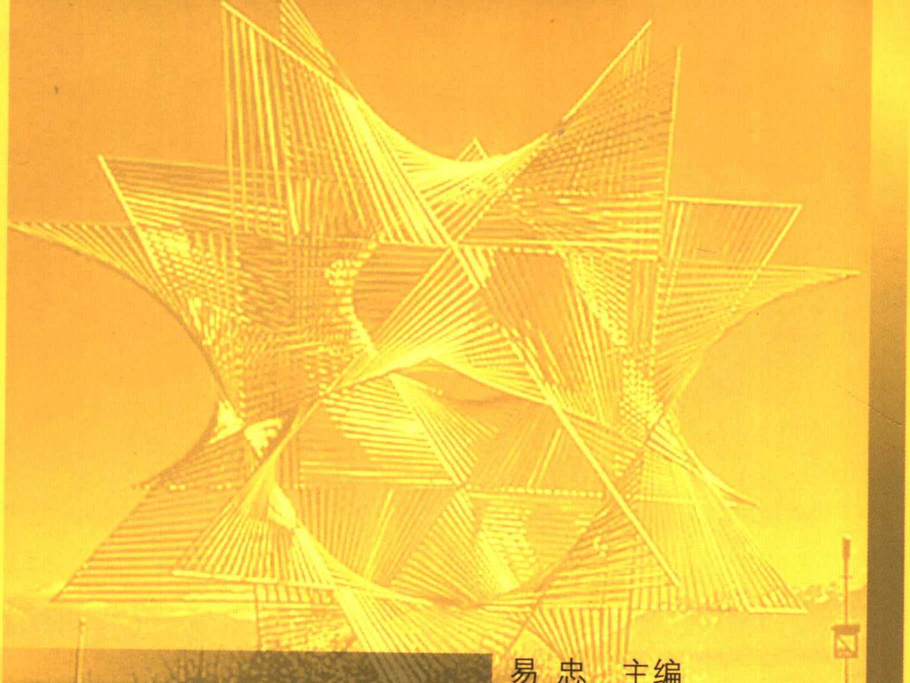

易忠 主编

高等代数与解析几何（下册）

清华大学出版社

高等代数与

解析几何（下册）

易　忠　主编

钟祥贵　邓培民　唐高华　黄敬频
梁燕来　任北上　陈肇斌　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书较系统地介绍了高等代数与解析几何的基本理论、方法和某些应用. 本书包括上册(第1~7章)、下册(第8~14章). 第1章介绍基本概念;第2章讨论行列式和线性方程组的解的情况;第3章研究向量代数与线性空间;第4章介绍线性方程组,建立了一般线性方程组解的结构定理;第5章介绍线性映射与矩阵,在取定基的情况下通过线性映射与矩阵的对应架起了几何观点(线性映射)和代数方法(矩阵)的桥梁;第6章介绍几何空间向量的运算及其应用;第7章介绍几何空间中的常见曲面;第8章讨论线性变换的可对角化问题;第9章介绍欧几里得空间;第10章讨论二次型与双线性函数;第11章介绍二次曲线的一般理论;第12章研究数域上的一元多项式;第13章介绍多元多项式;第14章讨论多项式矩阵与若尔当标准形. 本书附有相当丰富的习题,有利于读者学习和巩固所学知识.

本书可作为高等院校数学系本科生的教材,也可作为有关专业师生和工程技术人员的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何. 下册/易忠主编. 一北京: 清华大学出版社,2007.8
ISBN 978-7-302-15188-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 易… Ⅲ. ①高等代数一高等学校一教材 ②解析几何一高等学校一教材 Ⅳ. O15 O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 069525 号

责任编辑: 刘 颖 赵从棉
责任校对: 焦丽丽
责任印制: 李红英

出版发行: 清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机: 010-62770175
投稿咨询: 010-62772015
地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座
邮 编: 100084
邮购热线: 010-62786544
客户服务: 010-62776969
印 刷 者: 北京市清华园胶印厂
装 订 者: 三河市新茂装订有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 140×203 **印 张**: 8.625 **字 数**: 216 千字
版 次: 2007 年 8 月第 1 版 **印 次**: 2007 年 8 月第 1 次印刷
印 数: 1~4000
定 价: 15.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换. 联系电话: 010-62770177 转 3103 产品编号: 025428-01

前　言

高等代数与解析几何是师范院校和综合性大学数学专业的一门重要基础课程. 通过将高等代数与解析几何有机结合的课程教学,使学生初步掌握基本的、系统的代数几何知识和抽象的、严谨的代数方法,提高抽象思维能力、逻辑推理能力等基本数学能力,培养分析问题和解决问题等实际应用能力,为进一步学习数学专业后继课程或从事中学数学教学打下良好的基础.

本教材涵盖了高等代数与空间解析几何的主要内容. 在编写过程中,编者吸取了多年的教学实践经验及同类教材的许多优秀成果. 初稿完成后,曾在广西师范大学数学科学学院试用,并经反复修改、完善. 本教材有如下几个特点:

1. 体例新颖,结构清晰,特别考虑内容的编排顺序,致力于实现高等代数与空间解析几何交叉、重叠内容的有机整合,同时注意保持各自内容体系的完整性.

2. 注意读者对象的师范性特点,力图将学生的"学习"置于核心地位,使之既具有理论联系实际的"教育形态",又具有反映学科体系和现代科技成果的"学术形态",讲解方式更适合教与学.

3. 论证详尽、严谨,条理清晰,节奏舒缓,具有很强的可读性. 通过本教材不仅可以获得高等代数与解析几何的系统知识,还会受到数学科学思维的训练. 本书对理论的阐述和证明清晰、严谨,难度控制得当,同时又有合理的广度.

4. 精心选择和设计习题. 本教材每节均配有比较丰富的习题,有的是重要的结论或历史名题,有的是为引导读者体验初步的科学探索而设计的,它们联系前后知识,具有承前启后的作用. 在

适当的时候，对同一问题给出几种解决方法，使读者可以对不同方法进行比较．少量为学有余力的学生准备的（带 * 标志）习题，需要较高的技巧和对相关知识的深刻理解，初学时可以略去．

本教材由广西师范大学易忠教授担任主编，由广西 4 所高校联合编写．其中广西师范大学的邓培民教授编写第 4、8、9 章和第 2.6 节，广西师范学院的唐高华教授和任北上教授编写第 12、13 章，广西民族大学的黄敬频教授编写第 2 章的前 5 节，广西玉林师范学院的梁燕来和陈肇斌副教授编写第 10、11 章，其余各章由本书第一作者编写．本教材的编写得到广西高等学校重点教材建设项目和新世纪广西高等教育教学改革工程“十一五”立项项目的支持．在编写过程中，还得到了编者单位院系领导、广大师生和清华大学出版社的大力支持和同行专家的关心．广西师范大学范江华博士和翟莹老师在试用本教材的初稿进行教学的过程中提出了许多建设性的修改意见，黄海兰和郭述锋等研究生帮助进行了校对，谨此致谢．

限于编者水平，本教材中定有许多不妥之处，敬请使用本书的教师和读者指正（E-mail 联系地址为：xgzhong@mailbox.gxnu.edu.cn）．

编 者

2007 年 5 月于桂林

目　录

第 8 章　线性变换的可对角化问题

我们已经知道，在 n 维线性空间 V 中取定一个基后，对 V 的一个线性变换 σ，通过这个基可确定一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$；反之，通过 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，线性变换 σ 可以被具体地表示出来. 这建立了线性变换和 n 阶矩阵之间的一一对应关系. 当然，这种一一对应关系是对取定的基而言的，一般说来，在不同的基下，由 σ 所确定的矩阵是不同的.

如果由 σ 所确定的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的形式比较简单，那么通过 $\boldsymbol{A}$，相应的线性变换 σ 就有比较简单的表示形式. n 阶对角矩阵是比较简单的，位似变换的矩阵是简单的标量矩阵. 但是有例子表明：存在 V 的线性变换，它在 V 的任意一个基下所确定的矩阵都不是对角矩阵. 这样，我们自然会问：n 维线性空间 V 的什么样的线性变换 σ 所确定的 n 阶矩阵将是对角矩阵？如何选取 V 的一个基，使得 σ 在这个基下的矩阵是对角矩阵？这个对角矩阵又是怎样确定的？这就是本章将要讨论的主要问题.

至于更一般的深刻的问题：对 n 维线性空间 V 的一个线性变换 σ 所确定的矩阵，其最简单的形式将是怎样的？我们留待第 14 章讨论.

8.1　线性空间的基变换与坐标变换　相似矩阵

设 V 是数域 K 上一个 n 维线性空间，σ 是 V 的一个线性变换. 显然，与 σ 对应的 n 阶矩阵是依赖于基的选择的，σ 在 V 的不同基下的矩阵自然不一定相同. 那么，一个线性变换在两个基下的

矩阵有什么关系呢?

假设 σ 在 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,即

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$
$$(\sigma(\boldsymbol{\beta}_1),\sigma(\boldsymbol{\beta}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\beta}_n)) = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{B},$$

令

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T},$$

这里,$\boldsymbol{T}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵,那么

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{B} &= (\sigma(\boldsymbol{\beta}_1),\sigma(\boldsymbol{\beta}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\beta}_n))\\ &= (\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n))\boldsymbol{T}\\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\\ &= (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}.\end{aligned}$$

从而,σ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$,由于一个线性变换在一个基下的矩阵是唯一的,所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$. 这样我们得到下面的定理.

定理 8.1.1　设 n 维线性空间 V 的线性变换在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,如果由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$,那么

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}.$$

定义 8.1.1　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 K 上两个 n 阶矩阵,如果存在 K 上一个 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$,就称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似,记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

由定义 8.1.1 可知,n 阶矩阵的相似关系具有下列性质.

(1) 自反性:每一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与它自己相似,因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}$.

(2) 对称性:如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,那么 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$. 因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 蕴涵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}^{-1}$.

(3) 传递性:如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$,那么 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$. 事实上,由 $\boldsymbol{B}=$

$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 和 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{BU}$ 得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{ATU}=(\boldsymbol{TU})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{TU})$.

定理 8.1.1 告诉我们,n 维线性空间 V 的一个线性变换在两个基下的矩阵是相似的. 反之,若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$,$\boldsymbol{T}$ 是 n 阶可逆矩阵,即 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似,那么 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否一定是 V 的某个线性变换在 V 的两个基下的矩阵呢? 回答是肯定的.

定理 8.1.2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 K 上两个 n 阶矩阵,并且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则一定有 V 的一个线性变换 σ,以及 V 的两个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,使得 σ 在这两个基下的矩阵恰好是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$.

证明 由 5.3 节的知识可知一定有 V 的线性变换 σ 和 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,使 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$. 下面要找 V 的一个基,使 σ 在这个基下的矩阵是 $\boldsymbol{B}$.

事实上,因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$. 令

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T},$$

由于 $\boldsymbol{T}$ 是可逆矩阵,因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 也是 V 的一个基. 又因为

$$\begin{aligned}(\sigma(\boldsymbol{\beta}_1),\sigma(\boldsymbol{\beta}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\beta}_n)) &= (\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n))\boldsymbol{T} \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{AT} \\ &= (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT},\end{aligned}$$

所以,σ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵恰为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$.

上述关于线性空间基变换的讨论,促使我们进一步考虑同一个向量的坐标是如何随基的变换而变化的. 假设向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,即

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

这时线性变换 σ 的作用表现为

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

即 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为 $\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵.

现取 V 的另一个基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$. 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$. 我们有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$

由向量在同一个基下的坐标的唯一性，得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad 或\quad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

这时

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=(\sigma(\boldsymbol{\beta}_1),\sigma(\boldsymbol{\beta}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\beta}_n))\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

即 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}^{-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 这里,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 σ 在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的矩阵.

这样,本章开始提出的问题就是:数域 K 上什么样的 n 阶矩阵能与一个对角矩阵相似?下节我们将详细讨论这个问题.

习题 8.1

1. 设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$是 n 维线性空间 V 的一个基,又设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+\boldsymbol{\eta}_n,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+\boldsymbol{\eta}_n,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\eta}_n.$$

(1) 证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为 V 的一个基;

(2) 求由基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的过渡矩阵;

(3) 设$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$下的坐标为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标.

2. 设三维线性空间 V 的线性变换σ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}.$$

证明:(1) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是 V 的一个基,其中,

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3;$$

(2) 求 σ 在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的矩阵;

(3) 设$\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,求 $\sigma(\boldsymbol{\xi})$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标.

3. 给定$\mathbb{R}^3$的两个基：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1);$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,2),\quad \boldsymbol{\beta}_2=(2,-1,2),\quad \boldsymbol{\beta}_3=(-2,1,1).$$

设σ是$\mathbb{R}^3$的一个线性变换，$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i$，$i=1,2,3$.

(1) 求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{T}$；

(2) 不用计算，证明σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下和$\sigma$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的矩阵均为$\boldsymbol{T}$；

(3) 设$\boldsymbol{\alpha}=(2,-1,3)$，分别求$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标.

4. 设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$是$n$维线性空间$V$的一个基，$\boldsymbol{\alpha}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\beta}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}\boldsymbol{\eta}_i,j=1,2,\cdots,n$. 如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，又设$\sigma$是$V$的一个线性变换，使$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j,j=1,2,\cdots,n$，求$\sigma$在基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$下的矩阵.

5. 证明：数域K上n维线性空间V的一个线性变换σ是位似变换(即单位变换的一个标量倍)的充分必要条件是σ在V的任意一个基下的矩阵都相等.

6. 取定矩阵$\boldsymbol{A}\in M_n(K)$. 对于任意$\boldsymbol{X}\in M_n(K)$，定义$M_n(K)$的一个线性变换$\sigma:\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}$，其中$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是对角矩阵. 证明，$\sigma$在$M_n(K)$的标准基$\{\boldsymbol{E}_{ij}\mid 1\leqslant i,j\leqslant n,i,j\in\mathbb{Z}\}$下的矩阵也是对角矩阵，它的主对角线上的元素由一切$a_i-a_j$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$形式的数组成.

7. 设σ是数域K上n维线性空间V的一个线性变换. 证明：存在V的两个基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，使得对于$V$的任意向量$\boldsymbol{\xi}$来说，如果$\boldsymbol{\xi}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i$，则$\sigma(\boldsymbol{\xi})=\sum\limits_{i=1}^{r}x_i\boldsymbol{\beta}_i$，这里$1\leqslant r\leqslant n$是一个定数.

8. 设$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{D}$，证明

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}.$$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：$\boldsymbol{AB} \sim \boldsymbol{BA}$.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，证明：$\boldsymbol{B}$ 也可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}$.

11. 设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，$f(x) \in K[x]$，证明：$f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$.

12. (1) 设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $12 \cdots n$ 的一个排列，证明

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (y, z, x)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (z, x, y)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$，$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1)$. 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 彼此相似.

13. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{R})$，证明：如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U} \in M_n(\mathbb{C})$，使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{BU}$，则必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T} \in M_n(\mathbb{R})$，使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}$.

8.2 矩阵的可对角化

本节介绍矩阵特征值、特征向量的概念，给出矩阵可对角化的条件以及矩阵化为对角形矩阵的方法，为下一节进一步研究线性变换做好知识上的准备.

定义 8.2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 K 上的 n 阶方阵. 如果对于数 $\lambda \in K$，存在非零列向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$，那么 λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值（根）**，$\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的**特征向量**.

依定义，对于 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(K)$，$\boldsymbol{A}$ 在 K 中有两个特征值 1，1，而 $(1,0)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的一个特征向量.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 等价于 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$，它有非零解的充要条件是系数行列式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，即

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

我们把这个以 λ 为未知量的一元 n 次方程，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**. 其左端 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 是 λ 的 n 次多项式，记作 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**.

显然，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 K 中的特征值就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 在 K 中的根. 应用上也称 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为特征根.

求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量的具体步骤如下.

(1) 求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$；

(2) 对于每个特征值 λ，求出齐次线性方程组

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

的一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$，令

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

则 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{x}$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

例 8.2.1　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解　由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 1\\ 2 & \lambda+2 & -2\\ -3 & -6 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+4),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-4$.

对于特征值 -4,求出齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}-7 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -2\\ -3 & -6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix}.$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -4 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1(k_1\neq 0)$.

对于特征值 2,求出齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于 2 的全部特征向量为 $\boldsymbol{x}=k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_2,k_3 是不全为零的常数).

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有如下性质.

定理 8.2.1 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ 的特征值为 λ_1,

$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$；

(2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

证明　当 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值时，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\\&=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}\\&\quad+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.\end{aligned}$$

令 $\lambda=0$，得 $|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，即 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

又因为 n 阶行列式是它的不同行不同列的 n 个元素乘积之代数和，由

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$$

右端行列式按行展开得关于 λ 的多项式，它的最高次项是 λ^n，出现在主对角线元素的乘积 $(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$ 里，这个行列式的展开式其余项至多含 $n-2$ 个主对角线上的元素，从而 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 中次数大于 $n-2$ 的项只出现在 $(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$ 里. 所以

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|,$$

故

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

推论 8.2.2　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为非零数.

定义 8.2.2　矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的主对角线元素的和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**迹**，记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

由上述讨论，知

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n.$$

显然，相似的矩阵有相同的特征多项式，因而有相同的特征值.

事实上，设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，从而

$$\begin{aligned}f_{\boldsymbol{B}}(\lambda)&=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|\\&=|\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=f_{\boldsymbol{A}}(\lambda).\end{aligned}$$