快乐大本·优秀教材辅导

KUAILE DABEN

YOUXIUJIAOCAIFUDAO

概率论与数理统计

习题精解精练

（配谢国瑞第一版教材·高教版）

主　编　安玉伟　朱　捷　王佳秋

- 课后习题　精析　精解
- 同步训练　勤学　勤练

XITI

JINGJIEJINGLIAN

哈尔滨工程大学出版社

快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

概率论与数理统计
习题精解精练

（配谢国瑞第一版教材·高教版）

主　编　安玉伟 朱　捷 王佳秋
主　审　施久玉

XITI
JINGJIEJINGLIAN

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是配合谢国瑞主编的《概率论与数理统计》教材而编写的辅导书。本书按教材的章节顺序编排，每章包括书后习题解析和同步训练题两部分内容，旨在帮助学生熟练掌握解题的基本方法和技巧，巩固所学的知识，开阔视野。

本书可作为高等学校学生学习概率论与数理统计的辅导书，也可供教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题精解精练/安玉伟，朱捷，王佳秋主编.—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2007.4

ISBN 978-7-81073-990-0

Ⅰ.概 Ⅱ.①安…②朱…③王… Ⅲ.①概率论-高等学校-解题②数理统计-高等学校-解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 046907 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 肇东粮食印刷厂
开 本 787mm×1 092mm 1/16
印 张 8.25
字 数 170 千字
版 次 2007 年 4 月第 1 版
印 次 2007 年 4 月第 1 次印刷
定 价 11.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

概率论与数理统计是工科数学的重要组成部分，是理工科学生学习其他课程的基础，也是许多专业研究生入学考试的必考科目。为帮助广大学生更好地把握概率论与数理统计的知识要点，加深对基本理论的理解，提高学生应用知识分析问题、解决问题的能力，我们精心编写了这本书。

本书与高等教育出版社的《概率论与数理统计》(谢国瑞主编)教材同步。编写过程中，作者归纳解题规律、方法和技巧，因此该书对于启迪思维，开发智力，提高能力及加深对概率论与数理统计的理解都是大有益处的。

本书共八章，前五章是概率论部分，包括：第1章基本概念，第2章基本定理，第3章离散型随机变量，第4章连续型随机变量，第5章多维随机变量；后三章是数理统计部分，包括：第6章数理统计的基本概念，第7章参数估计，第8章假设检验。每章分为书后习题解析和同步训练题两个部分。

本书第1章、第2章、第3章由安玉伟编写，第4章、第5章由王佳秋编写，第6章、第7章、第8章由朱捷编写。哈尔滨工程大学数学系施久玉教授主审了全书。

由于作者水平有限，时间仓促，本书难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2007年3月

目　录

第1章　基本概念

书后习题解析

1.试对下列随机试验各写出一个样本空间:

(1) 掷一颗骰子;

(2) 一个口袋中有5个外形相同的球,编号分别为1,2,3,4,5,从中同时取出3个球;

(3)10只产品中有3只是次品,每次从其中任取一只(取出后不放回),直到将3只次品全部取出,记录抽取的次数;

(4) 对某工厂生产的产品进行检查,合格的盖上"正品",不合格的盖上"次品",如果查出2件次品就停止检查,或者查满4件产品也停止检查,记录检查结果.

解　(1)
$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

(2)
$$\Omega = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),\\ (1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\}$$

(3)
$$\Omega = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

(4) 用数字"1"代表正品,数字"0"代表次品,则

$$\Omega = \{(0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0),\\ (1,0,1,0),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,1,1,1)\}$$

2.工厂对一批产品做出厂前的最后检查,用抽样检查方法,约定:从这批产品中任意取出4件产品来做检查,若4件产品全合格就允许这批产品正常出厂;若有1件次品就再做进一步检查;若有2件次品则将这批产品降级后出厂;若有2件以上次品就不允许出厂.试写出这一试验的样本空间,并将"正常出厂"、"再做检查"、"降级出厂"、"不予出厂"这4个事件用样本空间的子集表示.

解　$$\Omega = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1),\\ (1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),\\ (0,0,1,1),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,0,0)\}$$

若将这些样本点依次表示成 $\omega_1 \sim \omega_{16}$,则有

$$A = \text{"正常出厂"} = \{\omega_1\}$$

$$B = \text{"再做检查"} = \{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$$

$$C = \text{"降级出厂"} = \{\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10},\omega_{11}\}$$

$$D = \text{"不予出厂"} = \{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{16}\}$$

3.设 A,B,C 是三个事件,试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1)A 与 B 都发生,但 C 不发生;

(2)A 发生,但 B 与 C 可能发生也可能不发生;

(3) 这三个事件都发生;

(4) 这三个事件都不发生;

(5) 这三个事件中至少有一个发生；

(6) 这三个事件中最多有一个发生；

(7) 这三个事件中至少有二个发生；

(8) 这三个事件中最多有二个发生；

(9) 这三个事件中恰有一个发生；

(10) 这三个事件中恰有二个发生.

解 (1)$AB\overline{C}$,或 $AB-C$；

(2)A；

(3)ABC；

(4) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(5)$A\cup B\cup C$,或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$；

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$,或$\overline{AB\cup BC\cup AC}$；

(7)$AB\cup AC\cup BC$,或 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$；

(8) $\overline{ABC}$,或$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$；

(9)$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(10)$AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$,或 $AB\cup AC\cup BC-ABC$.

4.设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,3,4\}$,$C=\{4,5,6\}$,试用 Ω 的子集表出下列事件：

(1) $\overline{A}B$;(2) $\overline{A}\cup B$;(3) $\overline{B-A}$;(4) $\overline{A\overline{BC}}$;(5) $\overline{A(B\cup C)}$.

解 (1) 因为$\overline{A}=\{4,5,6\}$,所以$\overline{A}B=\{4\}$；

(2) $\overline{A}\cup B=\{2,3,4,5,6\}$；

(3) 因为 $B-A=\{4\}$,所以$\overline{B-A}=\{1,2,3,5,6\}$；

(4) 因为 $BC=\{4\}$,$\overline{BC}=\{1,2,3,5,6\}$,$A\overline{BC}=\{1,2,3\}$,所以$\overline{A\overline{BC}}=\{4,5,6\}$ 或$\overline{A\overline{BC}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{BC}}=\overline{A}\cup BC=\{4,5,6\}$；

(5) 因为 $B\cup C=\{2,3,4,5,6\}$,$A(B\cup C)=\{2,3\}$,所以$\overline{A(B\cup C)}=\{1,4,5,6\}$.

5.对三个任意给定的事件 A,B,C：

(1) 试化简$(A\cup B)(B\cup C)$；

(2) 试将 $A\cup B\cup C$ 表成互不相容事件之和.

解 (1)
$$(A\cup B)(B\cup C)=((A\cup B)B)\cup((A\cup B)C)=B\cup(AC\cup BC)=(B\cup BC)\cup AC=B\cup AC$$

(2)
$$(A-AB)+(B-BC)+(C-AC)+ABC$$

6.指出下列各题是否正确(提示:可借助文氏图)：

(1)$A\cup B=A\overline{B}\cup B$； (2) $\overline{A}B=A\cup B$；

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$； (4)$AB(A\overline{B})=\varnothing$；

(5) 若 $A\subset B$,则 $A=AB$； (6) 若 $AB=\varnothing$,$C\subset A$,则 $BC=\varnothing$；

(7) 若 $A\subset B$,则$\overline{B}\subset\overline{A}$； (8) 若 $B\subset A$,则 $A\cup B=B$.

解 画出(1) ~ (6) 题的文氏图,如图 1 - 1 所示.从(1) ~ (6) 题的文氏图可以看出(1),(4),(5),(6) 题是正确的,(2),(3) 不正确.

当 $A\subset B$ 时,若 B 不发生,则 A 必定不发生,即$\overline{B}\subset\overline{A}$,所以(7) 正确.当 $B\subset A$ 时,$A\cup B=A$,所以(8) 不正确.

7.对投掷一对均匀骰子的试验,可给出两个样本空间 Ω 和 Ω_1 如下:Ω 是由第一颗骰子与第二颗骰子出现点数的对子组成的,有

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

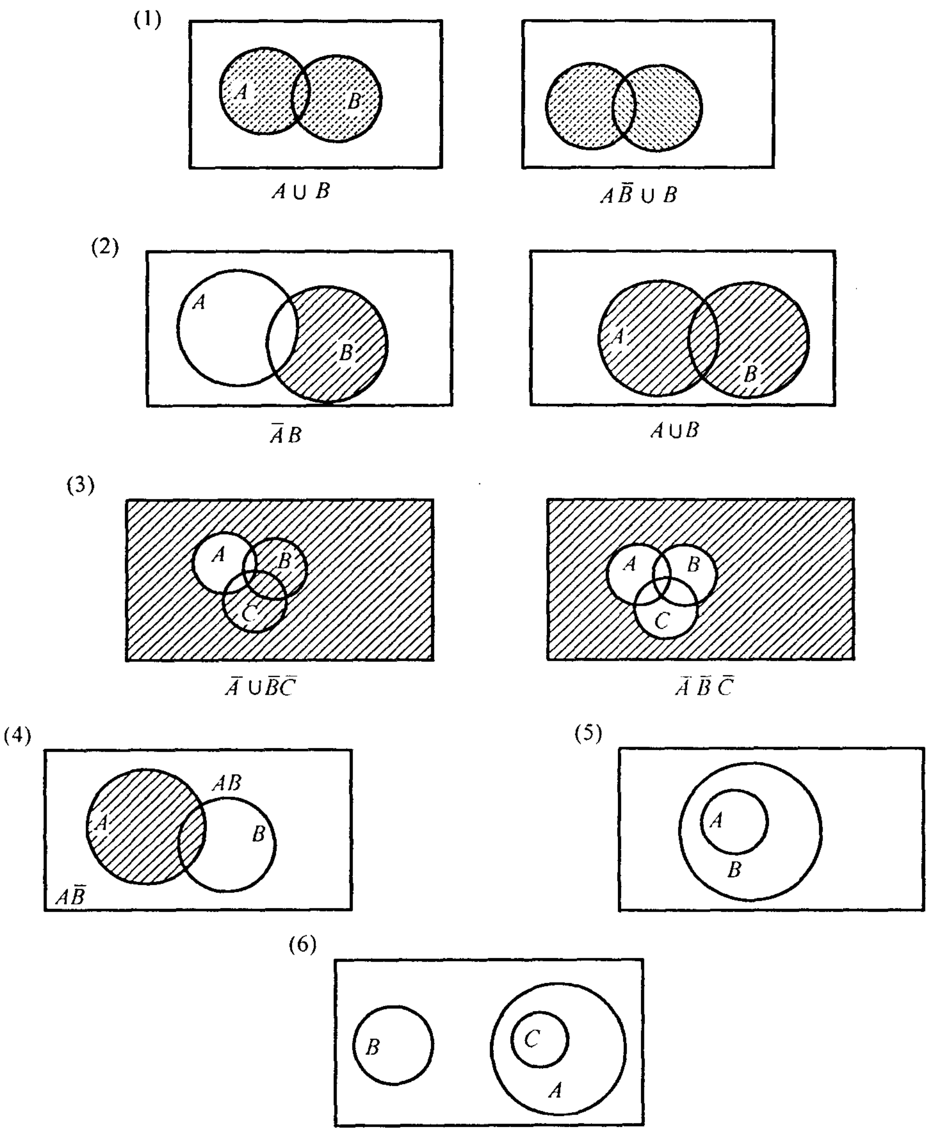

图 1－1

而 Ω_1 由两颗骰子出现点数之和组成,有 $\Omega_1 = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

在求出现“点数之和等于 7”的概率 p 时，依 Ω 计算得 $p = 6/36 = 1/6$；依 Ω_1 计算得 $p = 1/11$，试分别解释得此结果的依据，哪一个结果正确？怎样理解这一正确结果？

解 这两个结果都是依古典概率公式算得的. 因骰子是均匀的，故每次投掷出现哪一个点数均应是等可能的，所以有理由认为样本空间 Ω 的样本点具有等可能性. 在样本空间 Ω 中，“点数之和等于 7” 这一事件包含(1,6)，(6,1)，(2,5)，(5,2)，(3,4)，(4,3) 共 6 个样本点，Ω 共有 36 个样本点，据此用古典概率公式算出的结果 $p = 6/36 = 1/6$ 是正确的.

依 Ω_1 计算得 $p = 1/11$，同样也用了古典概率公式，Ω_1 中共有 11 个样本点，而点数之和等于 7，只有 1 个样本点，所以得 $p = 1/11$. 但是，对于 Ω_1 而言，样本点不具有等可能性，例如样本点“2”，包含“第一个骰子掷出一点、第二个骰子掷出一点” 一个试验结果，而样本点“7” 包含 6 个试验结果.

8. 假设发现了一颗不均匀的骰子，由于它，使得在进行掷一对骰子的试验时，在上题的样本空间 Ω 中出现偶数和(如(1,1)，(1,3)，…) 的次数比奇数和(如(2,1)，(2,3)，…) 的次数多一倍，求下列事件的概率：

(1) 点数和小于 6；(2) 点数和等于 8；(3) 点数和是偶数.

解 将一颗骰子不均匀出现的偶数和的试验结果记为“$(1',1')$，…，$(6',6')$ 等，则样本空间为

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \\ (1',1'), & (1',3'), & (1',5'), & (2',2'), & (2',4'), & (2',6') \\ (3',1'), & (3',3'), & (3',5'), & (4',2'), & (4',4'), & (4',6') \\ (5',1'), & (5',3'), & (5',5'), & (6',2'), & (6',4'), & (6',6') \end{matrix}\right\}$$

样本点总数为 54，其中：

(1)“点数和小于 6” 的样本点数为 14 个，故“点数和小于 6” 的概率为 14/54；

(2)“点数和等于 8” 的事件包含 10 个样本点，故“点数之和等于 8” 的概率为 10/54；

(3)“点数和是偶数” 事件包含 36 个样本点，故“点数和是偶数” 的概率为 36/54.

9. 某人忘记了一个电话号码的最后一位数字，因此只能试着随意地拨这位数，试求他拨号不超过三次就能接通电话的概率是多少？若记得最后一位是奇数，则此概率又是多少？

解 此人必定在十次之内接通此号码，将此十次看做是 10 个箱子，编号为 1，2，…，10. 把正确的号码看做一个球，此球置于第 n 号箱子中，表示此人拨 n 次才能接通电话，球的放置方法共 10 种. 以 A 表示“不超过三次就能接通电话” 这一事件，则 A 的有利场合就是将球置入前三个箱子中，共有三种，故 $P(A) = 3/10 = 0.3$.

若记得最后一位是奇数，则多只需拨五次就能接通电话. 故样本点总数为 5，$P(A) = 3/5 = 0.6$.

10. 房间中有 4 个人，试问没有 2 个人的生日在同一个月份的概率是多少？

解 概率为 $p = C_{12}^4/12^4$.

11. 从 1，2，3，4，5 这五个数字中等可能地、有放回地接连抽取三个数字，试求下列事件的概

率：$A=\{$三个数字全不相同$\}$，$B=\{$三个数字中不含1或5$\}$，$C=\{$三个数字中5出现了两次$\}$.

解　从五个数字中等可能、有放回地接连取三个数字，共有$5\times5\times5=125$种取法.事件A的有利场合可以这样计算：第一次可以从$1,2,\cdots,5$中任取一个数，共有五种取法，第二次只能从其余四个数中任取一个，有四种取法，第三次有三种取法，故A的有利场合共有$5\times4\times3=60$种取法，则$P(A)=60/125=0.48$.事件B的有利场合为：第一次从2,3,4三个数中任取一个，共有三种方法，同理第二次、第三次各有三种方法，故事件B的有利场合共有$3\times3\times3=27$种取法，所以$P(B)=27/125=0.216$.事件C的有利场合为：由于5出现了两次，另一个数只能从1,2,3,4这四个数字中任取一个，有四种取法，这个数可能在第一次或第二次或第三次中的某一次取到，故C的有利场合共有$4\times3=12$种取法，所以$P(C)=12/125=0.096$.

12.将十本不同的书放置到一个空书架上，求其中指定的某三本书恰好放在一起的概率.

解　设此事件为A，其样本空间中的样本点为十本不同书的任一种可能的排列，样本点总数为$n=10!$.A的有利场合可以这样计算：先将指定的三本书看做一本书与其他七本书放在一起排列，共有$(7+1)!$种排列方法，这三本书有$3!$种不同的排列顺序，所以A的有利场合为$3!\cdot8!$，故

$$P(A)=\frac{3!\cdot8!}{(10)!}=\frac{6}{10\times9}\approx0.067$$

13.将3个球放置到4个盒子中去，求下列事件的概率：

(1)A是没有一个盒子里有2个球；(2)B是3个球全在一个盒子内.

解　将盒子与球都编号处理，这样，盒子与盒子、球与球都看做是不同的.其样本空间中的样本点总数为4^3.

(1)A的有利场合的计算方法为：先从4个不同的盒子中任取3个，有$C_4^3=4$种取法，将3个球放在这三个盒子中，有$3!=6$种方法，故A的有利场合为$4\times6=24$种方法，所以$P(A)=24/4^3=4!/4^3=0.375$.

(2)B的有利场合计算方法为：从4个盒子中取出一个，共有4种取法.故$P(B)=4/4^3=0.0625$.

14.教室内10个人分别佩戴着编号从1号到10号的校徽，现从中任选3人并记录其校徽的号码，试求下列事件的概率：(1)最小号码是5；(2)最大号码是5.

解　从1到10这十个数中任取三个一组作为样本空间中的样本点，共C_{10}^3种取法，各种情况的有利场合的计算方法为：

(1)由于最小号码是5，其余两个数只能从$6,7,\cdots,10$这五个数中任取2个为一组，有C_5^2种方法，故有利场合为C_5^2，所以$P(A)=C_5^2/C_{10}^3=0.083$.

(2)若最大号码为5，则其余两个号码只能从1,2,3,4这四个数中任取2个，共有C_4^2种取法，故此种情况的概率为$P(B)=C_4^2/C_{10}^3=0.05$.

15.盒中有6只灯泡，其中2只次品，4只正品，现从中有放回地抽取二次（每次取出一只），求下列事件的概率：

(1)A是二次抽到的都是次品；(2)B是一次抽到正品，另一次抽到次品.

解　该试验的样本空间中的样本点总数为6^2（可参考教材17页中例11的解释）.

(1)由于二次抽到的都是次品，且为有放回抽样，每次只能从2只次品中抽取，故A的有利场合为2^2，所以$P(A)=2^2/6^2=0.11$.

(2) 抽到正品共有4种可能,抽到次品共2种可能,可能第一次抽到正品,也可能第二次抽到正品,故 B 的有利场合为 $4\times2\times2=16$,所以 $P(A)=\frac{4\times2\times2}{6^2}=0.44$.

16.将上题改为无放回抽取二次后(相当于一次抽取,取2个),再计算这些事件的概率.

解 在无放回抽样时,样本空间的样本点总数为 C_6^2,A 的有利场合总数为 C_2^2,$P(A)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=0.067$,$B$ 的有利场合总数为 $C_4^1\cdot C_2^1$,$P(B)=\frac{C_4^1\cdot C_2^1}{C_6^2}=0.533$.

17.一公司批发出售服装,每批100套.公司估计某客商欲购的那批100套服装中有4套是次品,12套是等级品,其余是优质品,客商在进货时要从中接连抽出2套做样品检查,如果在样品中发现有次品,或者2套都是等级品,客商就要退货.试求下列事件的概率:

(1) 样品中1套是优质品,1套是次品;(2) 样品中1套是等级品,1套是次品;(3) 退货;(4) 该批货被接受;(5) 样品中有1套优质品.

解 此试验为从100件服装中任取2件的排列问题,样本空间中的样本点总数为 $100\times99=9\,900$.

(1) 此事件的有利场合为 $2\times A_{84}^1\times A_4^1=2\times84\times4$,故概率为

$$p=\frac{2\times84\times4}{9\,900}=\frac{56}{825}$$

(2) 此事件的有利场合为 $2\times A_{12}^1\times A_4^1=2\times12\times4$,故概率为

$$p=\frac{2\times12\times4}{9\,900}=\frac{8}{825}$$

(3) 退货有两种情况:① 抽出一件次品,另外一件为次品或其他情形,共有 $4\times3+4\times96\times2$ 种取法;② 抽出两件等级品,共有 12×11 种方法.故概率为

$$p=\frac{4\times3+4\times96\times2+12\times11}{100\times99}=\frac{76}{825}$$

(4) 该批货物被接受有两种情况:① 抽取的两件产品均为优质品,有 84×83 种方法;② 抽取一件优质品及一件等级品,共有 $2\times A_{84}^1\times A_{12}^1=2\times84\times12$ 种方法,故概率为 $p=\frac{84\times83+2\times84\times12}{100\times99}=\frac{749}{825}$.

(5) 此种情况的有利场合为 $2\times A_{16}^1\times A_{84}^1=2\times16\times84$,故概率为

$$p=\frac{2\times16\times84}{100\times99}=\frac{224}{825}$$

18.在桥牌比赛中,将52张牌任意地分给东、南、西、北四家,求在北家的13张牌中:(1) 恰有5张黑桃,4张红心,3张方块,1张草花的概率;(2) 恰有大牌A,K,Q,J各1张而余皆为小牌的概率.

解 将玩桥牌的四人按顺序编号,北家编号为1号,东、南、西三家编号分别为2,3,4号.因每个人均从52张牌中分得13张,所以首先假定1号抽到13张,有 C_{52}^{13} 种不同的抽取方法;待1号抽取完13张后,2号接着抽取13张,因2号抽取的13张只能从1号抽出13张后所剩下的39张中抽取,故有 C_{39}^{13} 种方法;同理可知:3号、4号的抽取方法数分别为 C_{26}^{13},C_{13}^{13},搭配起来共有 $C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$ 种,即样本空间的样本点总数为 $C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$.

(1)1号可以从13张黑桃中抽取5张,共有 C_{13}^5 种方法,从13张红心中任意抽取4张,有 C_{13}^4 种方法,同理抽取3张方块,1张草花的抽取方法分别为 C_{13}^3,C_3^1,故1号的抽取方法共有

$C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1$ 种. 而 2 号, 3 号, 4 号的抽取方法数分别为 $C_{39}^{13}, C_{26}^{13}, C_{13}^{13}$, 所以有利场合为 $C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$. 故概率为

$$p=\frac{C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}=\frac{C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1}{C_{52}^{13}}$$

(2)1 号抽到 A 牌 1 张的方法有 C_4^1 种, 同理抽到 K 牌、Q 牌、J 牌的方法各有 C_4^1 种, 其余 9 张牌从 36 张小牌中抽取, 共有 C_{36}^9 种方法, 故 1 号共有 $C_4^1C_4^1C_4^1C_4^1C_{36}^9$ 种方法, 而 2 号, 3 号, 4 号分别有 $C_{39}^{13}, C_{26}^{13}, C_{13}^{13}$ 种方法, 故有利场合为 $C_4^1C_4^1C_4^1\ C_4^1C_{36}^9C_{39}^{13}\ C_{26}^{13}C_{13}^{13}$ 种方法, 故概率为

$$p=\frac{C_4^1C_4^1C_4^1C_4^1C_{36}^9C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}=\frac{C_4^1C_4^1C_4^1C_4^1C_{36}^9}{C_{52}^{13}}$$

19. 甲、乙两人相约 9 点到 10 点间在某地点会面, 约定先到者等候 20 分钟, 过时就可离去, 试求两人能会面的概率.

解　以 9 点钟为计时开始时刻(以分钟为单位), 设甲到达该地点的时刻为 x, 乙到达该地点的时刻为 $y(0\leqslant x, y\leqslant 60)$, 则考察甲、乙两人到达该地点的时刻, 相当于向图 1－2 所示的正方形区域内随机地投点, 设 A 表示"两人能够会面" 这一事件, 则 A 可表示为 $|x-y|\leqslant 20$. 标于图 1－2 中, 就是当点落在阴影区域内时, 两人能够会面, 用几何概率公式计算, 有

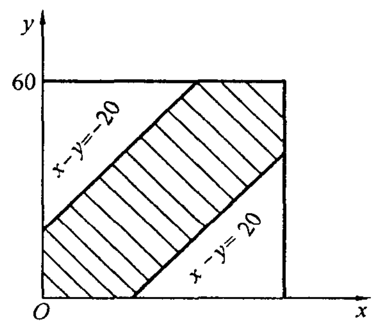

图 1－2

$$P(A)=\frac{60^2-2\times\frac{1}{2}\times 40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$

20. 在观察投掷一对均匀骰子 100 次之后, 一个观察者估计第 101 次投掷出现点数和是偶数的概率为 0.85. 请评说对这一概率应给以相对频率解释(即统计解释) 还是主观概率解释? 试说明理由.

解　这里作出的结论, 只是基于 100 次试验而得到的, 反映了对一个事件发生与否的自信程度, 只能作主观概率解释.

21. 某地区的最新生存率统计数据表明, 每 10 万人中有 6 万人活到了 70 岁以上, 故而长期在该地区生活的 A 先生能活到 70 岁以上的概率是 6/10 = 0.6, 对这一概率应怎样理解? 试说明理由.

解　这一概率反映了对 A 先生能活到 70 岁以上的自信程度. 这一主观概率值是依据相对频率数据(生存率统计) 作出的.

同步训练题

1. 从装有 3 只红球, 2 只白球的口袋中任意取出 2 只球, 则事件"取到 2 只白球" 的逆事件是(　　).

A. 取到 2 只红球　　　　B. 取到的白球数大于 2

C. 没有取到白球　　　　D. 至少取到 1 只红球

解　选 D. 因为逆事件等同于否事件, 而取到 2 只白球的否为至少取到 1 只红球.

2.设 A,B 是样本空间 Ω 中任意两个事件,则必有 $A\cup B\neq$(　　).

A.$A\overline{B}\cup AB\cup\overline{A}B$　　B.$A\cup\overline{A}B$　　C.$\Omega-\overline{A\cup B}$　　D.$A-\overline{B}$

解　选D.因为 $A\overline{B}\cup AB\cup\overline{A}B=A\cup B\cup\overline{A}B=A\cup B$;$A\cup\overline{A}B=A\cup B$;$\Omega-\overline{A\cup B}=A\cup B$;$A-\overline{B}=A\cap B$.

3.设事件 A,B,C 两两互不相容,则(　　)不成立.

A.$A-B=A$　　B.$AC=\varnothing$　　C.$A\cup B\cup C=\Omega$　　D.$ABC=\varnothing$

解　选C.因为 A,B 互不相容,所以 $A-B=A$,又因为 A,C 互不相容,所以 $AC=\varnothing$,又 A,B,C 互不相容,所以 $ABC=\varnothing$,因此选C.

4.若 A,B,C 是随机事件,说明下列关系式的概率意义:

(1)$ABC=A$;(2)$A\cup B\cup C=A$;(3)$AB\subset C$;(4)$A\subset\overline{BC}$.

解　(1)$ABC=A\Rightarrow BC\supset A\Rightarrow B\supset A$ 且 $C\supset A$,表示若 A 发生,则 B 与 C 必同时发生.

(2)$A\cup B\cup C=A\Rightarrow B\cup C\subset A\Rightarrow B\subset A$ 且 $C\subset A$,表示 B 发生或 C 发生,均导致 A 发生.

(3)$AB\subset C\Rightarrow A$ 与 B 同时发生必导致 C 发生.

(4)$A\subset\overline{BC}\Rightarrow A\subset\overline{B}\cup\overline{C}$,表示 A 发生,则 B 与 C 至少有一个不发生.

5.设 A 表示"甲射击击中目标",B 表示"乙射击击中目标",C 表示"丙射击击中目标",试用语言表述下列各事件:

(1) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$;(2) $\overline{A\cup B}$;(3)$ABC\cup\overline{A}BC$;(4) $\overline{A\cup B\cup C}$;(5) $\overline{AB}$.

解　(1) 甲、乙、丙至少有一个不命中,即甲、乙、丙不都命中:$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$;

(2) 甲、乙都不命中:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$;

(3) 乙、丙同时命中:$ABC\cup\overline{A}BC=BC$;

(4) 甲、乙、丙没有一个命中,即甲、乙、丙都不命中:$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(5) 甲、乙不都命中,即甲、乙至少有一个不命中:$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

6.在某城市中发行三种报纸:甲、乙、丙.用 A,B,C 分别表示"订阅甲报","订阅乙报","订阅丙报",试求下列各事件:

(1)"只订甲报";(2)"共订甲、乙两报";(3)"只订一种报纸";(4)"正好订两种报纸";(5)"至少订一种报纸";(6)"不订任何报纸".

解　(1)$A\,\overline{B}\,\overline{C}$;(2)$AB\,\overline{C}$;(3)$A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;(4)$AB\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC$;(5)$A\cup B\cup C$;(6)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$,或$\overline{A\cup B\cup C}$.

7.设一袋中有编号为1,2,3,…,9的球共9只,某人从中任取3个球,试求:

(1)取到1号球的概率;(2)最小号码为5的概率;(3)所取号码从小到大排列,中间一只恰为5的概率.

解　题中"任取"表示不放回抽样,设 A 表示"取到1号球",B 表示"最小号码为5",C 表示"所取号码从小到大排列,中间一只恰为5".这里关心的是某球是否被取到,而对该球在哪一次被取到不感兴趣,故我们不考虑球的次序.样本空间 Ω 中的点数为 C_9^3.

(1)A 的有利场合数:取到1号球,只有1种方法,其余2个球在2到9号球中任取,有 C_8^2 种方法,故 $P(A)=C_8^2/C_9^3=1/3$;

(2)B 的有利场合数:B 意味着5号球肯定被取到,并且其余2个球只能从6到9号这4个球中任取,故 $P(B)=C_4^2/C_9^3=1/14$;

(3)C 的有利场合数:由于5号球在中间,则其余2个球中,一球必在1,2,3,4中任取,另一

球必在6,…,9中任取,故 $P(C) = C_4^1 C_4^1 / C_9^3 = 4/21$.

8.从数字0,1,…,9这10个数字中不放回地依次选取3个数字,组成一个三位数(或两位数),试问:

(1) 此数个位数是5的概率是多少?(2) 此数能被5整除的概率是多少?(3) 依次所取3个数恰好为从小到大排列的概率是多少?

解 设 A 表示"此数个位数是5",B 表示"此数能被5整除",C 表示"所取3个数恰为从小到大排列".

由题意可知,这里涉及被取出3个数字的次序,因而在计算点数时,必须考虑取数的"次序".样本空间为三位数(或两位数),依次取3个数组成一个三位数(或两位数)可以有不同的方式,例如先取出百位数,最后取个位;也可以先取出个位数,最后取出百位数.这两种方法是相互对应的,样本点数是相同的.

在计算 Ω 的点数时,可分三步:第一步,取个位,共有10种方法;第二步,取十位,有9种方法;第三步,取百位,有8种方法.若百位取到0,表示组成的是两位数,故 Ω 的样本点数为 $10 \times 9 \times 8$.

(1) A 的有利场合数:第一步取个位数,只能取5这个数,只有一种方法;第二步取十位,从剩余的9个数中取,有9种方法;第三步有8种方法,故 A 中的点数为 $1 \times 9 \times 8$,所以 $P(A) = \frac{1 \times 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{10}$.

(2) B 中的样本点数:第一步取个位时,有0或5这两种方法,第二步、第三步同(1),故 B 中的点数为 $2 \times 9 \times 8$,所以 $P(A) = \frac{2 \times 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{5}$.

(3) 从0,1,…,9这10个数中任取3个数组成的三位数共有 C_{10}^3 种取法,每三个数组成的三位数中只有一个满足从个位、十位到百位是从小到大排列的,所以 C 中的点数为 C_{10}^3,故 $P(C) = \frac{C_{10}^3}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}$.

9.某城市有 N 部卡车,车牌号从1到 N,有一个外地人到该城去,把遇到的 n 部车子的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号).问抄到的最大号码正好为 K 的概率($1 \leqslant K \leqslant N$).

解 这种抄法可以看做是对 N 个车牌号进行 n 次有效放回的抽样,所有可能的抽法共有 N^n 种,用 A 表示"抄到的最大号码正好为 K"的事件,先考虑最大号码不大于 K 的取法,这种取法共 K^n 种,再考虑最大车牌号不大于 $K-1$ 的取法,其数目共有 $(K-1)^n$ 种,故 A 的有利场合数为 $K^n - (K-1)^n$,因此所求概率为

$$P(A) = \frac{K^n - (K-1)^n}{N^n}$$

10. 50只铆钉随机地取来用在10个部件上,其中有3只铆钉强度太弱.每个部件用3只铆钉.若将3只强度太弱的铆钉都装在一个部件上,则这个部件的强度就太弱.问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

解 将部件自1到10编号,设 $A_i(i = 1,2,\cdots,10)$ 表示"第 i 号部件强度太弱".由题意,仅当3只强度太弱的铆钉同时装在 i 号部件上时,A_i 才能发生.由于从50只铆钉中任取3只装在第 i 号部件上共有 C_{50}^3 种方法,强度太弱的3只铆钉都装在第 i 号部件上,只有 $C_3^3 = 1$ 种取法,故

$$P(A_i)=\frac{1}{C_{50}^3}=\frac{1}{19\,600},\quad i=1,2,\cdots,10$$

显然 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,1\leqslant i<j<10)$,因此,10个部件中有一个强度太弱的概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10})=\sum_{i=1}^{10}P(A_i)=\frac{10}{19\,600}=\frac{1}{1\,960}$$

11.从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r<n)$ 只,求下列事件的概率:(1) 没有成对的鞋子;(2) 只有一对鞋子;(3) 恰有两对鞋子;(4) 有 r 对鞋子.

解 (1)设 A 表示"没有成对的鞋子",B 表示"只有一对鞋子",C 表示"恰有两对鞋子",D 表示"有 r 对鞋子".从 n 双不同鞋子中任取 $2r$ 只共有 C_{2n}^{2r} 种取法,即样本空间中样本点总数为 C_{2n}^{2r}.

(1)A 的有利场合数:先从 n 双中取出 $2r$ 双,再从每双中取出一只,共有 $C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}$ 种取法,因此

$$P(A)=\frac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{2^{2r}C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$$

(2)B 的有利场合数:先从 n 双中取出一双,其双只全取出,再从剩余的 $n-1$ 双中取出 $2r-2$ 双,从其每双中取出一只,共有 $C_n^1C_2^2C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}$ 种取法,故

$$P(B)=\frac{C_n^1C_2^2C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{n2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$$

(3) 与(2) 类似,有 $P(C)=\dfrac{2^{2r-4}C_n^2C_{n-2}^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$.

(4)$P(D)=C_n^r/C_{2n}^{2r}$.

12.把 n 个不同的质点随机地投入 $N(N\geqslant n)$ 个格子中,假定每个格子能容纳的质点数是没有限制的,求下列事件的概率.

(1)A:"指定的 n 个格子中各投入一个质点";

(2)B:"恰有 n 个格子,各投入一个质点";

(3)C:"指定的一个格子中恰好投入 $m(m<n)$ 个质点".

解 由于格子能容纳的质点是没有限制的,故 n 个质点全部投入格子中,有 N^n 种方法,以每种方法作为样本点组成样本空间.

(1) 对于事件 A,n 个质点在 N 个格子中的分布(每格中各有一个质点) 有 $n!$ 种方法,故 $P(A)=\dfrac{n!}{N^n}$.(2) 对于事件 B,在 N 个格子中指定 n 个格子,有 C_N^n 种方法,在此 n 个格子中各有一个质点的概率为$\dfrac{n!}{N^n}$,故 $P(B)=\dfrac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$.(3) 先从 n 个质点中取出 m 个放入指定的一个格子中,有 C_n^m 种方法,然后将其余的 $n-m$ 个质点任意放入 $N-1$ 个格子中,有$(N-1)^{n-m}$ 种方法.由乘法原理,事件 C 含有 $C_n^m(N-1)^{n-m}$ 个样本点,故 $P(C)=\dfrac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}$.

13.将 n 个球随机地放入编号为 $1,2,\cdots,11$ 的 n 只盒子中,求恰有一只空盒子的概率.

解 与上题的样本空间一样,将 n 只球放入 n 只盒子的一种放法做为一个样本点,样本点总数为 n^n.设 A 表示"恰有一个空盒",故 A 发生相当于 n 只盒子中恰有一个空盒,且有一只盒子装有两只球,而另外 $n-2$ 只盒子均各装有一只球.从 n 个盒子中任取一个作为空盒有 C_n^1 种取法;再从其余 $n-1$ 个盒子中任取一个放 2 只球,有 C_{n-1}^1 种取法;从 n 个球中任取 2 个放入此

盒中,有 C_n^2 种取法;余下的 $n-2$ 个球放入余下的 $n-2$ 个盒子中,每个盒子各有一个球,共有 $(n-2)!$ 种方法.故 A 的样本点数为 $C_n^1C_{n-1}^1C_n^2(n-2)!$,因此

$$P(A)=\frac{C_n^1C_{n-1}^1C_n^2\cdot(n-2)!}{n^n}$$

14.将6只球随机地放入3个盒子中去,求每只盒子都有球的概率.

解 设 A 表示"每只盒子都有球",A_1 表示"3只盒子装球数分别为4,1,1",A_2 表示"3只盒子装球数分别为3,2,1",A_3 表示"3只盒子装球数均为2",则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$,且 A_1,A_2,A_3 两两互不相容,其中

$$P(A_1)=\frac{C_3^1C_6^4C_2^1}{3^6}=\frac{90}{3^6},P(A_2)=\frac{C_3^1C_6^3C_2^1C_3^2}{3^6}=\frac{360}{3^6},P(A_3)=\frac{C_6^2C_4^2}{3^6}=\frac{90}{3^6}$$

因此 $$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{540}{3^6}=\frac{20}{27}$$

15.从(0,1)中随机地取两个数,试计算下列概率:

(1) 两数之和小于1.2;(2) 两数之积小于1/4.

解 从(0,1)中取出两数分别记为 x,y,则 (x,y) 与正方形 $ABCD$ 内的点一一对应.

(1) 如图1-3(a)所示,直线 $x+y=1.2$ 与 BC 交点坐标为(1,0.2),与 DC 交点坐标为(0.2,1),由几何概率可得

$$P\{\text{两数之和小于}1.2\}=P\{x+y<1.2\}=\frac{\text{阴影区域(Ⅰ)面积}}{\text{正方形面积}}$$
$$=1-\frac{1}{2}\times0.8\times0.8=0.68$$

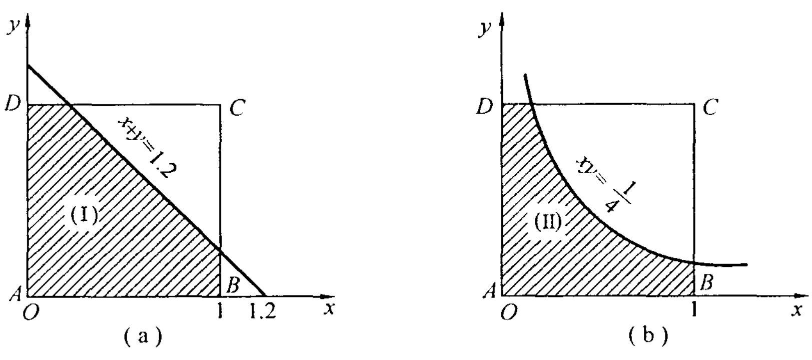

图1-3

(2) 如图1-3(b)所示,双曲线 $xy=\frac{1}{4}$ 与 BC 交点坐标为 $\left(1,\frac{1}{4}\right)$,与 DC 交点坐标为 $\left(\frac{1}{4},1\right)$,所以由几何概率得

$$P\left\{\text{两数之积小于}\frac{1}{4}\right\}=P\left\{xy<\frac{1}{4}\right\}=\frac{\text{阴影区域(Ⅱ)面积}}{\text{正方形面积}}$$
$$=\frac{1}{4}\times1+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln x\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln2$$

第2章　基本定理

书后习题解析

1.试用概率的可加性证明,若事件 B 蕴含 A,即 $B\subset A$,则必成立

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

而对于未必有蕴含关系的事件 A,B,必成立

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$

证明　因为 $B\subset A$,则 $(A-B)B=\varnothing$,且 $A=(A-B)+B$,所以有 $P(A)=P(A-B)+P(B)$,即 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.而对于一般情形,$A=(A-B)+AB$,$(AB)(A-B)=\varnothing$,故有 $P(A)=P(A-B)+P(AB)$,即 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

2.已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.4,P(AB)=0.1$,试求:

(1)$P(A\cup B)$;(2)$P(A|B)$;(3)$P(B|A)$;(4)$P(A|\overline{B})$.

解　(1)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.1=0.8$;

(2)$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.1}{0.4}=0.25$;

(3)$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.1}{0.5}=0.2$;

(4)$P(\overline{B})=1-P(B)=0.6,P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4$,

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.4}{0.6}=\frac{2}{3}$$

3.已知 A,B 是独立事件,$P(A)=0.3,P(B)=0.6$,试求:

(1)$P(A|B)$;(2)$P(A\cup B)$;(3)$P(\overline{B}|A)$;(4)$P(\overline{A}|B)$.

解　因为 A,B 是独立事件,所以 $P(AB)=P(A)P(B)=0.18$.

(1)$P(A|B)=P(A)=0.3$;

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.72$;

(3)$P(\overline{B}|A)=P(\overline{B})=1-P(B)=0.4$;

(4)$P(\overline{A}|B)=P(\overline{A})=1-P(A)=0.7$.

4.设 $P(A)>0,P(B)>0$,试将下列4个数:

$$P(A),\quad P(AB),\quad P(A)+P(B),\quad P(A\cup B)$$

按由小到大的顺序用不等号"$\leqslant$"连结起来,并分别对每个不等号指明何时成为等号.

解　由于 $P(A)=P(A-B)+P(AB)$,而 $P(A-B)\geqslant 0$,所以

$$P(A)\geqslant P(AB)$$

当 $A\subset B$ 时,$AB=A$,此时 $P(A)=P(AB)$;又

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

而 $P(B)-P(AB)\geqslant 0$,所以

$$P(A)\leqslant P(A\cup B)$$

当 $B\subset A$ 时,$AB=B,P(B)-P(AB)=0$,此时,$P(A)=P(A\cup B)$;又因为 $P(AB)\geqslant 0$,所