应用带电粒子光学

（上册）

唐 天 同

西安交通大学
电子工程系物理电子技术教研室
一九八五年二月

序 言

带电粒子光学研究各种带电粒子在电场中的运动，特别是带电粒子束的形成、聚焦、成像和偏转等"光学"性质。由于带电粒子光学（电子光学）的理论概念形成与微粒运动的力学与光传播规律的相似性有关，这门学科带有"光学"的名称，并沿用了许多光线光学中的术语及方法，但带电粒子光学具有许多区别于光线光学的独特的特点。在早期，这门学科主要研究对象是电子和电子束。目前，作为技术物理学的一个分支，它的研究对象包括各种离子和核科学的各种粒子，渗透到电子器件、电子离子束工艺、电子显微学质谱学、表面物理、材料科学、核科学和粒子物理，等离子体物理和微细加工技术等多种科学技术领域，对现代科学技术和工程的发展起到了重大的作用；带电粒子光学的理论概念，计算和实验技术也有了很大发展。

完整的带电粒子光学包括了非常多的内容，不可能在本书的篇幅内作充分的叙述。本书主要讨论带电粒子光学的基本原理和设计研制与改进带电粒子光学仪器、器件和装置系统有关的一些方法和技术，包括带电粒子运动的一般原理，轴对称(圆透镜）系统、直轴多极场系统、偏转系统、偏转聚焦分析器、高亮度电子离子源、场的决定、电子轨迹与光学参量的决定和光学参量优化技术简介。限于篇幅，本书将不讨论与微波管等应用联系的强空间电荷光学问题以波动力学方法为基础的电子显微镜电子像的形成和处理问题和束流传输理论，近年来发展极快的各种新的内容也只作非常简单的介绍。

本书采用国际单位制（SI制），各公式中凡未特殊指明者均用SI制单位，即长度单位用米（m），质量单位用千克（kg），时间单位用秒（S），电流强度用安培（A），温度单位用开尔文（K）等。下面并列出几个最常用的物理常数：

基本电荷	$-e=1.6021892\times10^{-19}$	库仑
电子荷质比	$-\frac{e}{m_e}=1.7588047\times10^{11}$	库仑／千克
真空中光速	$c=299792458$	米／秒
真空介电常数	$\varepsilon_0=8.854187818\times12^{-12}$	法拉／米
真空磁导率	$\mu_0=12.5663706\times10^{-7}$	亨利／米
普朗克常数	$h=6.626176\times10^{-34}$	焦尔·秒
波尔兹曼常数	$k=1.380662\times10^{-23}$	焦尔／开尔文
电子静止质量	$m_e=9.109534\times10^{-31}$	千克
质子静止质量	$m_p=1.6726485\times10^{-27}$	千克
电子伏特	$1eV=1.6021892\times10^{-19}$	焦尔

第一章　带电粒子运动的一般原理

§1　牛顿型运动方程

带有电荷e，以运动速度$\underline{v}$在场向量为电场强度$\underline{E}$，磁感强度$\underline{B}$的电磁场中，运动的粒子，受到所谓洛仑兹力

$$\underline{F} = e\underline{E} + e\underline{v}\times\underline{B} \tag{1}$$

显然(1)式中洛仑兹力$\underline{F}$可视为电力$e\underline{E}$与磁力$e\underline{v}\times\underline{B}$二部份。电力与电场强度$\underline{E}$方向相同或相反，而磁力与粒子的运动方向相垂直，因而磁力不能作功，仅电场力使粒子加速或减速。e为电荷，对于电子及负离子，e为负值。

在洛仑兹力作用下，粒子的动量$\underline{p}$将按牛顿方程变化：

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = e\underline{E} + e\underline{v}\times\underline{B} \tag{2}$$

若粒子运动速度比光速小得多，则其质量可以认为是恒定的（用静止质量m_0表示），而动量$\underline{p} = m_0\underline{v}$。由此，牛顿方程可写为

$$m_0\frac{d\underline{v}}{dt} = e\underline{E} + e\underline{v}\times\underline{B} \tag{3}$$

在粒子以高速运动的场合，即必须考虑相对论效应时，不能不考虑到粒子质量随着其速度而变化。这时，粒子的动量按相对论为

$\underline{p} = \dfrac{m_0\underline{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$，式中$\beta = \dfrac{v}{c}$，c为真空中光速。(2)式转化为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\underline{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = e\underline{E} + e\underline{v}\times\underline{B} \tag{4}$$

由(3)及(4)式，磁力均与粒子速度 $\underline{v}$ 相垂直而不作功，故粒子的能量变化显然仅由电场决定。用速度 $\underline{v}$ 对(4)式两端进行数量积，可得：

$$\underline{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\underline{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=e\underline{E}\cdot\underline{v}$$

而

$$\underline{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}v\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$e\underline{E}\cdot\underline{v}=e\underline{E}\cdot\frac{d\underline{r}}{dt}=-\frac{dU}{dt}$$

式中 U 为电场的电位，故

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+eU\right)=0$$

或

$$d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+eU\right)=0 \tag{5}$$

设粒子处于静止处（$\beta=0$）电位为零，以后我们对这样定义的电位特以符号 U_* 表示，则(5)式可推演成

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-m_0c^2=-eU_* \tag{6}$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+eU_*=\text{常数} \tag{7}$$

若 m_0c^2 视为粒子的静止质量相联系的静止能量（对于电子，

为0.5110034MeV），则(6)式说明粒子在场中任意一点的动能（因而速度），完全由该点的电位 U_* 决定；而(7)式则表述了能量守恒定律，粒子的固有静止能量，动能和其在电场中的位能的总和守恒。(6)式还可用来计算粒子的运动速度。考虑到 $\beta=\frac{v}{c}$，可解出

$$v=c\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{|eU_*|}{m_0c^2}\right)^2}} \tag{8}$$

对于电子，取不多的有效数位

$$v_e \doteq 3\times10^8\sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{U_*}{0.511\times10^6}\right)^2}} \quad （米／秒）$$

在低速运动的情况，由(3)式加以变换，可得：

$$m_0 v\cdot\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{d}{dt}(-eU)$$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-eU_* \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}mv^2+eU_*=常数=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v=\sqrt{-2\frac{e}{m}U_*} \tag{10}$$

$$v=5.932\times\sqrt{U_*}\quad 米／秒$$

比较(8)及(10)式可看出，当加速电位 U_* 和运动速度 v 较低时，

二式是基本符合一致的，而加速电位很高时，由于粒子质量的增大，(8)式的速度值比(10)式计算值小得很多，而且永远小于光速。但在同样加速电位 U 下，较重的离子比电子的速度低得多，相对论的修正比电子要小。离子运动的计算，要在比电子高得多的电位下才须考虑相对论修正。

向量形式的方程(2)—(4)，一般来说，相当于三个标量方程。在对运动方程积分时常要用标量形式的方程组。在最简单的直角坐标系里（非相对论情形）可写为：

$$\left.\begin{aligned} m_0\ddot{x} &= eE_x+e(\dot{y}B_z-\dot{z}B_y) \\ m_0\ddot{y} &= eE_y+e(\dot{z}B_x-\dot{x}B_z) \\ m_0\ddot{z} &= eE_z+e(\dot{x}B_y-\dot{y}B_x) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

式中圆点代表对时间的导数。在带电粒子光学里常用到其它坐标系。例如对于圆柱坐标系（r，ψ，z），利用两种坐标系间的坐标变换，或利用坐标系单位向量的微分关系，可以得到以下方程组：

$$\left.\begin{aligned} m_0(r-r\dot{\psi}^2) &= eE_r+e(r\dot{\psi}B_z-\dot{z}B_\psi) \\ \frac{m_0}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\psi}) &= eE_\psi+e(\dot{z}B_r-\dot{r}B_z) \\ m_0\ddot{z} &= eE_z+e(\dot{r}B_\psi-r\dot{\psi}B_r) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

以下不经推导给出一般曲线坐标系里的牛顿型运动方程的三个标量微分方程式。设粒子的运动由曲线坐标 q_1，q_2 和 q_3 描述，而（q_1，q_2，q_3）坐标系的兰米（　　）系数为 h_1，h_2 和 h_3，则(2)式代表的向量方程可写为：（p_1，p_2 和 p_3 为动量 $\underline{p}$ 在 q_1，q_2 和 q_3 方向的分量，$\underline{p}=p_1\underline{q}_1^0+p_2\underline{q}_2^0+p_3\underline{q}_3^0$）：

$$\frac{dp_1}{dt}+p_2\left(\frac{\dot{q}_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}-\frac{\dot{q}_2}{h_1}\cdot\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\right)+p_3\left(\frac{\dot{q}_1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3}-\frac{\dot{q}_3}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q_1}\right)=eE_1+e(h_2\dot{q}_2B_3-h_3\dot{q}_3B_2)$$

$$\frac{dp_2}{dt}+p_1\left(\frac{\dot{q}_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}-\frac{\dot{q}_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\right)+p_3\left(\frac{\dot{q}_2}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3}-\frac{\dot{q}_3}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial q_2}\right)=eE_2+e(h_3\dot{q}_3B_1-h_1\dot{q}_1B_3)$$

$$\frac{dp_3}{dt}+p_1\left(\frac{\dot{q}_3}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q_1}-\frac{\dot{q}_1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q_3}\right)+p_2\left(\frac{\dot{q}_3}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial q_2}-\frac{\dot{q}_2}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial q_3}\right)=eE_3+e(h_1\dot{q}_1B_2-h_2\dot{q}_2B_1)$$

………………………………（13）

§2 拉格仑日方程

牛顿型运动方程（§1的方程(3)及(4)已概括了给定电磁场中带电粒子的质点动力学的全部内容。但这种方程应用到曲线坐标系时，其推导比较复杂而缺乏直观意义。应用分析力学中的拉格仑日方程，把曲线坐标作为广义坐标，只要把粒子速度 $\underline{v}$ 及场的位函数U和 $\underline{A}$ 用广义坐标 q_1，q_2，q_3 及其对时间的导函数表示，则拉格仑日方程自动的产生了三个标量的运动方程。

以下不做严格推导，只从直角坐标系里推演出这一拉格仑日方程。

在一个位能函数为W的位场中，作用力可写为

$$F_x=-\frac{\partial W}{\partial x}, \quad F_y=-\frac{\partial W}{\partial y}, \quad F_z=-\frac{\partial W}{\partial z}$$

牛顿方程的加速度项，可以与动能T相联系：

$$m_0\ddot{x}=\frac{d}{dt}(m_0\dot{x})=\frac{d}{dt}\{\frac{\partial}{\partial\dot{x}}[\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)]\}$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}$$

故由牛顿方程可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}+\frac{\partial W}{\partial x}=0$$

由于动能T中不显含坐标x，y，z；位能W只与坐标有关，所以如令函数

$$L=T-W \tag{1}$$

则可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

对y，z分量可有类似的方程。所以一般以q_1，q_2，q_3代表三个坐标，可写为

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i})-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\quad(i=1,\ 2,\ 3)\tag{2}$$

在分析力学里，已证明在q_i为任意坐标时(2)仍成立。

静电场是位场，其位函数为eU（e为粒子电荷，U为电位函数）。因而，很容易写出低速下的电场中粒子的拉格仑日函数

$$L=\frac{m_0v^2}{2}-eU$$

(2)式中，$\dot{q}_i$称为广义速度，$\frac{\partial L}{\partial q_i}$称为广义力，这是由直角坐标系力与位函数的关系引伸而来的。磁场不是位场。由于磁场力

的特殊性质，可以证明，有磁场时也存在一种拉格仑日函数，并可应用拉格仑日方程。

在(2)中，$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$（因W是位能函数，与坐标无关）为广义动量，$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial W}{\partial q_i}$ 为位场决定的力。磁场不是位场，磁场作用力因而不能用上述位能函数对广义坐标的偏导数的形式表述。但是，以下我们将证明，磁场对应的广义力可以表为

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial q_i} \tag{4}$$

的形式。这样，对拉格仑日函数(1)作一定的修正，便可把拉格仑日方程推广到有磁场的情形。

用场向量 $\underline{E}$ 及 $\underline{B}$ 定义的电磁场，可用电位U及向量磁位A表示：

$$\underline{E} = -\nabla U - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}, \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A} \tag{5}$$

§1的牛顿方程因而为

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = e\underline{E} + e\underline{v}\times\underline{B} = e\left[-\nabla U - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \underline{v}\times(\nabla\times\underline{A})\right]$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -e\frac{\partial U}{\partial x} - e\frac{\partial A_x}{\partial t} + e\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - e\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$= -e\frac{\partial U}{\partial x} + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right)$$

$$-e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)$$

$$\frac{dp_x}{dt}=-e\frac{\partial U}{\partial x}-e\frac{dA_x}{dt}+e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$\frac{dp_y}{dt}$，$\frac{dp_z}{dt}$也可按同样方式写出，合起来看，可写为

$$\frac{d\underline{p}}{dt}=-e\left(\nabla U+\frac{d\underline{A}}{dt}\right)+e\nabla(\underline{A}\cdot\underline{v}) \qquad (7)$$

若令 $$M=-e\underline{A}\cdot\underline{v} \qquad (8)$$

则(7)式有关$\underline{A}$的部分正可看为(4)式，令修正拉格仑日函数

$$L=T-W-M \qquad (9)$$

则拉格仑日方程正好与(7)式相同，即与牛顿型方程完全一致。

对于非相对论速度运动的粒子，其拉格仑日函数因而为

$$L=\frac{mv^2}{2}-eU+e\underline{A}\cdot\underline{v} \qquad (10)$$

自然(10)式不适用于以接近光速运动的高速粒子。为了使形如(2)的拉格仑日方程仍然适用，仍然修正拉格仑日函数（(10)式），使方程(2)仍与牛顿方程等效。

为推导简单，将§1的(4)式的一个标量分量写为：

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]=F_x$$

在拉格仑日方程中，F_x 对应 $\frac{\partial L}{\partial x}$，此方程左端应对应 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$

即应取

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11}$$

以及相应的

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{m_0\dot{y}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{\partial L}{\partial z}=\frac{m_0\dot{z}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

满足这三个标量方程的拉格仑日函数L，可证明为

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}+F$$

F 与 $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ 无关，为使 $\frac{\partial L}{\partial x}$，$\frac{\partial L}{\partial y}$，$\frac{\partial L}{\partial z}$ 分别代表 F_x、F_y、F_z，拉格仑日函数应为

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-eU+e\underline{A}\cdot\underline{v} \tag{12}$$

应注意，推导拉格仑日函数的出发点是使拉格仑日方程与牛顿方程等效，在考虑相对论修正后，（12）式的第一项并不代表粒子运动的功能。

从拉格仑日方程式(2)和(10)，能很直接的推导出§1的曲线坐标系里的运动方程。例如，在球坐标系（r，ψ，θ）里，静电场中

$$L=\frac{m_0}{2}(\dot{r}^2+r\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2)-eU$$

而从拉格仑日方程可以写出

$$m_0(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\psi}^2)=F_r=-e\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$m_0(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}-r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\psi}^2)=F_\theta=-e\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$m_0\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\psi})=F_\psi=-e\frac{\partial u}{\partial\psi}$$

经证明，在一般曲线坐标系里，由拉格仑日方程出发也可以得到§1的一般方程（13）。

§3、 最小作用原理

除了牛顿型及拉格仑日方程外，质点的经典力学的原理还可用变分原理描述。除了描述的简洁和高度概括性外，变分原理的理论还揭示了微粒的力学与波动过程（例如光的传播）的类似性，对于电子光学（以及带电粒子光学）的建立和发展有重大意义。

首先，简述一下变分法的一些最基本的要点。变分学处理泛函的稳定值问题。若$f(x)=y$是可以连续变化的函数，而由x和$f(x)$经若干运算得到的$v=v[x,f(x)]$称为泛函。泛函v与函数$y=f(x)$的关系，类似数学分析中函数y与自变量x之间的关系。

当函数$f(x)$有一微小变化时，可描写成

$$y=f(x)+\varepsilon\xi(x) \tag{1}$$

式中$\xi(x)$为任意给定函数，ε为数值参数。参量ε的变化即意味函数y的连续变化，当$\varepsilon=0$时，函数y值为$f(x)=y_0$，当ε变化时，显然泛函v也随着变化：

$$v[x,f+\varepsilon\xi]=v[x,f]+\varepsilon\wp_1+\frac{\varepsilon^2}{2}\wp_2+\cdots\cdots \tag{2}$$

式中
$$\wp_1=\frac{dv}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\xi\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{3}$$

$$\varnothing_2=\frac{d^2v}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0}=\xi^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\qquad(4)$$

……

式中 $\varepsilon\varnothing_1=\delta v$ 叫泛函 v 的一阶变分，$\varepsilon^2\varnothing_2=\delta^2 v$ 叫二阶变分，以此类推。

最简单常见的变分学问题，是泛函 $v[x, y, y']$ 为定义在 $x_0\leq x\leq x_1$ 区间的定积分

$$v=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')\,dx\qquad(5)$$

式中 y 是 x 的函数，且在该区间有一阶及二阶导函数存在。现在我们来研究泛函 v 的极值问题。由前述，令

$$\left.\begin{aligned}y&=f(x)+\varepsilon\xi(x)\\ y'&=f'(x)+\varepsilon\xi'(x)\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

由于 v 可看为 ε 的函数，故 v 取得极值（或稳定值），应有

$$\left(\frac{dv}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0\quad 即\quad \delta v=0\qquad(7)$$

现在我们给函数 y 的变化给以一定限制，即连续变化的 y 函数，在边界处应有定值，即

$$\left.\begin{aligned}x=x_0\ 处，\quad & y=y_0\\ x=x_1\ 处，\quad & y=y_1\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

（参见图 1）即是说，应有

$$\xi(x_0)=\xi(x_1)=0\qquad(9)$$

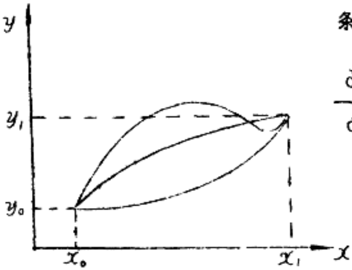

图 1

现在我们来推导 v 取稳定值的必要条件（(7)式）：

$$\frac{dv}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{d\varepsilon}F(x,y,y')\,dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{d\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0}dx$$

$$=0$$

由(6)式， $\frac{dy}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\xi(x)$ ， $\frac{dy'}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\xi'(x)$

$$\frac{dv}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\xi+\frac{\partial F}{\partial y'}\xi'\right)dx=0 \tag{10}$$

将被积函数第二项

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\xi'\,dx=\frac{\partial F}{\partial y'}\xi\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\xi\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx$$

根据(9)式，等式右端第 1 项应为零。代入(10)式

$$\int_{x_0}^{x_1}\xi\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]dx=0 \tag{11}$$

根据微积分学的一个定理，ξ 是一任意函数，要使积分

$$\int_{x_0}^{x_1}\xi(x)\,\eta(x)=0$$

η 必须在 $x_0—x_1$ 区间为零。故此，应有