普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学模块化系列教材

总主编　俞瑞钊

微积分

W E I J I F E N

周　念　王显金　单一峰　编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

总主编 俞瑞钊

微积分

W E I J I F E N

◆ 周 念 王显金 单一峰 编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分／俞瑞钊主编．—杭州：浙江大学出版社，2007.8

（高等数学模块化系列教材）

ISBN 978-7-308-05394-5

Ⅰ.微…　Ⅱ.俞…　Ⅲ.微积分－高等学校－教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 092613 号

微积分

周　念　王显金　单一峰　编

责任编辑　李玲如
封面设计　丁文英
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江中恒世纪印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　11
字　　数　192 千
版 印 次　2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05394-5
定　　价　16.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571)88072522

前　言

中国高等教育在“十一五”期间的一个主题是走向内涵发展的道路。对每个高等职业技术学院来讲，最重要的任务除了要建设一支具有相当水平的师资队伍，要构建一个对人才培养必须具备的高效的产学研结合体系之外，就是要有一个与高职定位相吻合的高等职业技术课程体系。这其中，基础课，特别是数学课是我们不可能回避、又是极为重要的课程。

由高等教育的精英阶段发展起来的高等专科学校，数学课遵循的是“必需、够用”的原则。当时，数学基本上就是“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门课，学时也都在 150～200 学时之间，内容基础上是本科生内容的简化。当高等教育进入大众化阶段后，高等职业技术学院的定位发生了很大变化，学生生源发生了很大变化。我们培养的人才是社会上各类岗位的技能型、应用型人才，而学生的数学基础明显薄弱，单凭主观想象和判断来对数学内容进行取舍就会遇到许多矛盾。因此，数学课的改革便成为高职教育的重要课题。

“必需、够用”在这种新形势下如何赋予新的内涵，并在此方针下进行数学课的改革是非常重要的。我们以为“必需、够用”不能以数学自身的学科系统来衡量，不能由数学教师的爱好来决定，也不能由学校统一规定课程的学时和内容。“必需、够用”要由每个专业的职业岗位需求来决定，要由每个专业的专业要求来决定，要由学生的实际基础来决定。为此，近几年来，我们进行了数学课的实用化、小型化、模块化的改革探索。这套系列教材便是这种改革的阶段性成果。

本系列教材将高等数学分为 5 个小型化模块，分别为：《微积分》、《矩阵方法》、《概率与统计方法》、《集合初步》和《图的方法》。除了《微积分》为 36 学时外，其他课程均为 18 学时。前三门课程提供给任一专业选择，后两门课主要是

为大量的信息类专业选择。为了满足有兴趣并需要提高的学生的要求，我们又组织编写了《应用数学基础》，内容包括多元微积分、微分方程、矩阵特征值与特征向量、矢量代数和空间解析几何、无穷级数等。

本系列教材具有以下鲜明特点：

1.注重实用性

系列教材力求从实际问题出发，从学生容易理解的角度自然地、直观地引入数学概念和定义，淡化数学严密的理论体系，突出培养学生的知识应用能力；并借助于常用数学软件训练学生的实际动手操作能力，注重数学作为工具的实用性。

2.小型化、模块化，兼顾包容性和可选择性

我们根据高职院校对数学知识的要求，对数学课内容进行重组，总共设立了5个模块。各专业可根据自己的专业特点和相应职业岗位的需求选择不同的模块进行教学，把“必需、够用”的尺度掌握在各专业自己手中，更好的发挥数学知识为专业服务的功能。同时，每本教材都精选了大量例题，涵盖几何学、经济学、力学、工程学和电学等方面，任课教师可根据专业需要和学生基础选讲其中的合适例题，真正做到因材施教。

3.注重学生逻辑思维能力的培养

通过数学课如何培养学生的逻辑思维能力仍是一项重要任务。根据高职教育的特点，我们着重直观地讲解推理过程，尽量少用抽象的严格的逻辑，同时通过对学生学习过程中常见错误的纠正，培养学生正确的逻辑思维方法。

如何选择数学课的内容，如何让学生对数学产生兴趣，并让学生掌握今后工作和学习需要的数学知识和抽象思维能力，都需要我们通过实践不断改进和提高。由于改革和探索的时间较短，加上水平的限制，书中定有许多不足甚至错误之处，敬请老师和同学们不吝赐教。

编 者

2007年5月

目　录

第1章　函　　数

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学.所谓函数就是变量之间的对应关系.本章从讨论函数概念开始，通过对一般函数特性的概括，并引进初等函数概念，为学习"高等数学"打下基础.

1.1　函　　数

1.1.1　集合

集合概念是数学中一个原始的概念，如：一个书柜中的书构成的集合，一个班级的学生构成的集合，全体实数构成的集合，等等.一般地说，所谓集合（或简称集）是指具有特定性质的一些事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素.本书以大写拉丁字母表示集合.事物 a 是集合 M 的元素，记作 $a \in M$（读作 a 属于 M）；事物 a 不是集合 M 的元素，记作 $a \notin M$（读作 a 不属于 M）.

一个集合如果已经给定，则对于任何事物都能判定它是否属于这个集合.因此要给定一个集合 M，实质上就是要给出一个判别法则，根据这个法则，对于任何事物 a 能判别 $a \in M$ 或 $a \notin M$，两者究竟哪一个成立（两者中必有一个且只有一个成立）.

由有限个元素组成的集合，可用列举出它的全体元素的方法来表示.例如：由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A，可记作

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用如下的记号表示：设 M 是具有某个

特征的元素 x 的全体所组成的集合，就记作

$$M=\{x\mid x\text{ 所具有的特征}\}$$

例如，平面上坐标适合方程 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y) 的全体所组成的集合 M，可记作

$$M=\{(x,y)\mid x,y\text{ 为实数},x^2+y^2=1\}$$

这个集合 M 实际上就是 xOy 平面上以原点 O 为中心，半径等于1的圆周上的点的全体所组成的集合.

全体实数组成的集合通常记作 $\mathbf{R}$，即

$$\mathbf{R}=\{x\mid x\text{ 为实数}\}$$

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是实数.

若在一直线上(通常画水平直线)确定一点为原点，标以 O，指定一个方向为正方向(通常把指向右方规定为正方向)，并规定一个单位长度，则称这样的直线为数轴. 任一实数都对应数轴上唯一的点；反之，数轴上每一点都唯一地表示一个实数. 正由于全体实数与数轴上的所有点有一一对应关系，所以在以下的叙述中，将把“实数 a”与“数轴上的点”两种说法看作有相同的含义，而不加以区别.

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$. 数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$. 类似地可说明

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开半闭区间.

以上这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长为有限的线段(图 1-1).

此外还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大) 及 $-\infty$(读作负无穷大)，则无限的半开或开区间表示如下：

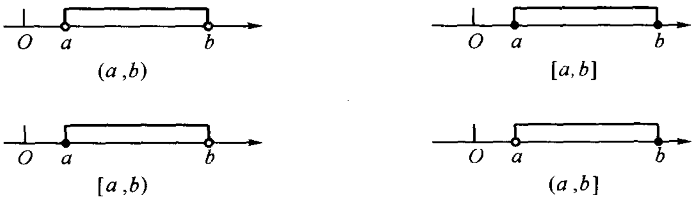

图 1-1

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$$
$$(a,+\infty)=\{x \mid x > a\}$$
$$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x < b\}$$

数集$[a,+\infty)$及$(-\infty,b]$称为无限的半开区间，数集$(a,+\infty)$及$(-\infty,b)$称为无限的开区间. 它们在数轴上表示为长度为无限的半直线(图 1-2).

图 1-2

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也记作$(-\infty,+\infty)$，它也是无限的开区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$. 数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

点 a 叫做 $U(a,\delta)$ 的中心，δ 叫做 $U(a,\delta)$ 的半径. 因为 $|x-a|<\delta$ 相当于

$$-\delta<x-a<\delta,\text{ 即 }\quad a-\delta<x<a+\delta$$

所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

由此看出，$U(a,\delta)$ 也就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$，这个开区间以点 a 为中心，而长度为 2δ(图 1-3)

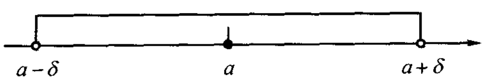

图 1-3

在数轴上，$|x-a|$ 表示点 x 与 a 点之间的距离，因此点 a 的 δ 邻域

$$\bigcup(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

在数轴上表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体，这正是开区间$(a-\delta,a+\delta)$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心邻域，记作 $\bigcup(\hat{a},\delta)$，即

$$\bigcup(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 就是表示 $x\neq a$.

1.1.2 函数概念

在研究自然、社会，以及工程技术的某个过程时，经常会遇到各种不同的量.这些量一般可以分为两类：一类量在所研究的过程中保持不变，这样的量称为常量；另一类量在所研究过程中是变化的，这样的量称为变量.

例如，在自由落体过程中，物体垂直下落的距离与时间关系为

$$h=\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2$$

其中 t 为时间，g 为重力加速度.在这个过程中，时间 t 和距离 h 为变量，重力加速度 g 为常量，且两个变量 t 与 h 之间有一定的对应关系.当其中一个量 t 在某数集$(t\geqslant 0)$内取值时，另一个量 h 按一定的规则(公式 $h=\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2$)有唯一确定的值与之对应.变量之间的这种数量关系就是函数关系.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空实数集，若对于每一个数 $x\in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\qquad x\in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量；数集 D 称为该函数的定义域.

定义域 D 是使函数 $y=f(x)$ 有意义的自变量 x 的取值范围.

当 x 取值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.当 x 遍取数集 D 中的所有数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$w=\{y \mid y=f(x),\quad x\in D\}$$

称为函数的值域.

由函数的定义可知，决定一个函数有两个要素：定义域 D，对应法则 f.注意到由一个 $x\in D$ 通过 f 可唯一确定函数值 $y=f(x)$，因此值域 w 就相应地

被确定了.因此,在高等数学中两个函数相同是指它们的定义域和对应法则分别相同.

例如,函数

$$f(x)=\ln x^2 \quad 与 \quad g(x)=2\ln|x|$$

是相同的函数,因为这两个函数的定义域都是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,根据对数的性质知

$$\ln x^2=2\ln|x|$$

即这两个函数的对应法则是相同的,而函数

$$f(x)=\ln x^2 \quad 与 \quad \varphi(x)=2\ln x$$

是不同的函数,前者的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而后者的定义域为$(0,+\infty)$.

函数的表示方法一般有三种:图形法、表格法和解析法.

在用解析法表示的函数中,有以下两种需要指明的情形:

1.1.2.1 分段函数

对于一个函数,在其定义域的不同部分用不同数学式来表达,称为分段函数.

例如,函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & -3<x<0 \\ 3, & x=0 \\ 2x-1, & 0<x\leqslant 5 \end{cases}$$

就是分段函数,它的定义域是$(-3,5]$.

例如,函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为符号函数,也是分段函数,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$.

1.1.2.2 显函数与隐函数

若因变量 y 用自变量 x 的数学式直接表示出来,即等号一端只有 y,而另一端是 x 的解析式,这样的函数称为显函数.

例如 $y=\sin x, y=\sqrt{1-x^2}$ 都是显函数.

若两个变量 x 与 y 之间的函数关系用方程来 $F(x,y)=0$ 表示,则称为隐

函数,例如 $x^2+y^2=1$,$\sin(x+y)-e^{xy}=5$ 都是隐函数.

1.1.3 函数的几种特性

1.1.3.1 函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

如果对于任意 $x\in D$,$f(-x)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于任意 $x\in D$,$f(-x)=-f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如,$f(x)=x^2$ 是偶函数,$f(x)=x^3$ 是奇函数. 如图 1-4.

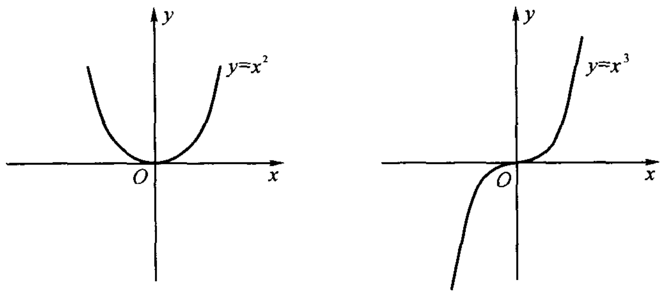

图 1-4

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

1.1.3.2 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对于 I 中的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有

(1)$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上是严格单调增加的;

(2)$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上是严格单调减少的.

严格单调增加的函数和严格单调减少的函数统称为单调函数.

若沿 x 轴的正方向看,单调增加函数的图形是一条上升的曲线;单调减少函数的图形是一条下降的曲线.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的,在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的;在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.

1.1.3.3 函数的有界性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在正数 M,使得对任意的

$x \in I$ 有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数；否则称 $f(x)$ 在区间 I 是无界函数.

有界函数的图形必介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间.

例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 在区间$[2,+\infty)$有界，$\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$；而在区间$(0,1)$内无界. 如图 1-5.

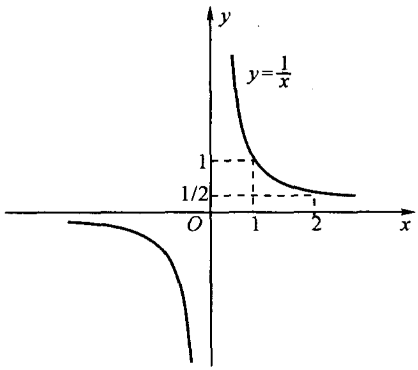

图 1-5

1.1.3.4　函数的周期性

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个非零正常数 T，对于 D 内所有 x，$x \pm T \in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 都成立，则称 $f(x)$ 是周期函数，称 T 是它的一个周期. 通常称一个周期函数的周期是指它的最小周期.

例如，$\sin(\dfrac{\pi}{3}+2\pi)=\sin\dfrac{\pi}{3}$，$\sin(x+2\pi)=\sin x$，$\sin(x+2k\pi)=\sin x$，$k=\pm 1,\pm 2,\cdots$ 即 $2\pi,4\pi,\cdots$ 都是函数 $y=\sin x$ 的周期，2π 是它的最小周期，称为正弦函数的周期.

1.1.4　反函数

对函数 $y=2^x$，x 是自变量，y 是因变量，若由此式解出 x，得到关系式

$$x=\log_2 y$$

在上式中，若把 y 看作自变量，x 看作因变量，则由 $x=\log_2 y$ 所确定的函数称为已知函数 $y=2^x$ 的反函数.

习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，把 $x=\log_2 y$ 改写成 $y=$

$\log_2 x$.

由图 1-6 可知,函数 $y = 2^x$ 与它的反函数 $y = \log_2 x$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

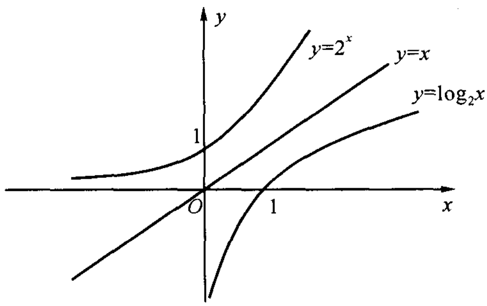

图 1-6

定义 1.6　已知函数 $y = f(x), x \in D, y \in w$
若对每一个 $y \in w$,D 中只有一个 x 值,使得

$$f(x) = y$$

这就以 w 为定义域确定了一个函数,这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数,记作

$$x = f^{-1}(y), \qquad y \in w$$

按习惯记法,x 作自变量,y 作因变量,函数 $y = f(x)$ 的反函数记作

$$y = f^{-1}(x), \qquad x \in w$$

事实上,$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数,且 $y = f(x)$ 的定义域是 $y = f^{-1}(x)$ 的值域,$y = f(x)$ 的值域是 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域. 由定义知,若函数 $y = f(x)$ 具有反函数,这意味着它的定义域 D 与值域 w 之间按对应法则 f 建立了一一对应关系. 因此,单调函数必有反函数,而且单调增加(减少) 函数的反函数也是单调增加(减少) 的.

例如　$y = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$　没有反函数

$y = x^2, x \in [0, +\infty)$ 有反函数　$y = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$

$y = x^2, x \in (-\infty, 0]$ 有反函数　$y = -\sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$

在同一直角坐标系下,函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

习题 1.1

1. 用集合符号写出下列集合：

(1) 大于 30 的所有实数的集合；

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 上所有的点组成的集合；

2. 按下列要求举例：

(1) 一个有限集合；　　(2) 一个无限集合；　　(3) 一个空集.

3. 在数轴上画出满足下列条件的所有 x 的集合：

(1) $|x-a|<\delta$，a 为常数，$\delta>0$　　(2) $1<|x-2|<3$

4. 求下列函数值：

(1) 若 $f(x)=x\cdot 4^{x-2}$，求 $f(2)$，$f(t^2)$，$f(-2)$，$f(\frac{1}{t})$

(2) 若 $\varphi(t)=t^3+1$，求 $\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$，$\varphi(\varphi(0))$

5. 求下列函数值：

(1) 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$

(2) 若 $g(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 求 $g(3)$，$g(2)$，$g(0)$，$g(0.5)$，$g(-0.5)$

(3) 若 $\Psi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $\Psi(1)$，$\Psi(\frac{3\pi}{4})$，$\Psi(-\frac{\pi}{4})$

6. 下列各对函数是否相同，并说明理由.

(1) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$，$g(x)=1$　　(2) $f(x)=x-2$，$g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

(3) $f(x)=2\lg x$，$g(x)=\lg x^2$　　(4) $f(x)=\sqrt{2^{2x}}$，$g(x)=2^x$

7. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$　　(2) $y=\sqrt{3x+4}$

(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$　　(4) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$

(5) $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$　　(6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

8. 设生产与销售产品的总收入 R 是产量 x 的二次函数，经统计得知：当产