国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

几何定理计算机证明

● 孙熙椿 编著

科学出版社
www.sciencep.com

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

几何定理计算机证明

孙熙椿　编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书作者将我国著名的数学家吴文俊院士独创的“几何定理机器证明的新方法”应用到大学和中学的数学教育中，经过多年的教学实验和数学现代化探索，总结出了这本书，本书的出版对数学素质教育将有很深远的指导意义。本书共分6章，主要讲述几何定理机器证明的发展概况、吴文俊机械化方法、张景中消点算法、杨路降维算法等。

本书适合作为高等院校教材，更适合师范院校和高中数学教师学习阅读。

图书在版编目（CIP）数据

几何定理计算机证明/孙熙椿编著. —北京：科学出版社，2007
ISBN 978-7-03-015505-4

Ⅰ. 几… Ⅱ. 孙… Ⅲ. 计算机应用-几何学-定理证明：机器证明 Ⅳ. O18-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 045586 号

责任编辑：陈玉琢/责任校对：包志虹
责任印制：赵德静/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年6月第 一 版　开本：B5（720×1000）
2007年6月第一次印刷　印张：13 3/4
印数：1—3 000　字数：254 000

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

序　言

在推进高等师范院校数学系课程改革的现代化进程中，能否开设更多的现代课程来体现高等师范院校数学系的特色。多年来，作者一直从事这方面的研究和实践，20 世纪 80 年代末就用自己主编的“从现代数学看中学数学”一书，开设了相应的一门新课程。现在又在自编的《初等几何定理机器证明》讲义的基础上，经过 3 年的教学实验，修改成《几何定理计算机证明》一书继续这项工作。

在数学定理机器证明这一研究领域，我国著名数学家吴文俊院士做了开创性的工作，他所创立的“吴方法”掀开了这一领域新的一页。在他的带领下，我国数学家在这一领域取得了丰硕的成果，我们可以自豪地说：几何定理机器证明研究的重大成果大都是由我国数学家取得的。

将我国数学家在几何定理机器证明的研究领域所取得的最新成果总结成一本适合高等院校数学系的新教材，这是作者一次新的尝试，这对我国高等教育面向现代化必将起到推进作用。

中国科学院院士　王梓坤

2002 年 10 月 26 日

前言

1977 年，著名数学家吴文俊院士在《中国科学》（1977 年第 6 期）发表了“初等几何判定问题与机械化证明”这一具有划时代意义的科学论文，文中提出了初等几何定理机器证明的新方法，首次在计算机上证明了一大类初等几何定理，从而开创了一条从公理化到机械化的新路，在国际上引起了巨大轰动。著名专家 Kapur 写到“吴的工作使自动推理领域发生了革命性的变化”。吴文俊院士所独创的几何定理机器证明的新方法，在国际上被誉为“吴方法”（本书简称“吴法”）。2001 年 3 月，吴文俊院士因此荣获中国首届国家最高科学技术奖。

吴文俊院士作为首席科学家先后主持了国家攀登计划“机器证明及其应用”和“数学机械化研究及其应用”两个重大项目，在吴文俊院士的带领下，我国科学家在数学机械化这一研究新领域一直处于世界领先地位，从而确立了以吴文俊院士为首的中国数学机械化学派在国际上的地位。

1992 年，张景中院士利用自己所创立的消点算法与周咸青、高小山等合作，成功地研制出具有可读的几何定理机器证明自动生成的软件，使在计算机上显示的证明与人用笔在纸上所演算的证明完全一致，能以动态形式将作图步骤与证明步骤结合起来，并能在计算机上将所要证明定理的图形画出来，被著名计算专家 Boyer 誉为“一个里程碑”。可读证明的实现为定理机器证明应用于我国各类学校的教育改革展现了美好的前景。

1986 年，洪加威提出了单点例证法，从理论上证明了可以用举例子的方法来证明几何定理，由于其方法的复杂性，至今在计算机上未能实现。

几乎同时，张景中院士和杨路教授创立了数值并行算法，首次在计算机上用举例子的方法证明了一批几何定理。用举例来证明数学定理，在数学界一直是很忌讳的事情，因此对数学的哲学基础造成了很大的震动。

1998 年，杨路教授创立了降维算法，并研制出 BOTTEMA 软件，在计算机上成功地证明了两千多个不等式，使得多年进展缓慢的几何不等式机器证明“这一大难题”有了重大突破。

程民德院士等在吴法的应用方面也取得了许多优秀成果。

为什么中国科学家会在定理机器证明这一领域取得如此辉煌的成就？除了吴文俊院士有着“非凡的洞察力和智慧”等因素以及国家大力支持外，我认为还有两个重要的因素。第一，中国数学家们继承了我国古代数学机械化的优良传统。吴文俊院士所创立的吴特征列法，得益于朱世杰的四元术，即解多至 4 个未知数

的多项式组的机械化算法，吴文俊院士认为“我们所用的特征列法，只是在《四元玉鉴》（朱世杰）所指出的途径上给以现代化的处理，使之臻于严密合于现代数学的要求而已”。第二，以吴文俊为首的中国数学机械化学派的科学家都是著名的数学家，他们的数学功底深厚，他们所创立的机械化方法都有严密的数学理论作为支撑。吴法有吴消元法和特征列理论为依据，张法有以面积法所创立的欧几里得几何公理新体系为基础，杨法有多项式完全判别系统理论所依托，所以中国科学家所取得的成果是令人信服的。

面对中国科学家所取得的举世瞩目的成就，著名计算机科学家、美籍华人王浩教授就讲过“要使每个中国数学教师都懂得吴法”。著名数学教育家张奠宙教授在给作者的信中曾指出：关于数学定理机器证明方面的书，是中国数学教师应当读的。特别是吴文俊院士获得首届国家最高科学技术奖后，我国广大的大学生、中学生和科技教育工作者更应该了解中国数学家所取得的伟大成就。

1996 年我写信给张景中院士，表示希望将我国科学家在数学定理机器证明方面所取得的成果应用于我国高等学校教学改革，他立即给我回信，他写道：“开设机器证明课程，这是很有前途的方向。”信中开列了一系列参考书目，并免费赠送了他们在美国研制的第一代软件，还先后给我写了十余封信，即使他在参加党的十五大期间，还从北京京西宾馆写信鼓励我将高等学校和中学的机械化实验进行下去。从此，我开始从事将吴法和张法应用于高等学校本科的教育改革，用自编的《初等几何定理机器证明》讲义，在我国高校本科首次开设了《初等几何定理机器证明》这一现代化的新课程，已向三届研究生和本科生讲授过这门新课，本书就是在上述讲义的基础上修改而成的。希望本书的出版能引起教育主管部门和高校有关领导的重视，能将《几何定理计算机证明》这一新课程列入教学计划中去。定理机器证明的引入必然会对我国高等教育改革，特别是高等师范院校数学系的教学改革产生深远影响。

中学数学现代化就是机械化，这是吴文俊院士所倡导的。在实现这一进程的过程中，他特别强调要有人到中学去，与中学教师、学生一道“真刀真枪地干”。在张景中院士的指导下，我们与江西临川二中原校长、特级教师、孺子牛奖获得者李盛光合作，在该校一个班（共 68 名学生）“真刀真枪”地进行了为期 3 年的平面几何定理机器证明的教学实验。这是世界上首次对中学数学现代化（机械化）的探索，在实验过程中遇到了常人难以克服的困难，由于有李盛光这样具有开拓精神的校长，加上课题组全体成员的努力，不仅克服了所有困难，而且使得实验取得非常满意的效果。张景中院士亲自到江西临川二中主持该课题的鉴定会，他还书写了“国内第一，国际领先”的题辞。

随着张景中院士第三代“教育智能平台”软件研制成功，数学机械化的重要性逐渐被人们认识，以及素质教育的深入开展，希望有更多的中学开展几何定理

机器证明的实验，只要我们坚持研究和实验，中学数学现代化（机械化）一定会在我国首先实现。我更相信，经过几代人，甚至更长时间的努力，几千年来平面几何难学这一世界性的难题一定会得到解决。将来学习平面几何就像玩游戏机那样容易，那样有趣。

本书作为高等学校的教材使用时，对于非数学专业的学生，第 1 章，第 3 章第 3 节，第 4 章第 6～8 节，第 5 章第 2 节的证明，第 6 章第 2 节定理的证明等内容可以不讲或少讲。但是与本书相配套的软件希望能掌握。

在本书编写过程中得到了张景中院士和杨路教授的具体指导，他们不但提供了自己的最新研究成果，还为本书配置了相应的计算机软件，张景中院士、杨路教授和曾广兴教授在百忙中审阅了部分书稿，在此深表谢意。本书得以出版还要感谢王梓坤院士和张奠宙教授的鼓励和帮助，没有他们的支持，这一研究是进行不下去的。

最后，感谢吴长庆老师为本书的打印和校对付出的辛勤劳动！

孙熙椿

2006 年 5 月于江西南昌

目　　录

第 1 章　欧几里得几何的完善与发展

§1　欧几里得和他的《几何原本》

欧几里得的生平已无法考证，只知他约生于公元前 330 年，死于公元前 275 年. 他是希腊人，曾受教于柏拉图的“雅典学院”. 欧几里得应埃及托勒密国王的邀请，从公元前 306 年到公元前 283 年，在亚历山大城创办了一所学校，从事教学工作，托勒密国王曾是他的学生. 传称他是一位温良敦厚的教育家.

欧几里得将前人所取得的成果加以整理提高，总结成世界上第 1 部公理法的巨著《几何原本》. 但是《几何原本》并没有流传下来，留下来的都是一些修订本. 最早的是 4 世纪亚历山大城狄恩的修订本. 后来还是在梵蒂冈图书馆发现的希腊手稿，这是狄恩修订本以前欧几里得著作的一个手抄本.《几何原本》的内容主要来自于这两个修订本，《几何原本》共 13 卷，有些版本还附加 2 卷，但后 2 卷肯定是后人写的.

以狄恩修订本为准，《几何原本》共 13 卷，467 个命题.

第 1 卷　给出了 **23** 个定义、**5** 条公设、**9** 条公理、三角形全等、边角关系、平行线、平行四边形等.

第 2 卷　讨论了线段的运算.

第 3 卷　讨论了圆的性质.

第 4 卷　圆的内接和外切多边形.

第 5 卷　比例理论.

第 6 卷　用比例研究相似多边形.

第 7,8,9 卷　数论(算术).

第 10 卷　不可公度量的分类和它们的几何运算.

第 11,12,13 卷　立体几何.

最初的 7 个定义

1. 点是没有部分的.

2. 线有长度没有宽度.

3. 线的界限是点.

4. 直线是这样的线，它上面的点是一样放置着的.

5. 面只有长度和宽度.

6. 面的界限是线.

7. 平面是这样的面,它上面的直线是一样放置的.

5 条公设

1. 从每一点到另一点必定可以引直线.

2. 每条直线可以无限延长.

3. 以任意点为中心、任意线段长为半径可作圆.

4. 所有直角都相等.

5. **平行公理** 两条直线被第三条直线所截,若在某一侧的内角和小于二直角,那么这两条直线在这一侧适当延长后必相交.

9 条公理

1. 等于同量的量相等.

2. 等量加等量,其和相等.

3. 等量减等量,其差相等.

4. 不等量加等量,其和不等.

5. 等量的两倍仍相等.

6. 等量的一半仍相等.

7. 能重合的量相等.

8. 整体大于部分.

9. 两条直线不能包围一部分空间.

欧几里得从 23 个定义、5 条公设、9 条公理出发,用逻辑推理的方法演绎成一门几何学,也称欧几里得几何(基本上是中学的几何),开创了公理化数学的先河. 正因为如此,欧几里得的名字与几何学成了同义语而流传千古.

欧几里得的《几何原本》是流传最广、再版次数最多的一本科技书籍. 仅从 1482 年到 19 世纪末,它被用各种文字出版了一千版以上,历史上还没有哪一本科技书籍对人类教育的影响能够超过《几何原本》,张景中院士称《几何原本》"是对数学材料进行再创造的第一个取得辉煌成就的范例".

欧几里得几何大约在 1275 年(元世祖忽必烈 20 年)通过阿拉伯人第一次传入中国,但没有多少学者对它感兴趣,即使有一个中译本,不久也失传了. 现在能看到的我国最早的中译本是 1607 年由利马窦(意大利传教士,曾在我国澳门居住过)和徐光启合译的前 6 卷,1857 年伟烈亚力、李善兰合译的后 9 卷.

欧几里得的《几何原本》直到今天仍然占据着中学的课堂,当今中学的几何课本不外乎是《几何原本》的翻版或变形. 两千多年来经久不衰,欧几里得已成为几何学的代名词. 为什么欧几里得几何会有如此魅力? 主要是因为它在科学上,特别是教育上的出色成就. 首先,《几何原本》把当时人们所取得的丰富知识,总结成从少数几个原始概念及公认的命题(公理)出发,用逻辑推理的方法演绎成具有较为完

整科学体系的几何学，这在人类科学史上是一个伟大的创举. 其次，《几何原本》把生动的几何图形与严密的推理论证结合起来，使得它的理论能为大多数人而不仅仅是少数数学家所接受. 第三，《几何原本》向学生提供了丰富多彩的、从易到难的各个级别的习题，因而能激发学生高度的学习兴趣，使他们能全身心地投入到学习中去，这是其他任何课程所无法做到的. 直到今天人们还在不断地发现欧几里得几何的新定理和新证明. 第四，在培养学生逻辑推理能力方面，欧几里得几何有其独到之处，它能充分发挥学生的个性，灵活地去思考问题.

但是平面几何太难学了，我们不妨讲一个古老的故事. 古埃及有位叫托勒密的国王，曾经向欧几里得本人学过几何学，但是，国王被几何学中一连串的公理、定义、定理弄得头昏脑涨，解起几何问题不知从何处下手，于是托勒密国王就问欧几里得："亲爱的欧几里得先生，能不能把你的几何弄得简单些". 欧几里得坚决地回答说："没有一条专为国王而设的通往几何之路." 人们在讲述这个古老的故事时，总是对这位作为伟大学者的欧几里得怀着敬佩之情，他讲出了一个真理，国王和平民一样，只有老老实实地去学习，才能掌握几何学，科学不会因为你是国王而变得容易起来. 但是，国王的话却道出了几何难学的心声，两千多年来，几何被公认为难学的课程，能不能使几何变成一门更容易学的课程，一直是人们所探索的问题.

§2 现代公理化的欧几里得几何

虽然欧几里得的《几何原本》是一部公认的经典著作，在历史上长期被认为是最好的数学教材，但由于历史的局限，《几何原本》至少存在以下 5 个方面的缺陷：第一，定义含糊不清，有时无法理解，用的都是一些日常用语，而不是精确的数学语言，如"点是没有部分的"，"线是有长度没有宽度的"等. 第二，证明过程常常依赖直观，这样可能由于作图不准确或直观错觉，导致得出不正确的结论. 第三，公理系不完备，缺少顺序公理、合同公理和连续公理. 第四，有些公理不独立，例如第四公设"所有直角都相等"，很容易从别的公理推导出来. 第五，利用图形移动不变性，用叠合(重合)来证明全等，此法至少有两点不足. ①移动、重合概念没有逻辑依据. ②为什么会有图形移动的不变性，哪些几何性质在图形移动中不变都没交待清楚，也不可能交待清楚. 为了克服上面提到的欧几里得《几何原本》中所存在的缺陷，人们从两方面展开了研究.

第 1 方面 是对《几何原本》的批判，完善欧氏几何公理系. 早在公元 3 世纪帕善朗和 5 世纪的普鲁克鲁斯都对《几何原本》提出过批评，16 世纪的佩莱特对欧几里德使用叠合法证明图形全等提出过批评. 高斯对《几何原本》中缺乏"介于"关系的清晰定义提出过批判，后来他找到的一些实例表明，在缺少对"介于"概念正确定义的情形下，往往会导致错误的证明. 但所有这些批评都不系统，对《几何原本》没

有根本的改善.

第一个对《几何原本》提出全面批评意见的是法国数学家达朗贝尔,他在 1757 年提出:为了适应时代的需要,新编几何教材应使平面几何与立体几何适当结合,使用解析法,微积分思想应占重要位置. 1794 年勒让德写了一本新几何教材,影响颇大,它比较精练,减少繁琐的、过分追求技巧的练习,不过分追求严格化.

在完善欧几里得公理体系的过程中,德国大数学家希尔伯特功不可没,他在 1899 年出版的《几何基础》一书,是一部公认的公理化方面的经典不朽之作. 他在书中完全摈弃了对几何的对象点、线、面,以及由它们构成的图形的性质的直观描述. 希尔伯特在其著作《几何基础》中,阐明了现代公理化的基本思想:先提出几个不加定义的原始概念,然后列出规定这些原始概念之间关系的若干条公理组成一个公理系,从这些基本概念和公理系出发,利用逻辑推理的方法,导出一系列的命题(定理),同时还可以定义新的概念、得到新的定理,这样就形成了一门几何学的全部内容.

希尔伯特提出了 6 个原始概念:点、线、面、在……之间、在……之上、合同于等. 5 个基本关系:两个结合关系(点与直线结合、点与平面结合),一个顺序关系(一点在另两点之间),两个合同关系(线段与线段合同,角与角合同),并提出 5 类共 20 条公理的公理系,即希尔伯特欧氏几何公理系,它们是

第 1 类公理　关联公理(亦称结合公理或从属公理)

I_1　对于两个不同的点,恒有一条直线通过其中每一个点.

I_2　对于两个不同的点,至多有一条直线通过这两个点.

I_3　每条直线上至少有两个不同的点,至少有三个点不在同一条直线上.

I_4　对于不在一条直线上的三个点,恒有一个平面通过其中每一个点,每个平面上至少有一个点.

I_5　对于不在直线上的三个点,至多有一个平面通过其中每一个点.

I_6　如果直线 a 上有两个(不同的)点在平面 α 上,那么直线 a 的每个点都在平面 α 上.

I_7　如果两个平面有一个公共点,那么至少有另一个公共点.

I_8　至少有四个点不在同一个平面上 .

“通过”这一词可用其他词代替,例如“直线通过点 A 和 B 的每一点”这句话,可用“a 属于 A 和 B”或“a 连接 A 和 B”代替等等.

第 2 类公理　顺序公理(亦称介于公理或关联公理)

II_1　如果点 B 在点 A 与点 C 之间,那么 A,B,C 是同一条直线上三个不同的点,而且点 B 在点 C 和点 A 之间(见图 1-1).

II_2　对于任意两个(不同的)点 A 和 B,至少有一点 C,使得点 B 在点 A 与点 C 之间(见图 1-2).

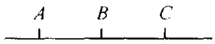

图 1-1

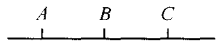

图 1-2

Ⅱ$_3$ 在同一条直线上任意三个不同的点中，至多有一个点在其他两个点之间.

Ⅱ$_4$ 巴士公理：设 A,B,C 三点不在同一条直线上，而直线 a 在平面 ABC 上，但不通过 A,B,C 中任何一点. 如果 a 通过线段 AB 的一内点，则它必定也通过线段 BC 的一内点，或 AC 的一内点.

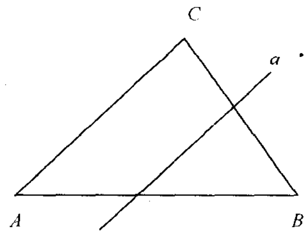

图 1-3

第 3 类公理 合同公理(亦称全合公理)

Ⅲ$_1$ 设 A,B 是直线 a 上两个不同的点，A' 是同一或另一直线 a' 上的点，那么在 a' 上 A' 的指定一侧恒有点 B'，使线段 AB 和线段 $A'B'$ 合同(相等或全合)，记为 $AB=A'B'$.

Ⅲ$_2$ 如果两个线段(相同的或不同的)都与第三个线段合同，那么这两个线段合同(相等). 简言之，若 $A'B'=AB, A''B''\equiv AB$，则 $A'B'=A''B''$.

Ⅲ$_3$ 设 AB 和 BC 是直线 a 上两个没有公共内点的线段，$A'B'$ 和 $B'C'$ 是同一或另一直线 a' 上两个没有公共内点的线段. 如果 AB 与 $A'B'$ 合同，BC 与 $B'C'$ 合同，那么 AC 与 $A'C'$ 合同. 简言之，若 $AB\equiv A'B'$ 而且 $BC\equiv B'C'$，则 $AC\equiv A'C'$(线段可加性).

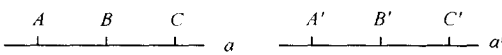

图 1-4

Ⅲ$_4$ 已知平面 α 上的一个角 $\angle(h,k)$，同一或另一平面 α' 上的一条直线 a' 和 a' 上以 O' 为顶点的射线 h'，那么在 α' 上 a' 的指定一侧恰有一条射线 k'，使 $\angle(h,k)$ 与 $\angle(h',k')$ 合同；$\angle(h,k)$ 与自身合同.

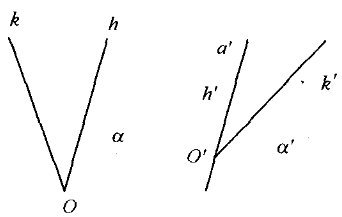

图 1-5

Ⅲ$_5$ 对于两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$，如果线段 AB 与 $A'B'$ 合同，线段 AC 与 $A'C'$ 合同，$\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$ 合同，那么 $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$ 合同.

第 4 类公理 平行公理

Ⅳ **(平行公理)** 设 a 是任一直线，A 是 a 外的任一点，在 a 与 A 所确定的平面上，至多有一条

直线通过 A 且与 a 不相交.

第 5 类公理　连续公理

V_1　**(阿基米德公理或度量公理)**　对于任何线段 AB 与 CD,在以点 A 为顶点、通过点 B 的射线上,存在有限个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,使得线段 $AA_1,A_1A_2,\cdots,A_{n-1}A_n$ 都与 CD 合同,而且点 B 在点 A 与 A_n 之间(见图 1-6).

V_2　**(直线完备性公理)**　直线上的点所成的点集,连同其顺序关系和合同关系,不能再行扩充,使得扩充以后,仍满足 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,V_1. 这就是说,不可能在这直线上增加新点,使得原来的点和新点所组成的点集还适合 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,V_1.

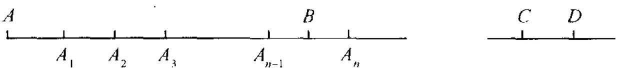

图 1-6

根据以上 5 类 20 条公理,利用逻辑推理的方法就可以得到欧几里得几何的全部内容,在希尔伯特公理系上所建立的欧氏几何,完全克服了上面提到的《几何原本》中所存在的缺陷和不足,使得欧几里得几何公理系达到非常完美的境界. 希尔伯特所提出的公理化方法,不仅开创了用现代公理方法演绎成一门数学学科——几何学,而且对 20 世纪现代数学产生了深远的影响. 可以毫不夸张地说,20 世纪的数学基本上是公理化数学. 但是希尔伯特的欧几里德公理系也有它的缺陷,那就是使几何离开人们更远,变成了数学家的几何,而不是大众的几何,就连希尔伯特本人也不愿意在自己公理系上去建立欧几里得几何,因为这太繁太难了.

如何判定一个公理系的合理性. 希尔伯特在其著作《几何基础》一书中,对公理系的科学性提出了 3 条标准.

第 1　相容性　就是在一个合理的公理系中,各个公理之间没有矛盾. 即在一个公理系中,公理与公理之间不能相互矛盾. 如果在一个公理系下,能推出两个相互矛盾的命题. 那么这一公理系一定有问题,因此公理系的无矛盾性或称为相容性是对公理系的最起码的要求.

第 2　独立性　公理系中每一条公理不是多余的,其中任何一条公理都不能由这个公理系中其他公理推导出来. 也就是讲,在一个合理的公理系中,每个公理都是相互独立的. 公理具有独立性,说明它所包含的公理个数是极少的.

第 3　完备性　即满足这个公理系本质上只有一个,不能再添加新的独立公理到这公理系中,加上去就会产生矛盾. 也就是讲公理系对所研究的学科是足够的,其完备性表明,公理系中公理个数是极大的.

检验一个公理系是否合理的 3 条标准,看起来似乎很简单,也能为人们所接受,但是如果你要去检验一个公理体系是否符合这 3 条标准,却不是一件容易的

事.例如一个公理系的无矛盾性是最重要的,如果一个公理系中的公理之间相互矛盾,那就没有人信服这个公理系的正确性,也就没有必要从这一有问题的公理系去建立一门数学学科.但是推不出矛盾,并不能保证这个公理系是没有矛盾的,只是你暂时没有认识到,将来可能会推出矛盾,因此用直接的方法去检验这3条标准是相当困难的.

一般来说,一个公理体系的相容性和完备性可以用模型实现,就是把公理系放在已知的一个合理的模型上讨论.如果公理系能在这个已知模型上实现,那么这个公理体系就不可能存在矛盾,否则这种矛盾就会反映在已知模型上,而这是不可能的.说明这个模型本身就不合理.例如希尔伯特欧氏几何公理系的相容性的验证,我们可以将这个公理系用笛卡儿模型(坐标系)来实现:将实数对(x,y)作为平面上的点,不全为0的3个实数之比$(u:v:w)$作为直线,如果两组数比值相等,即$u:v:w=u':v':w'$,则$(u:v:w)$与$(u':v':w')$表示同一直线.点(x,y)在直线$(u:v:w)$上当且仅当$ux+vy+w=0$.点$B(x_2,y_2)$在点$A(x_1,y_1)$与点$C(x_3,y_3)$之间,当且仅当x_2在数x_1与x_3之间,y_2在数y_1与y_3之间,最后检验两条线段和两个角合同.如果存在正交变换

$$\begin{cases} x' = a_1x+b_1y+c_1, \\ y' = a_2x+b_2y+c_2, \end{cases} \quad \text{其中} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1,$$

将其中一个线段(或角)变为另一个,可以验证,在用实数构成的这个体系上,希尔伯特欧氏平面几何的公理系I_{1-3},Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ和Ⅴ都可以实现,所以欧氏平面几何公理系是没有矛盾的.完全类似地,可以在三维笛卡儿模型上证明希尔伯特欧氏立体几何的公理系是没有矛盾的.

至于完备性,只要证明:如果一个公理系在任意两个模型上都可以实现,并能证明这两个模型是同构的,即只要检验这两个模型上的基本对象之间可以建立一一对应关系,并保持所有的基本关系.对于欧氏几何公理系,可以在它的每个模型上建立笛卡儿坐标系,从而每个模型都与笛卡儿模型同构,这就说明欧氏几何公理系是完备的.

最后是相容性,前面我们讲过用直接的方法去验证公理系中的某个公理独立是非常困难的.我们可以应用罗巴切夫斯基建立罗氏几何的思想,用间接的方法去检验公理性的无矛盾性.它的基本思想是这样的:设有公理系Δ,在Δ中除去公理A剩下的系统称为Δ',又设$\overline{A}$是公理A的否定命题.如果A在Δ中不独立,即A是公理系Δ'的推论,那么$\Delta'\cup\{A'\}$将是矛盾的.反之,如果公理系$\Delta'\cup\{\overline{A}\}$没有矛盾,则说明公理$A$在公理系$\Delta$中是独立的.例如非欧几何中的罗氏几何公理系,就是在欧氏几何公理系中,将欧氏平行公理Ⅳ用罗氏平行公理(Ⅳ的否定命题)代替而得的.反之,如果A在Δ中不独立,就是说A是公理系Δ'的推论,那么公理系$\Delta'\cup\{\overline{A}\}$将是矛盾的.

希尔伯特所提出的 3 条标准，公理的无矛盾性(相容性)是必要的，但是对于一个学科来说，公理的独立性与完备性并不是必需的条件，例如满足欧氏公理系中Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅴ的称为绝对几何公理系，它能演绎成一门绝对几何学，而这套公理系显然是不完备的，因为加上平行公理Ⅳ后，它才完备，公理的完备性是非常完美的，可是公理系的不完备性确能使我们研究更丰富. 而公理的独立性仅是使公理的个数最少，但这往往会增加难度，因此在中学几何教材中，并不能引进完美的希尔伯特欧氏公理系，而是添加一些并不独立的公理，这样就可减少难度，便于中学生的学习.

第 2 方面 从现代数学的角度考虑欧氏几何公理系. 集合论是现代数学的基础，如果对集合赋予一定的数学结构，集合论就能渗透到现代数学的许多分支，一般集合可以赋予 3 种数学结构.

一是代数结构 对集合中的元素定义加法、减法、乘法和除法等代数运算.

二是测度结构 在集合中定义度量关系，如长度、距离、勒贝格测度等.

三是拓扑结构 给出开集结构，如函数的连续性就是一种拓扑结构.

怎样用现代数学结构的观点来处理欧氏几何公理系，例如向量空间理论，就是在集合中赋予满足给定的法则的加法运算和数乘运算. 德国数学家外尔(1885～1955)在向量空间的基础上，建立了欧氏几何的一个公理系，它由五组 17 条公理所组成.

第 1 组 向量加法公理

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是 M 中的元素，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也是 M 中的元素，且满足

Ⅰ$_1$ **结合律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

Ⅰ$_2$ **交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

Ⅰ$_3$ **零向量存在** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

Ⅰ$_4$ **逆向量存在** 对每个 $\boldsymbol{a}$，存在 $\boldsymbol{b}$，使得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}, \qquad \text{记 } \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}.$$

第2组 向量的数乘公理

设 $\boldsymbol{a}$ 是 M 中的向量，λ 是实数，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 也是向量，且有

Ⅱ$_1$ $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$， 单位元存在；

Ⅱ$_2$ $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$， 结合律；

Ⅱ$_3$ $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 分配律(对数)；

Ⅱ$_4$ $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 分配律(对向量).

满足上面两组公理的集合 M，称为向量空间，如果还满足下面第 3 组公理的称为实内积空间.

第 3 组 向量的内积公理

对 M 中任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，有一实数 $f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积，亦可