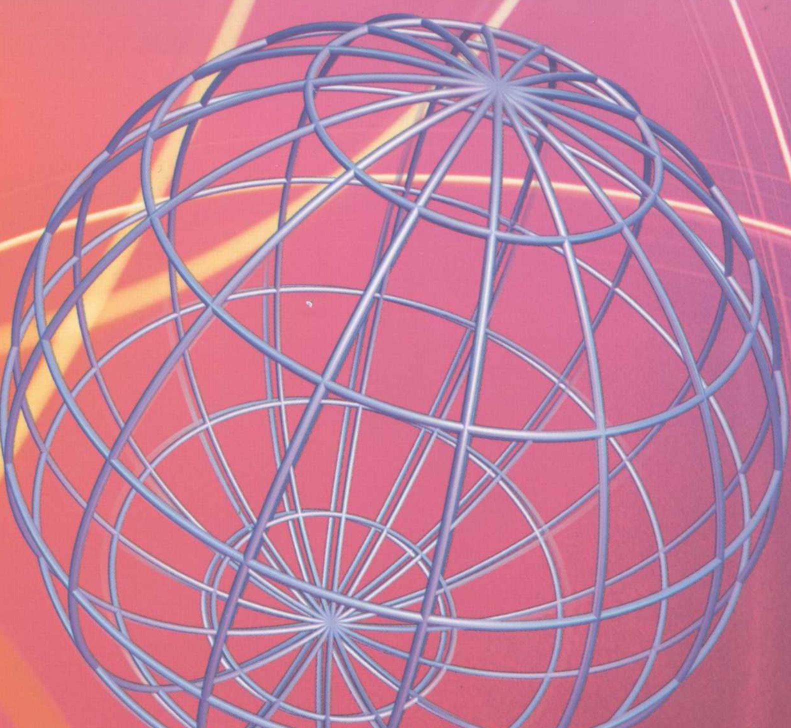
经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

（选修1-2）

SHUXUE



北京师范大学出版社

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修1-2）

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志
副 主 编　张饴慈　李延林　张思明
本册主编　王尚志　王建波
编写人员　（按姓氏笔画排序）
王尚志　王建波　关　键
张思明　李亚玲　范永利

北京师范大学出版社
·北京·

市场营销部电话　010-58808015　58804236
教材发展部电话　010-58802783
教材服务部电话　010-58802814
邮 购 科 电 话　010-58808083
传　　　　　真　010-58802838
编 辑 部 电 话　010-58802811　58802833
电　子　邮　箱　shuxue3@bnup.com.cn

出版发行：北京师范大学出版社　www. bnup. com. cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
出 版 人：赖德胜
印　　刷：唐山市润丰印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：210 mm × 297 mm
印　　张：6
字　　数：142 千字
版　　次：2007 年 5 月第 2 版
印　　次：2007 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：4.95 元
ISBN 978-7-303-08185-1

责任编辑：刑自兴　焦继红　　装帧设计：高　霞
责任校对：陈　民　　　　　　责任印制：吕少波

前　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功.

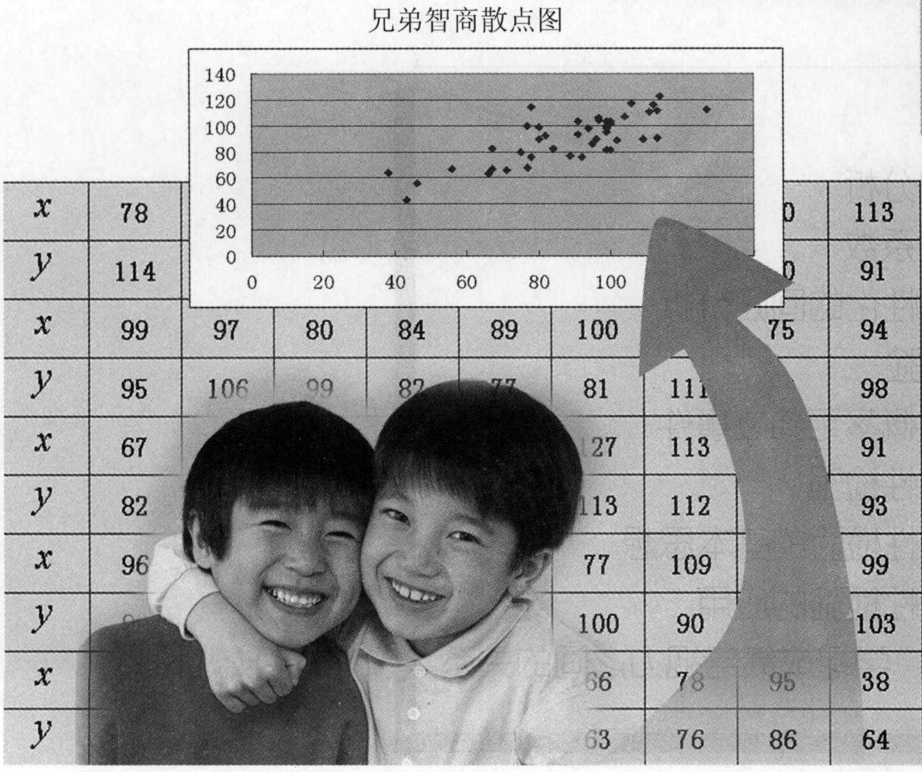
严士健 王尚志

目　录

第一章 统计案例

“一个家族中兄弟或姐妹智商的相关性如何?”“吸烟与肺癌是否有关?”……这些都是日常生活中常见的一些问题.

本章将在必修课程学习统计的基础上，通过对以上问题的讨论，了解和使用一些常见的统计方法，进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想以及统计方法使用的广泛性.



§1　回归分析

通过必修阶段统计内容的学习，我们已经认识到了现实生活中存在的某些不同变量之间的关系，这些变量之间的关系不同于可以用函数表示的确定性关系. 例如，父母的身高与他们孩子的身高，食物中所含的脂肪与所含的热量，模拟测验的成绩和实际考试的成绩，农作物的施肥量与产量. 它们之间是一种非确定性关系，称为相关关系. 例如，施肥量无疑是影响农作物产量的主要因素，但不是唯一因素，农作物的产量还与农作物的栽培方式、气候等因素有关，有些因素是人为可以控制的，而有些则无法控制.

由于一个变量与另一个变量之间往往不是确定的关系，人们也不可能把握与某个变量有关的所有变量，因此变量间的关系往往会表现出某种不确定性. 回归分析就是研究这种变量之间的关系的一种方法，通过对变量之间关系的研究，从而发现蕴涵在事物或现象中的某些规律.

1.1　回归分析

在必修课程中，我们已经学习了最小二乘法，并会用它建立变量之间的线性回归方程.

例　始祖鸟是一种已经灭绝的动物. 在一次考古活动中，科学家发现了始祖鸟的化石标本共 6 个，其中 5 个同时保有股骨(一种腿骨)和肱骨(上臂的骨头). 科学家检查了这 5 个标本股骨和肱骨的长度，得到表 1-1 中的数据：

表 1-1

编　号	1	2	3	4	5
股骨 x/cm	38	56	59	64	74
肱骨 y/cm	41	63	70	72	84

(1) 求出肱骨 y 对股骨 x 的线性回归方程；

(2) 还有 1 个化石标本不完整，它只有股骨，而肱骨不见了. 现测得股骨的长度为 50 cm，请预测它的肱骨长度.

分析理解 *

必修课程中，我们已经会用最小二乘法求变量之间的线性回归方程. 假设样本点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$，设线性回归方程为 $y=a+bx$，我们的想法就是要求 a, b，使这 n 个点与直线 $y=a+bx$ 的"距离"平方之和最小，即使得

$$Q(a,b)=(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+\cdots+(y_n-a-bx_n)^2$$

达到最小.（如图 1-1 所示）

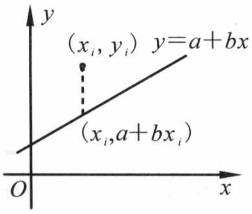


图 1-1

在统计上，我们使用 $\overline{x}$ 表示一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均值，即 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，为了简化表示，我们引进求和符号，记作 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. 同理有 $\overline{y}=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$.

这样就有：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\overline{x}=n\overline{x}-n\overline{x}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}y_i-n\overline{y}=n\overline{y}-n\overline{y}=0.$$

为了简化下面的表示，我们引入以下记号：

$$l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-n\overline{x}^2,$$

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y},$$

$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2-n\overline{y}^2.$$

从而

$$\begin{aligned}
&Q(a,b)\\
&=(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+\cdots+(y_n-a-bx_n)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left\{(y_i-\overline{y})+[\overline{y}-(a+b\overline{x})]-b(x_i-\overline{x})\right\}^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+n[\overline{y}-(a+b\overline{x})]^2+b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+2[\overline{y}-(a+\\
&\quad b\overline{x})]\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})-2b\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})-2b[\overline{y}-(a+\\
&\quad b\overline{x})]\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})
\end{aligned}$$

$$= l_{yy} + n[\bar{y} - (a + b\bar{x})]^2 + l_{xx}b^2 - 2l_{xy}b$$

$$= l_{yy} + n[\bar{y} - (a + b\bar{x})]^2 + l_{xx}\left(b - \frac{l_{xy}}{l_{xx}}\right)^2 - \frac{l_{xy}{}^2}{l_{xx}}.$$

当 $\bar{y} - (a + b\bar{x}) = 0$ 且 $b - \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = 0$ 时，$Q(a,b)$ 取最小值，此时

$$b = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 - n\bar{x}^2},$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

解　(1) 从散点图 1-2 可以看出，上表中的两个变量呈现出近似的线性关系，我们可以建立肱骨 y 对股骨 x 的线性回归方程.

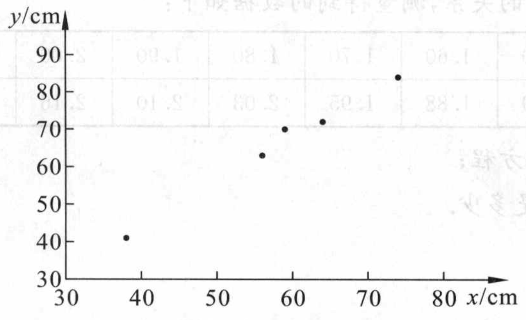


图 1-2

根据上面的分析，我们将数据列表如表 1-2 所示：

表 1-2

i	x_i	y_i	$x_i{}^2$	x_iy_i
1	38	41	1 444	1 558
2	56	63	3 136	3 528
3	59	70	3 481	4 130
4	64	72	4 096	4 608
5	74	84	5 476	6 216
$\sum$	291	330	17 633	20 040

由此可得：$\bar{x} = \frac{291}{5} = 58.2$，$\bar{y} = \frac{330}{5} = 66$. 进而可以求得

$$b = \frac{20\,040 - 5 \times 58.2 \times 66}{17\,633 - 5 \times 58.2^2} \approx 1.197,$$

$$a = 66 - \frac{20\,040 - 5 \times 58.2 \times 66}{17\,633 - 5 \times 58.2^2} \times 58.2 \approx -3.660.$$

于是，y 对 x 的线性回归方程为

$$y=-3.660+1.197x.$$

回归直线的斜率 $b=1.197$ 的意思是，对于这次发现的始祖鸟的化石标本来说，股骨的长度每增加 1 cm，肱骨的长度平均增加 1.197 cm.

(2)由上面最小二乘法得到的线性回归方程可知，当股骨的长度为 50 cm 时，肱骨长度的估计值为：

$$-3.660+1.197\times50=56.19\approx56(\text{cm}).$$

练 习

研究某灌溉渠道水的流速和水深之间的关系，测量得到的数据如下：

水深 x/m	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10
流速 y/(m/s)	1.70	1.79	1.88	1.95	2.03	2.10	2.16	2.21

(1) 求出流速 y 对水深 x 的线性回归方程；

(2) 预测水深为 1.85 m 时水的流速是多少.

1.2 相关系数

问题提出

我们知道，任何数据，不管它们的线性相关关系如何，都可以用最小二乘法求出线性回归方程. 为使建立的线性回归方程有意义，在利用最小二乘法求线性回归方程之前，我们先要对变量之间的线性相关关系作一个判断，通常可以作数据的散点图.

但在某些情况下，从散点图中不容易判断变量之间的线性关系，另外，当数据量较大时，画散点图比较麻烦，此时我们还可以用其他方法来刻画变量之间的线性相关关系吗？

为了解决以上问题，我们可以通过计算两个随机变量间的线性相关系数 r，来判断它们之间线性相关程度的大小.

假设两个随机变量的数据分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，则变量间线性相关系数 r 的计算公式如下：

$$r=\frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2-n\overline{y}^2}}.$$

根据前面的分析，回归方程的系数 a,b 使误差达到最小.

误差可以表示为：

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

$$=l_{yy}+n[\overline{y}-(a+b\overline{x})]^2+l_{xx}\left(b-\frac{l_{xy}}{l_{xx}}\right)^2-\frac{l_{xy}{}^2}{l_{xx}}.$$

其最小值为：

$$Q=l_{yy}-\frac{l_{xy}{}^2}{l_{xx}}=l_{yy}\left(1-\frac{l_{xy}{}^2}{l_{yy}l_{xx}}\right)=l_{yy}(1-r^2).$$

由于 $Q\geqslant 0$，从而 $r^2\leqslant 1$. 故变量之间线性相关系数 r 的取值在 $[-1,1]$之间. $|r|$ 值越大，误差 Q 越小，变量之间的线性相关程度越高；$|r|$ 值越接近 0，Q 越大，变量之间的线性相关程度越低. 当 $r>0$ 时，$l_{xy}>0$，从而 $b=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}>0$，两个变量的值总体上呈现出同时增加的趋势，此时称两个变量正相关；当 $r<0$ 时，$b<0$，一个变量增加，另一个变量有减少的趋势，称两个变量负相关；当$r=0$时，称两个变量线性不相关.

思考交流

(1) 如何求出例题中变量的线性相关系数 r?

对于例题，由表 1-2 可得：$\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2=17\ 633$，$\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2=22\ 790$，$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=20\ 040$；$\overline{x}=\frac{291}{5}=58.2$，$\overline{y}=\frac{330}{5}=66$. 进而可以求得

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i{}^2-n\overline{y}^2}}$$

$$=\frac{20\ 040-5\times 58.2\times 66}{\sqrt{17\ 633-5\times 58.2^2}\times\sqrt{22\ 790-5\times 66^2}}\approx 0.994\ 1.$$

由此可以得出，肱骨 y 和股骨 x 有较强的线性相关程度.

（2）请计算表 1-3 中变量的线性相关系数 r，通过计算，发现了什么？

表 1-3

x	-5	-4	-3	0	3	4	5
y	0	3	4	5	4	3	0

根据上表的数据，列表如表 1-4 所示：

表 1-4

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	-5	0	25	0	0
2	-4	3	16	9	-12
3	-3	4	9	16	-12
4	0	5	0	25	0
5	3	4	9	16	12
6	4	3	16	9	12
7	5	0	25	0	0
$\sum$	0	19	100	75	0

由此可得：$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=100$，$\sum_{i=1}^{n}y_i^2=75$，$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0$，$\bar{x}=0$，$\bar{y}=2.71$，进而可以求得

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2}}=\frac{0-7\times0\times2.71}{\sqrt{100-7\times0^2}\times\sqrt{75-7\times2.71^2}}=0.$$

从散点图 1-3 我们容易看出，表格中的数据都在同一个半圆上，此时建立线性回归方程是没有任何意义的，这与线性相关系数 r 的计算结果是一致的.

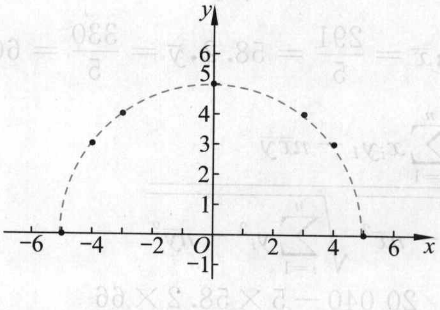


图 1-3

实际上，线性相关系数 r 越大，变量之间的线性关系就越强，用

直线拟合的效果就越好.相关系数 r 的值究竟大到什么程度就认为线性关系较强,同学们可以参考有关的统计书籍进一步学习!

练 习

许多先进国家对驾驶员的培训,大多采用室内模拟教学和训练,而后再进行实地训练并考试,这种方法可以大大节约训练的费用.问题是这种方法有效吗?下表是12名学员的模拟驾驶成绩 x 与实际考试成绩 y 的记录:(单位:分)

x	98	55	50	87	77	89
y	95	60	45	85	75	87
x	79	98	94	83	74	73
y	75	97	92	80	71	72

试问两者的相关性如何?请画出散点图,并求 y 与 x 间的线性相关系数.

1.3 可线性化的回归分析

问题提出

表1-5按年份给出了1981~2001年我国出口贸易量(亿美元)的数据,你能根据此表预测2008年我国的出口贸易量吗?

表1-5 1981~2001年我国出口贸易量数据

年份	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
出口贸易量/亿美元	220.1	223.2	222.3	261.4	273.5	309.4	394.4
年份	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
出口贸易量/亿美元	475.2	525.4	620.9	719.1	849.4	917.4	1 210.1
年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
出口贸易量/亿美元	1 487.8	1 510.5	1 827.9	1 837.1	1 949.3	2 492.0	2 661.0

要预测2008年我国的出口贸易量,首先应根据表中的数据找到出口贸易量与年份之间的关系.

我们在必修阶段已经详细地讨论了用直线方程 $y=a+bx$ 来描述两个变量的关系.然而由图1-4可以看出,出口贸易量与年份之间

呈现出一种非线性的相关性. 如果用直线来描述，其结果如图 1-5 所示，显然效果不太好，若用它来作预测，误差将会很大. 于是，我们考虑用非线性函数来描述图 1-4 的变化关系.

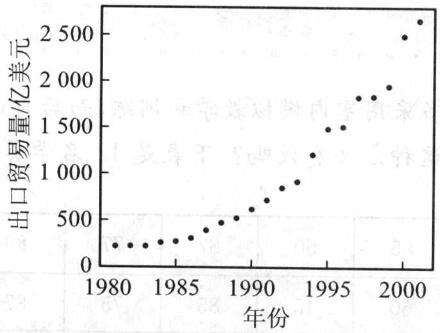


图 1-4

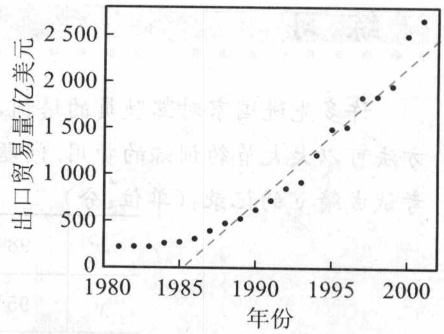


图 1-5

分析理解

从原始数据的散点图(图 1-4)看出，图像近似一个指数函数，我们可以考虑用函数

$$y=ae^{bx}$$

来拟合数据的变化关系，但如何进行拟合呢？我们可以先将其转化成线性函数，这就需要事先作个变换：对上式两边取对数

$$\ln y=\ln a+bx.$$

若记

$$u=\ln y,\ c=\ln a,$$

则上式就变成了

$$u=c+bx,$$

即回到我们的线性回归方程，于是就可以用最小二乘法来进行计算. 为了方便建立回归方程，我们把年份 1981 记为 $x=1$，年份 1982 记为 $x=2$，……因此，我们实际上是对$(x, u=\ln y)$作线性回归，其中 y 表示原始观测值. 将表 1-5 中的数据经过上述变换后即可得到表 1-6 中的数据.

表 1-6

x	1	2	3	4	5	6	7
u	5.394	5.408	5.404	5.566	5.611	5.735	5.977
x	8	9	10	11	12	13	14
u	6.164	6.264	6.432	6.578	6.745	6.822	7.098
x	15	16	17	18	19	20	21
u	7.305	7.320	7.511	7.516	7.575	7.821	7.886