主编 周慧波 陆诗荣 刘 莉

数学建模教程

哈尔滨地图出版社

数学建模教程

SHUXUE JIANMO JIAOCHENG

主　编　周慧波　陆诗荣　刘　莉

副主编　杨桂芳

哈尔滨地图出版社

·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

数学建模教程/周慧波,陆诗荣,刘莉主编 .—哈尔滨:哈尔滨地图出版社,2006.12
ISBN 7-80717-513-3

Ⅰ.数... Ⅱ.①周...②陆...③刘... Ⅲ.数学模型 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 162018 号

哈尔滨地图出版社出版发行
(地址:哈尔滨市南岗区测绘路 2 号 邮编:150086)
哈尔滨庆大印刷厂印刷
开本:850 mm×1 168 mm 1/32 印张:10.875 字数:290 千字
2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第 1 次印刷
印数:1~1 000 定价:27.80 元

前　言

近几十年来，随着科学技术的进步，特别是电子计算机的诞生和不断完善，数学的应用已不再局限于物理学等传统领域，生态学、环境科学、医学、经济学、信息科学及一些交叉学科都提出了大量有待解决的实际研究课题。要用定量分析的方法解决这些实际问题，十分关键而又十分困难的一步就是建立恰当的数学模型。建立数学模型的过程需要把错综复杂的实际问题抽象为简单合理的数学结构，要做到这一点，既需要有丰富的想象力，又需要去寻找较合适的数学工具，从某种意义上讲，它是能力与知识的综合运用。在传统的大学教育中，往往比较重视知识的传授，而能力的培养则常常被忽略了。为了使大学教学更加适合社会的需求，传统的数学内容与模式必须有所改革，在这方面各级领导和许多教育工作者已经作了大量的努力和尝试。

数学建模是对大学生掌握专业知识和教学理论方法，分析和解决问题的能力，以及用计算机进行运算能力的全面考验，是对创新能力和实践能力进行素质培养的有效手段。因此数学建模作为一门课程迅速进入我国高等学校，受到学生们欢迎，发展非常快。

本书是在编者为我校大学生开设的数学建模课程而编写的讲义的基础上形成的。在编写本书过程中力求简练明了，使读者容易从实际问题的建模及解决中抓住主要思想。应该指出的是，培养一种“建模”的数学思维往往要比学会几门课程有用得多。另外，本书注重数学知识的应用性与趣味性的结合，书中所选问题既实际又有趣味性，从而使数学的实用性比较容易地被读者接受。

本书共分 10 章，考虑到现在计算机软件在数学上的广泛应用，

我们后3章介绍了MATLAB在数值分析、概率统计及优化问题中的应用,使学生掌握基本的MATLAB的操作及简单编程。

本书在编写过程中得到了系里领导和老师的热心帮助,在此表示衷心感谢,本书的第4章是由副主编杨桂芳编写,杨老师集自己多年在常微分方程数学中的经验,编写此部分,在此向她为本书的顺利出版而做出的努力表示深深的谢意。

限于编者水平有限,书中难免有不妥和错误之处,恳请同行与读者批评指教,以便更正提高。

编　者

2006年12月

目　录

第 1 章　数学建模概论 …… 1

1.1　从现实对象到数学模型 …… 2

1.2　数学建模的重要意义 …… 5

1.3　数学建模的基本方法和步骤 …… 8

1.4　数学模型的特点和分类 …… 11

1.5　数学建模能力的培养 …… 15

1.6　数学建模示例 …… 17

第 2 章　差分方程及其建模 …… 23

2.1　差分方程模型 …… 23

2.2　差分方程的解法 …… 24

2.3　差分方程的平衡点及稳定性 …… 30

2.4　建模案例 …… 32

第 3 章　初等模型 …… 45

3.1　基本应用实例 …… 45

3.2　公平席位的分配 …… 76

3.3　状态转移法 …… 80

3.4　雨中行走问题 …… 86

3.5　动物的身长与体重 …… 90

第 4 章　微分法建模 …… 93

4.1　存储模型 …… 93

4.2　森林救火模型 …… 96

4.3　最优价格问题 …… 98

4.4　走路步长的选择 …… 100

4.5　肿瘤的生长规律 …… 102

4.6 磁盘的最大存储量 …… 106
4.7 通信卫星的覆盖面积 …… 108
4.8 水的流出时间 …… 110
4.9 追击问题 …… 111
4.10 最速降线问题 …… 113
4.11 交通管理中黄灯的时间问题 …… 116
4.12 新产品的销售量 …… 118
第5章 微分方程模型 …… 121
5.1 概述 …… 121
5.2 微分方程系统 …… 122
5.3 基本应用实例 …… 124
5.4 扫雪时间问题 …… 134
5.5 传染病模型 …… 136
5.6 战争模型 …… 142
5.7 糖尿病的检测问题 …… 151
5.8 动物种群的相互竞争与相互依存模型 …… 156
5.9 万有引力定律 …… 165
5.10 香烟过滤嘴的作用 …… 169
第6章 数学规划模型 …… 175
6.1 线性规划模型 …… 175
6.2 整数规划模型 …… 189
6.3 多目标决策模型 …… 203
6.4 非线性规划模型 …… 220
第7章 概率模型 …… 229
7.1 盥洗室问题 …… 229
7.2 传送系统的效率 …… 232
7.3 广告中的学问 …… 235

7.4　聪明的报童 …………………………………………… 240
7.5　轧钢中的浪费 …………………………………………… 242
7.6　工厂所需原材料的定购 …………………………………… 246
第 8 章　MATLAB 在数值分析中的应用 …………………………… 251
8.1　多项式 …………………………………………………… 252
8.2　插值与拟合 ……………………………………………… 256
8.3　方程组求解 ……………………………………………… 265
8.4　常微分方程数值解 ……………………………………… 277
第 9 章　MATLAB 在概率统计中的应用 …………………………… 280
9.1　统计量的数字特征 ……………………………………… 280
9.2　常用的统计分布 ………………………………………… 289
9.3　参数估计 ………………………………………………… 300
9.4　假设检验 ………………………………………………… 304
第 10 章　MATLAB 在优化问题中的应用 ………………………… 311
10.1　线性规划问题 …………………………………………… 311
10.2　非线性规划问题 ………………………………………… 313
10.3　极小化极大(Minmax)问题 ……………………………… 319
10.4　多目标规划问题 ………………………………………… 322
附录
第 1 章　习　题 ………………………………………………… 327
第 2 章　习　题 ………………………………………………… 328
第 3 章　习　题 ………………………………………………… 329
第 4 章　习　题 ………………………………………………… 331
第 5 章　习　题 ………………………………………………… 332
第 6 章　习　题 ………………………………………………… 333
第 7 章　习　题 ………………………………………………… 337
参考文献 ………………………………………………………… 340

第 1 章　数学建模概论

随着科学技术的迅速发展,数学模型这个词汇越来越多地出现在现代人的生产、工作和社会活动中,电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型。用这个模型对控制装置做出相应的设计和计算,才能实现有效的过程控制。气象工作者为了得到准确的天气预报,一刻也离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型。生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型,可以分析药物的疗效,有效地指导临床用药。城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型,为领导层对城市规划的决策提供科学依据。厂长经理们要是能够根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮存费用等信息,筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型,一定可以获得更大的经济效益。就是在日常生活如访友、采购当中,人们也会谈论找一个数学模型,优化一下出行的路线。对于广大的科学技术人员和应用数学工作者来说,建立数学模型是沟通摆在面前的实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁。

本书作为全书的导言和数学模型的概述,主要讨论建立数学模型的意义、方法和步骤,给读者以建立数学模型的全面的、初步的了解。1.1 节介绍了现实对象和它的模型的关系,给出一些模型形式,说明什么是数学模型;1.2 节阐述建立数学模型的重要意义;1.3 节给出了数学建模的基本方法和步骤; 1.4 节主要讨论了数学模型的特点和分类; 1.5 节简要介绍数学建模能力的培养;1.6 节给出几个简单的数学建模示例。

1.1 从现实对象到数学模型

人类生活在丰富多彩、变化万千的现实世界里，无时无刻不在运用智慧和力量去认识、利用、改造这个世界，从而不断地创造出日新月异、五彩缤纷的物质文明和精神文明。博览会常常是集中展示这些成果的场所之一，那些五光十色、精美绝伦的展品给我们留下了深刻印象。工业展览会上，舒适的新型汽车叫人赞叹不已；农业博览会上，硕大娇艳的各种水果令人流连忘返；科技展厅里，大型水电站模型雄伟壮观，人造卫星模型高高耸立，清晰的数字图表显示着电力工业的迅速发展，和整面墙壁一样大的地图上鲜明地标出了新建的铁路和新辟的航线，核电站工程的彩色剧照前，手持原子结构模型的讲解员深入浅出地介绍反应堆的运行机理，电影演播室里，播放这一部现代化炼钢厂实现生产自动控制的科技影片，其中既有火花四溅的钢坯浇铸情景，也有战士计算机管理和控制的框图公式和程序。

参观展览会，像汽车、水果那些原封不动地从现实世界搬到展厅里的物品固然给人一种亲切的感觉，可是从开阔眼界，丰富知识的角度看，电站、卫星、铁路、钢厂等这些在现实世界被人们认识、建造、控制的对象，以它们的各种形式的模型实物模型、照片、图表、公式、程序等汇集在人们面前，这些模型在短短几小时里所起的作用，恐怕是置身现实世界多少天也无法做到的。

与形形色色的模型相对应，他们在现实世界里的原始参照物通称为原型。本节先讨论原型和模型，特别是数学模型的关系，再介绍数学模型的含义。

原型和模型 原型和模型是一对对偶体。原型指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产管理的实际对象。在科技领域通常使用系统工厂等词汇，如电力系统、生态系统，又如钢铁冶炼过程、化学

反应过程等。本书所属的现实对象、研究对象、实际问题等均指原型。模型是指为了某个特定目的将原型的某一部分信息减缩、提炼而构造的原型替代物。

这里特别强调构造模型的目的性。模型不是原型原封不动的复制品,原型由各个方面和各个层次的特征,而模型之要求反映于某种目的的有关的那些方面的层次。一个原型,为了不同的目的可以有许多不同的模型。如放在展厅里的飞机模型应该在外形上逼真,但是不一定会飞,而参加航模竞赛的模型飞机要具有良好的飞行性能,在外观上不必苛求。至于在飞机设计,试制过程中用数学模型和计算机模型,则要求在数量规律上真实反映飞机的飞行动态特性,毫不涉及飞机的实体。所以模型的基本特征是由构造模型的目的决定。

我们已经看到模型的各种形式。用模型替代原型的方法来分类,模型可以分为物质模型和理想模型。前者包括直观模型、物理模型,后者包括思维模型、符号模型、数学模型等。

直观模型　指那些供展览用的实物模型,以及玩具、照片等,通常是把原型的尺寸按照比例缩小或放大,主要追求外观上的逼真,这类模型的效果是一目了然的。

物理模型　主要指科技工作者为一定目的根据相似原理构造的模型,它不仅可以显示原型的外观或某些特征,而且可以用来进行模拟试验,间接地研究原型的某些规律。如波浪水相中的舰艇模型用来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能等,有些现象直接用于原型研究非常困难,更可借助于这类模型,如地震模拟装置等。应注意验证原型与模型之间的相似关系,已确定模拟结果的可靠性。物理模型常可得到实用上很有价值的结果,但也存在成本高、时间长、不灵活的缺点。

思维模型　指通过人们对模型的反复认识,将获取的知识以经验形式直接储存于人脑中,从而可以根据思维和知觉做出相应的决

策。如汽车司机队方向盘的操纵，一些记忆性较强的工作的操作，大体上是靠这类模型进行的。思维模型便于接受，也可以在一定条件下得出满意结果，但是它往往带有模糊性、片面性、主观性、偶然性等缺点，难以对它的假设条件进行检验，并且不便与人沟通。

符号模型 是在一定约定条件下或假设下借助于专门的符号、线条等，按一定形式组合起来的描述原型。如地图、电路图、化学结构式等。具有简单明了、目的性强及非量化的特点。本书专门讨论的数学模型则是由数字、字母或其它数学符号组成的，描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法。

与数学模型有密切关系的数学模拟，主要是运用数字式计算机的计算机模拟。它根据实际系统或过程的特性，按照一定数学规律用计算机程序语言模拟实际运作状况，并依据大量模拟结果对系统或过程进行定量分析。例如通过各种工件在不同机器上按一定工艺顺序加工的模拟，能够识别生产过程中的瓶颈环节；通过高速公路上交通情况的模拟，可以分析车辆在路段上的分布特别是堵塞的状况。与用物理模型的模拟实验相比，计算机模拟有明显的优点：成本低，时间短，重复性高，灵活性强，有人把计算机模拟作为建模的手段之一，但是数学模型在某种一条件下描述了对象内在特性的数量关系，其结果容易推广，特别是得到了解析形式的答案时，更容易推广。而计算机模拟则完全模仿实际演变过程，难以得到的数字结构分析对象的内在规律。当然，对于那些因内部机理过于复杂，目前尚难以建立数学模型的实际对象，用计算机模拟获得一些定量结果，可称是解决问题的有效手段。

什么是数学模型 数学模型应该说是每个人都十分熟悉的。早在学习初等代数的时候我们就已经用建立数学模型的方法来解决实际问题了。当然其中许多问题是老师为了教会学生知识而人为设置的。譬如你一定解过这样的所谓“航行问题”：

甲乙两地相距 750 千米，船从甲到乙顺水航行需 30 小时，从乙到甲逆水航行需 50 小时，问船速、水速各为多少？

用 x,y 分别代表船速和水速，可以列出方程：

$$(x+y)\cdot 30=750 \qquad (x-y)\cdot 50=750$$

实际上，这组方程就是上述航行问题的数学模型，列出方程，原问题已转化为纯粹的数学问题，方程的解，$x=20$(km/h)，$y=5$(km/h)，最终给出了航行问题的答案。

当然，真正的实际问题的数学模型通常要复杂得多，但是数学模型的基本内容已经包含在解这个代数问题的过程中了。那就是：根据建立数学模型的目的和问题的背景做出必要的假设；用字母表示待求的未知量；用相应的物理或其它规律列出数学式子，求出数学上的解答；用这个答案解释原问题；最后还要用实际现象来验证上述结果。

一般地说，数学模型可以描述为，对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。需要指出，本书的重点不在于介绍显示对象的数学模型是什么样子，而是要讨论建立数学模型的全过程，建立数学模型简称为数学建模或建模。

1.2　数学建模的重要意义

数学，作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直是和人们生活的实际需要密切相关的。作为用数学方法解决实际问题的第一步，数学建模自然有着与数学同样悠久的历史。两千多年以前创造的欧几里德几何，17 世纪发现的牛顿万有引力定律，都是科学发展史上数学建模的成功范例。进入 20 世纪以来，随着数学以空前的广度和深度向一切领域的渗

透，和电子计算机的出现与飞速发展，数学建模越来越受到人们的重视，可以从以下几方面来看数学建模在现实世界中的重要意义。

(1)在一般工程技术领域，数学建模仍然大有用武之地

在以声、光、热、力、电这些物理学科为基础的诸如机械、电机、土木、水利等工程技术领域中，数学建模的普遍性和重要性不言而喻。虽然这里要用数学方法解决的新问题；高速、大型计算机的飞速发展，使得过去即便有了数学模型也无法求解的课题(如大型水坝的应力计算，中长期天气预报等)迎刃而解；建立在数学模型和计算机模拟基础上的 CAD 技术，以其快速、经济、方便等优势，大量地替代了传统工程设计中的现场实验、物力模拟等手段。

(2)在高新技术领域，数学建模几乎是必不可少的工具

无论是发展通讯、航天、微电子、自动化等高新技术本身，还是将高新技术用于传统工业去创造新工艺、开发新产品，计算机技术支持下的建模和模拟都是经常使用的有效手段。数学建模、数值计算和计算机图形学等相结合形成的计算机软件，已经被固化与产品中，在许多高新技术领域起着核心作用，被认为是高新技术的特征之一。在这个意义上，数学不再仅仅作为一门科学，是许多技术的基础，而且直接走向了技术的前台。国际上一位学者就提出了“高技术本质上是一种数学技术”的观点。

(3)数学迅速进入一些新领域，为数学建模开拓了许多新的处女地

随着数学向诸如经济、人口、生态、地质等所谓非物理领域的渗透，一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、数学生态学、数学地质学等应运而生。这里一般地说不存在作为支配关系的物理定律，当用数学方法研究这些领域中的定量关系时，数学建模就成为首要的、关键的步骤和这些学科发展与应用的基础。在这些领域里建立不同类型、不同方法、不同深浅程度的模型的余地相当大，为数学建模提

供了广阔的新天地。马克思说过“一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步”。展望 21 世纪，数学必将大踏步地进入所有学科，数学建模将迎来蓬勃发展的新时期。

今天，在国民经济和社会活动的以下诸多方面，数学建模都有着非常具体的应用。

分析与设计 例如描述药物浓度在人体内的变化规律以分析药物的疗效；建立跨音速流和激波的数学模型，用数值模拟设计新的飞机翼型。

预报与决策 生产过程中产品质量指标的预报、气象预报、人口预报、经济增长预报等，都要有预报模型；使经济效益最大的价格策略、使费用最少的设备维修方案，是决策模型的例子。

控制与优化 电力、化工生产过程的最优控制、零件设计中的参数优化，要以数学模型为前提。建立大系统控制与优化的数学模型，是迫切需要和十分棘手的课题。

规划与管理 生产计划、资源配置、运输网络规划、水库优化调度，以及排队策略、物资管理等，都可以用数学规划模型解决。

数学建模与计算机技术的关系密不可分。一方面，像新型飞机设计、石油勘探处数据处理中数学模型的求解当然离不开巨型计算机，而微型电脑的普及更使数学建模逐步进入人们的日常生活。比如当一位公司经理根据客户提出的产品数量、质量、交货期等要求，用手提电脑与客户进行价格谈判时，您不会怀疑他的电脑中贮存了由公司的各种资源、产品工艺流程及客户需求等数据研制的数学模型。快速报价系统和生产计划系统。另一方面，以数字化为特征的信息正以爆炸之势涌入计算机，去伪存真、归纳整理、分析现象、显示结果……，计算机需要人们给它以思维的能力，这些当然要求助于数学模型。所以把计算机技术与数学建模在知识经济中的作用比作为如虎添翼，是恰如其分的。

美国科学院一位院士总结了将数学科学转化为生产力过程中的成功和失败,得出了“数学是一种关键的、普遍的、可以应用的技术”的结论,认为数学“由研究到工业领域的技术转化,对加强经济竞争力具有重要意义”。而“计算和建模重新成为中心课题,它们是数学科学技术转化的主要途径”。

1.3 数学建模的基本方法和步骤

数学建模面临的问题是多种多样的,建模的目的不同,分析方法不同,采用的数学工具不同,所得的模型的类型也不同,我们不能指望归纳出若干条准则,适用于一切实际问题的数学方法。下面所谓基本方法不是针对具体问题而是从方法论意义上讲的。

数学建模的基本方法

一般来说建模方法大体上可分为机理分析和测试分析两种。机理分析是根据对客观事物特性的认识,找出反映内部机理的数量规律,建立的模型有明确的物理和现实意义。测试分析将研究对象看作一个黑箱系统,通过系统输入、输出数据的测量和统计分析,按照一定准则找出与数据拟合的最好的模型。

面对一个实际问题用哪一种方法建模,主要取决于人们对研究对象的了解程度和建模目的。如果掌握了一些内部机理的知识,模型也要求具有反映内在特性的物理意义,建模就应以机理分析为主。而如果对象的内部规律基本上不清楚,模型不需要反省内部特性,那么就可用测试分析。

对于许多实际问题还常常讲两种方法同时使用,即用机理分析建立模型的结构,用测试分析确定模型的参数。1.5 的人口模型就是这种情况。

机理分析当然要针对具体问题来做,不可能有统一的方法,因为

主要是通过实例分析来学习。测试分析有一套完整的数学方法,第十张统计线性回归是其中一小部分。以动态系统为主的测试分析称为系统辨识,是一门专门的学科。

数学建模一般步骤　建模要经过那些步骤并没有一定的模式,通常与问题性质、建模目的等有关。下面介绍的是机理分析方法建模的一般过程,如图 1.1 所示。

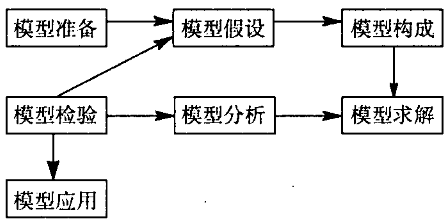

图 1.1　数学建模步骤示意图

模型准备　了解问题的实际背景,明确建模目的,搜集必要的信息如现象、数据等,进量弄清对象的主要特征,形成一个比较清晰的问题,由此初步确定用哪一类模型。在模型准备阶段要深入调查研究;虚心向实际工作者请教,进量掌握第一手资料。

模型假设　根据对象的特征和建模目的,抓住问题的本质,忽略次要因素,做出合理的、必要的简化假设。对于建模的成败这是非常重要和困难的一步。假设作得不合理或太简单,会导致错误或无用的模型:假设做得过于详细,试图把复杂对象的众多因素都考虑进去,会使你很难或无法进行下一步的工作。常常需要在合理与简化之间做出恰当的折衷。通常,作为假设的依据,一是出于对问题内在规律的的认识,二是来源于对现象数据的分析,以及二者的综合。想象力,洞察力,判断力,以及经验,在模型中的重要作用。