴的线段;

④平行于 x, z 轴的线段,在直观图中保持长度不变,平行于 y 轴的线段,长度为原来的一半.

水平放置的平面图形的直观图斜二测画法与前者基本类似,只是少画一条与 x, y 轴都垂直的 z 轴.



1. 确定平面的条件

【例1】已知直线 a 与直线 a, b 分别交于点 A, B ,且 $a \parallel b$,求证:过 a, b, m 有且只有一个平面.

【证明】如图所示.

(存在性)

$\because a \parallel b$,

$\therefore$ 过 a, b 有一个平面 α .

又 $\because m \cap a = A, m \cap b = B$,

$\therefore A \in \alpha, B \in \alpha$,

$A \in m, B \in m$.

又 $A \in m, B \in m$,

$\therefore m \subseteq \alpha$.

即过 a, b, m 有一平面 α .

(唯一性)

假设过 a, b, m 还有一个异于平面 α 的平面 β 存在.

则 $a \subseteq \alpha, b \subseteq \alpha, a \subseteq \beta, b \subseteq \beta$,

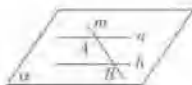
这与“ $a \parallel b$,过 a, b 有且只有一个平面”相矛盾.

$\therefore$ 过 a, b, m 只有一个平面.

因此,过 a, b, m 有且只有一个平面.

变式1 证明:两两相交而不共点的四条直线在同一平面内.

“有且只有”表示“存在”且“唯一”



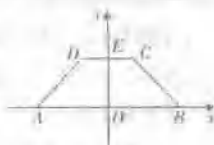
“唯一性”即用“反证法”或“同一法”证明.



2. 空间图形的平面直观图

【例2】画等腰梯形 $ABCD$ 的直观图.

【分析】画水平放置的平面图形的直观图关键是确定多边形的顶点位置,借助于平面直角坐标系即可.一般说来,直线的平行性,点的共线性,线的共点性不变,但角的大小,线段的度量,形状等都发生变化,这种变化增强了图形的立体感.



【画法】①以 AB 为 x 轴, AB 的中点 O 为坐标原点建立直角坐标系 xOy ,并画出相应的坐标轴 $x'O'y'$,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$.

②以 O' 为中点,在 $x'y'$ 轴上取 $A'B' = AB$,在 $O'y'$ 轴上取 $O'E' = \frac{1}{2}OE$,以 E' 为中点,过 E' 作 $D'C'$ 平行于 x' 轴,并使 $D'E' = EC$,连接 $A'D', B'C'$,则梯形 $A'B'C'D'$ 即为 $ABCD$ 水平放置的直观图.

变式2 画正三角形的直观图.



百思千虑 更上一层楼

思维进阶

【例】一条直线和这条直线外不在同一直线上的三点,可以确定几个平面?

【分析】分三种情况讨论:①三点中任何两点与直线都不共面;②三点中有两点与直线共面;③三点与直线共面.然后再利用公理3的推论进行求解.

【解析】设直线 l ,又设 l 外不共线的三点为 A, B, C .

①若 A, B, C 中任何两点与直线 l 都不共面,那么不共线的三点 A, B, C 确定一个平面.直线 l 分别

亦需讨论
“不重不漏”!

与每一点可确定一个平面,因此,共有四个平面;

②若其中有两点与直线 l 共面,不妨设 A, B 两点与 l 共面,那么, A, B, C 三点确定一个平面, l 与 A, B 两点确定一个平面, l 与另一点 C 确定一个平面,共有三个平面;

③三点 A, B, C 与直线 l 同在一个平面内,则可以确定一个平面.

所以过一直线和直线外不在同一直线上的三点,可以确定四个,三个或一个平面.

练习:

空间 k 个平面两两相交,以其交线个数为元素构成的集合是_____.



牢记重点 掌握规律

课时综述

1. 证明“共面问题”有两种方法:先用部分元素(点、线)确定一个平面,再证明其他元素也在这个平面内;或者分别用给定的部分元素确定几个平面,然后证明这几个平面重合.

2. 解决点、线确定平面的个数问题,常常使用确定平面的条件即公理3及其3个推论进行分类讨论.分类时要做到“不重不漏”.

3. 画水平放置的多边形的直观图时,要根据给定图形,合理选取 x 轴和 y 轴.



前车之鉴 后车之师

错解剖析

【例】已知 A, B, C, D, E 五点, A, B, C, D 共面, B, C, D, E 共面,则 A, B, C, D, E 五点一定共面吗?

【错解】 $\because$ 点 A, B, C, D 共面.

$\therefore$ 点 A 在点 B, C, D 所确定的平面内.

$\because$ 点 B, C, D, E 四点共面.

$\therefore$ 点 E 也在 B, C, D 所确定的平面内.

$\therefore$ 点 A, E 都在 B, C, D 所确定的平面内,即点 A, B, C, D, E 一定共面.

【剖析】共面问题的证明,需分两步:(1)确定平面;(2)证明元素在确定的平面内.必须注意到平面是确定的.

不能想当然哦!

上述错解中,由于没有注意到 B, C, D 三点不一定确定平面,即默认了 B, C, D 三点一定不共线,因而出错.也即题设条件中 B, C, D 三点不一定确定平面,因此就使得五点的共面失去了基础.

【正解】 A, B, C, D, E 五点不一定共面.

分类讨论
“不重不漏”!

①当 B, C, D 三点不共线时,由公理3知 B, C, D 三点确定一个平面 α ,由题设知: $A \in \alpha, E \in \alpha$,故 A, B, C, D, E 五点共面于 α .

②当 B, C, D 三点共线时,设共线于 l ,若 $A \in l, E \in l$,则 A, B, C, D, E 五点共面;若 A, E 有且只有一点在 l 上,则 A, B, C, D, E 五点共面;若 A, E 都不在 l 上,则 A, B, C, D, E 五点可能不共面.因此,在题设条件下, A, B, C, D, E 五点不一定共面.

§ 9.2 空间的平行直线和异面直线



课前导航

立交桥上的争论

小王、小李是两位爱动脑筋的初中生。一天，他们来到某城市的立交桥上，看到畅通无阻的滚滚车流，突然想到这样一个问题：把这两条公路抽象成直线，那么这两条直线是平行的，还是相交的？

小王说：应该是相交的，因为两条公路的走向不一样，一条是东西方向，而另一条是南北方向的。

小李说：应该是平行的。如果相交，那么应该有唯一交点，现在交点在哪里？如有交点，车流是无法畅通的。

小王说：肯定相交，可以用反证法证明：假设不相交，那么就平行，所以两条公路的走向一致，这显然是不对的，因此是相交的。

两人一直争论不清，谁也说服不了谁，都无法解释清楚。

你帮助一下如何？



要点索引

1. 平行公理(公理4)：平行于同一直线的两条直线平行。

它反映了平行的传递性，由此，可以把平行性质传递有限次，如：

$$a_1 \parallel a_2, a_2 \parallel a_3, \dots, a_{n-1} \parallel a_n \Rightarrow a_1 \parallel a_2 \parallel \dots \parallel a_n.$$

2. 等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同，那么这两个角相等。

若将其中的“方向相同”改成“方向相反”，则这两个角也相等；若将“方向相同”改成“一边方向相同，另一边方向相反”，则这两个角互补。等角定理说明了在平移的变换下，角的大小不变，它是定义异面直线所成角的依据，但须注意角的边的方向。

3. 平移：如果空间图形 F 的所有点都沿同一方向移动相同的距离到 F' 位置，则说图形 F 在空间作了一次平移。图形平移后与原图形全等。

4. 异面直线：不同在任何一个平面内的两条直线叫异面直线。

“不同在任何一个平面”可以理解为“不可能找到一个平面同时包含这两条直线”，也可理解为“这两条直线不能确定一个平面”，但不可误解为“分别在两个平面内的两条直线”。

异面直线的判定定理：连结平面内一点与平面外一点的直线和这个平面内不经过此点的直线是异面直线。

5. 异面直线所成的角：过空间任意一点作这两条异面直线的平行线，这两条平行线所成的锐角(或直角)称为这两条异面直线所成的角。

异面直线所成的角 θ 的范围： $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ ，当 $\theta = 90^\circ$ 时，称两异直线互相垂直。

6. 空间两直线的位置关系：①平行；②相交；③异面。



例题导学

1. 空间的平行直线

【例1】已知 E, E_1 是正方体 AC_1 的棱 AD 和 A_1D_1 的中点。

求证： $\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$ 。

【分析】本题是一道利用等角定理证明两个角相等的问题，寻找或创造符合定理的条件是关键。

【解析】连结 EE_1 。

$\because E_1, E$ 分别是正方体 AC_1 的棱 AD 和 A_1D_1 的中点， $\therefore A_1E_1 \parallel AE$ 。

$\therefore A_1E_1EA$ 是平行四边形，

$\therefore A_1A \parallel EE_1$ 。

又 $\because A_1A \parallel B_1B$ ，

$\therefore EE_1 \parallel B_1B$ 。

$\therefore$ 四边形 EE_1B_1B 是一个平行四边形。

$\therefore B_1E_1 \parallel BE$ 。

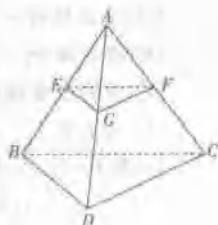
同理， $E_1C_1 \parallel EC$ 。

而且由图形可知 $\angle C_1E_1B_1$ 和 $\angle CEB$ 方向相同，由等角定理可得 $\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$ 。

看两直线的方向很重要。

变式 1 如图,立体图形 $A-BCD$ 的四个面分别为 $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ADB$ 和 $\triangle BCD$, E, F, G 分别是线段 AB, AC, AD 上的点,且满足 $AE:AB=AF:AC=AG:AD$.

求证: $\triangle EFG \parallel \triangle BCD$.



变式 已知空间四边形 $ABCD$, $AB \neq AC$, AE 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高, DF 是 $\triangle BCD$ 的 BC 边上的中线, 求证: AE 和 DF 是异面直线.



2. 异面直线的判定与证明

【例 2】如图.

已知: $a \cap b = A, b \subseteq \beta, a \cap \beta = A$, 且 $c \subseteq \alpha, c \parallel a$.

求证: b, c 为异面直线.

【证明】(法一)(定理法)

$\because c \subseteq \alpha, a \cap \beta = A, a \cap \alpha = A, \therefore A \in \alpha \cap \beta$.

而 $a \parallel c$, 于是 $A \notin c$, 在直线 b 上任取一点 B (不同于 A).

$\because b \subseteq \beta, B \notin \alpha, \therefore AB$ 与 c 异面直线.

即 b, c 为异面直线.

(法二)(反证法)

假设 b, c 不是异面直线, 即 b, c 为共面直线, 则 b, c 为相交直线或平行直线.

(1) 若 $b \cap c = P$, 已知 $b \subseteq \beta, c \subseteq \alpha$, 又 $a \cap \beta = A$, 则 $P \in b \subseteq \beta$, 且 $P \in c \subseteq \alpha$, 从而, 交点 P 一定在平面 α, β 的交线上(公理二).

即 $P \in a$, 于是 $a \cap c = P$, 这与已知条件 $a \parallel c$ 矛盾, 因此 b, c 相交不能成立.

(2) 若 $b \parallel c$, 已知 $a \parallel c$, 则 $a \parallel b$ (公理四), 这与已知条件 $a \cap b = A$ 矛盾, 因此 b, c 平行也不能成立.

综合(1), (2)可知 b, c 为异面直线.

反证法是常用的方法.



3. 异面直线及其夹角

【例 3】正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 BB_1, CC_1 的中点, 求 AE, BF 所成角的余弦值.

【分析】只需平移 BF 至 EC_1 , 则角可找到, 再解三角形即可.

【解析】如图, 连结 EC_1 , 则 $EC_1 \parallel BF$, 故 AE 与 EC_1 所成的锐角或直角, 就是 AE 与 BF 所成的角. 连结 AC_1 , 令正方体的棱长为 a .

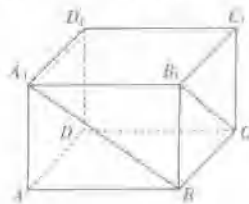
$$\text{则 } AE = EC_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}a, AC_1 = \sqrt{3}a.$$

在 $\triangle AEC_1$ 中,

$$\begin{aligned} \cos \angle AEC_1 &= \frac{2AE^2 - AC_1^2}{2AE^2} \\ &= 1 - \frac{AC_1^2}{2AE^2} = 1 - \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$\therefore AE, BF$ 所成角的余弦值是 $\frac{1}{5}$.

变式 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DA = DC = 4, DD_1 = 3$, 求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小(结果用反三角函数值表示). [2006 · 上海春]



不要错符号.

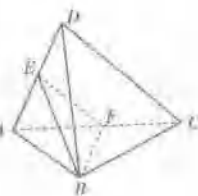


百尺竿头，更进一步

思维进阶

【例】在空间四边形 $ABCD$ 中， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $\angle A = 90^\circ$ ， $BC = \sqrt{2}$ ， $DA \perp AC$ ， $DA \perp AB$ ，若 $AD = 1$ 且 E 是 AD 的中点，求异面直线 EB 和 DC 所成的角。

【分析】求异面直线所成的角时，非常关键的一点是选择好平移的位置，也就是要寻找合适的点作 EB 或 DC 的平行线。设想沿 DA 的方向平移 DC ，使 D 移向 E ，那么 C 将移向 AC 的中点 F 。



这样 EB 与 DC 所成的角就是 $\angle BEF$ ，解 $\triangle BEF$ 即可。

【解析】取 AC 的中点 F ，连结 EF ， FB 。

在 $\triangle ADC$ 中， E ， F 分别是 AD 、 AC 的中点，那么 $EF \parallel DC$ ， $\angle BEF$ 即为所求的异面直线 EB 和 DC 所成的角。

“中位线”是构造平移的方法之一。

$$\text{在 Rt}\triangle EAB \text{ 中, } AB = AC = 1, EA = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EB = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEF \text{ 中, } AF = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}, \therefore EF = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 中, } AB = 1, AF = \frac{1}{2}, \therefore FB = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

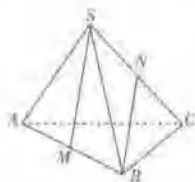
因此，在等腰三角形 BEF 中，

$$\cos \angle BEF = \frac{\frac{1}{2} EF}{BE} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

因此异面直线 EB 和 DC 所成的角为 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$ 。

练习：

如图， S 是正三角形 ABC 所在平面外一点， $SA = SB = SC$ ，且 $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = 90^\circ$ ， M ， N 分别是 AB 和 SC 的中点，求异面直线 SM 与 BN 所成角的余弦值。



前车之鉴，后事之师

错解剖析

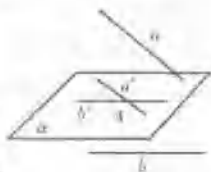
【例】 A 为两异面直线 a ， b 外一点，过 A 与 a ， b 都平行的平面

(A) 有且只有一个。

(B) 恰有两个。

(C) 或者没有或者只有一个。

(D) 有无数个。



【错解】如图，过点 A 作 $a' \parallel a$ ，

$b' \parallel b$ ， $a' \cap b' = A$ ，所以过 a' ， b' 有且只有一个平面，故选 A。

【剖析】对点 A 的位置没有作全面分析，误认为点 A 与直线 a ， b 都不共面，忽视了点 A 与直线 a 或直线 b 共面的情况。

点 A 的位置要考虑全面。

【正解】当点 A 与直线 a ， b 都不共面时，由上面解法知，这样的平面只有一个；当点 A 跟其中一条异面直线共面时，这样的平面不存在，故选 C。

【答案】C



牢记要点，掌握规律

课时综述

1. 证明角相等的问题，等角定理是较常用的方法，特别是在确定异面直线所成角时，经常利用平行线“寻找”。

2. 求异面直线所成的角，是高考的重点内容之一，通过平行线转化为相交直线所成的角。

异面直线所成的角的范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$ ，若在解这类问题中求出的角是钝角，应取它的补角为异面直线所成的角。

3. 证明异面直线的方法：①判断定理；②反证法。