■ 高等学校理工科数学类规划教材

工科数学分析

MATHEMATICAL ANALYSIS（下册）

大连理工大学应用数学系 组编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

■ 高等学校理工科数学类规划教材

工科数学分析

MATHEMATICAL ANALYSIS（下册）

大连理工大学应用数学系　组编

主编　金光日　金正国

编者　金光日　金正国　庞丽萍　李　林

　　　曹铁川　孙丽华　蒋志刚　张海文

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析．下册/大连理工大学应用数学系组编．
大连：大连理工大学出版社，2007．9
高等学校理工科数学类规划教材
ISBN 978-7-5611-3773-4

Ⅰ．工… Ⅱ．大… Ⅲ．数学分析—高等学校—教材
Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 140913 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023
电话：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466
E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm　印张：19.5　字数：451 千字
2007 年 9 月第 1 版　　2007 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑：梁　锋　王　伟　　责任校对：婕　琳
封面设计：宋　蕾

ISBN 978-7-5611-3773-4　　定　价：29.80 元

高等学校理工科数学类规划教材

编审委员会

前　言

牛顿和莱布尼兹创立的微积分是近代数学的伟大创造，是数学科学的重要支柱，并对推动近代科学的发展发挥了重要作用。以微积分为主体的高等数学课程是工科大学生的主要基础课，通过该课程的学习，可获得一元微积分、多元微积分、向量代数与空间解析几何、无穷级数和微分方程等相关知识的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为学习后继课程奠定坚实的基础。学习微积分，还能够培养理性思维能力、综合应用能力、科学计算能力以及创新能力。

目前，由于我国高等教育规模的不断扩大以及社会对人才需求的多元化趋势，各高校的培养目标和定位也呈现多样化的状态，对数学要求也进行了多层次设置。即使在同一学校，不同专业对同一类课程(例如，数学类)的设置、内容安排、学习要求等也呈现多样化的趋势。传统的大一统的教学计划显然不利于对多元化人才的培养，实施分层次分流培养的教学理念已为许多高等院校所接受并付诸实施。

大连理工大学是教育部《工科数学内容和课程体系改革的研究与实践》项目的参与单位之一，多年来坚持高等数学课程的教学改革，已率先进行了分层次分流培养模式的实践。根据各工科专业的不同需求，将所有专业划分成三种教学模块，各模块教学内容的广度、深度及学时要求不同。在教学中强调以实践引导理论，改变传统的以“定义、定理、证明、例题”顺序进行的课堂教学模式，代之以提出实际问题，分析讨论，引入新的数学方法，最后解决问题的模式。

大连理工大学应用数学系在多年教学改革的基础上，组织编写了理工科数学类系列规划教材，《工科数学分析》就是其中的一种。本书是大连理工大学应用数学系“工科数学分析基础”模块的配套教材。“工科数学分析基础”模块适用于对数学有较高要求的专业，如物理、力学、计算机科学相关专业等。本书在编写过程中注意在以下方面体现“工科数学分析基础”模块的教学要求和特点：

(1)对于概念、定理、公式，尽可能从直观背景出发，提出问题，分析问题，得出结论，然后再抽象论证。将微积分的基本思想融入教学各环节中，引导学生用微积分的观点、方法认识和处理问题。

(2)对传统教学内容作了一些调整。例如，在极限部分增加了实数基本定理，以便较深入地介绍极限理论；在多元函数微分学部分增加了向量值函数的微分法；在微分方程部分增加了线性微分方程组的内容；对一致收敛性也没有过于淡化。在局部章节采用了新讲法。例如，在一元函数积分学中，先讲定积分，着重讲解积分思想、微积分基本公式，而将不定积分和积分法作为定积分的计算工具随后引入；在多元函数积分学中，把重积分、

对弧长的曲线积分、对面积的曲面积分统一为数量值函数在几何形体上的积分；把对坐标的曲线积分、曲面积分统一为向量值函数在有向曲线(曲面)上的积分，并与向量场和物理背景有机结合起来，以使学生在较高层次上理解积分的本质。

(3)培养应用意识，提高应用能力。数学课程教学不仅要教会学生如何做题，更重要的是要教会他们如何使用数学，进一步认识到数学是解决包括生活、工程技术等诸多领域问题的强有力工具，从而提高学生的学习兴趣。由于计算机技术的迅速发展，数值计算已经成为科学研究乃至日常工作中不可缺少的手段，对于工科学生，掌握常用的数值计算方法很有必要，因此，我们在相关章节中介绍了非线性方程求根、数值积分、微分方程数值解、极值计算等方法，并选编了一定数量的数值实验题。学生可以通过建立数学模型、设计来完成数学实验，在实践中体会学习数学的乐趣。

本教材是大连理工大学应用数学系组织编写的系列教材之一，在曹铁川主编的《工科微积分》的基础上编写而成，采用了《工科微积分》的主体框架，针对“工科数学分析基础”模块的教学要求，对部分章节进行了调整和增补。参加本书编写的人员有(按编写章节顺序)曹铁川、金正国、庞丽萍、蒋志刚、张海文、金光日、孙丽华、李林，由金光日、金正国组织编写、统稿，并最终定稿。

中国科学院院士钟万勰对本系列教材的编写提出了宝贵意见，大连理工大学教学名师施光燕教授和应用数学系南基洙教授以及部分兄弟院校的同行也提出了重要指导意见，在此一并表示感谢。

限于作者的水平，书中难免会有不当之处，恳请读者与同行批评指正。大家有任何意见和建议，请通过以下方式与我们联系：

邮箱　jcjf@dutp.cn

电话　0411－84707962　84708947

编著者

于大连理工大学

2007 年 9 月

目 录

第5章 向量代数与空间解析几何

VECTORS AND ANALYTIC GEOMETRY IN SPACE

向量是对自然界和工程技术中存在着的既有大小又有方向的一类量的概括和抽象.作为重要的数学工具,向量代数在许多领域都有广泛的应用.

解析几何的基本思想是用代数方法研究几何问题.空间直角坐标系的建立,把空间的点与三元有序数组对应起来,空间曲面和曲线与三元方程和方程组对应起来,空间向量及其运算的几何形式与坐标形式对应起来.正是这种形与数的结合,使几何目标得以用代数方法达到,反过来,代数语言又因有了几何解释而变得直观.现代计算机技术的发展,使形与数结合的数学方法在科学研究、工程技术乃至影视艺术等领域得到了淋漓尽致的发挥.

向量代数与空间解析几何既是独立的知识体系,同时又是学习多元函数微积分前应作的必要准备.

本章先引进向量的概念,并结合实际背景给出向量的运算.接着通过空间直角坐标系的建立,对向量及其运算用坐标法进行量化处理.在空间解析几何部分,又以向量为工具着重讨论平面和空间直线方程.在曲面方程中,着重讨论柱面、旋转曲面及锥面,并用截痕法研究二次曲面的图形.

5.0 引 例

在前几章，我们接触了一些用参数方程和极坐标方程表示的曲线. 这些曲线大都特色鲜明，图形优美. 在这些曲线中，许多都有着实际应用背景，星形线就是其中一种. 你知道它是怎样形成的吗？

瑞士数学家欧拉曾提出这样一个问题：如何用一个四面体的棱长表示四面体的体积？

以上两个问题，用本章提供的向量代数的方法都不难解决.

你一定有这样的经历：当一架超音速飞机在高空飞行时，总是先看见飞机从空中掠过，稍后才能听到飞机的轰鸣声. 试问，在看到飞机同一时刻能够听到飞机声响的范围是怎样的区域？有趣的是该区域居然是一个以飞机为顶点的圆锥体，在此圆锥体外，无论离飞机多么近，也不会听到飞机的轰鸣声. 这就是著名的"马赫锥"问题. 在本章末，我们将用空间解析几何的方法，推导出马赫锥圆锥面的方程.

5.1 向量及其运算

5.1.1 向量的概念

在现实生活中，我们遇到的量常可以分为两种类型. 一类量在取定测量单位之后，用一个实数就可以表示出来，如长度、体积、温度、质量、能量等，这类量称为**数量**或**标量**(scalar). 另一类量不仅有大小，而且还有方向，例如，描述一个物体的运动速度，只指出速度的大小还不够，还要同时指出速度的方向才算完整. 类似的量还有很多，如力、位移、加速度、力矩、电场强度等. 像这样既有大小又有方向的量，称为**矢量**或**向量**(vector).

向量通常用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点，B 为终点所表示的向量记作 $\boldsymbol{AB}$. 向量还常用黑体字母或加箭头的字母表示，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{F}$ 等. 向量的大小称为向量的**模**(norm)，记作 $|\boldsymbol{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$ 等.

在实际问题中遇到的具体向量，有时与起点有关，有时与起点无关，在数学上只讨论与起点无关的向量，即所谓**自由向量**，也就是只考虑向量的大小和方向这两方面的属性，而不考虑它的起点在何处. 因而本教材中的向量可以任意作平行移动，只要平移后能完全重合的向量都认为是相等的. 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果它们的模相等，方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**(unit vector). 模等于 0 的向量称为**零向量**(zero vector)，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$，零向量的方向可以看做是任意的，即可根据情况任意指定. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

若将向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合，则表示它们的有向线段的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称

为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 5-1),记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 0 或 π,即它们的方向相同或相反,则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **平行**,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 因为相互平行的向量经平移后可以位于同一直线上,故又称两平行的向量**共线**. 若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 $\frac{\pi}{2}$,则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **垂直**或**正交**,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

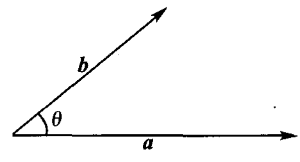


图 5-1

因为零向量的方向可以看做是任意的,因此在具体问题中,零向量可以认为与任何向量都平行或垂直.

5.1.2 向量的线性运算

向量最基本的运算是向量的加法和向量与数的乘法,这两种运算统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法

在力学中,求力的合成与分解用的是平行四边形法则,在物理学中出现的向量也用这个方法进行合成与分解. 由此可以规定向量的加法运算.

对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作有向线段 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{b}$. 在以 AB、AD 为邻边所作的平行四边形 $ABCD$ 中,记 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AC}$,则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 5-2),记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

此规则称为向量相加的**平行四边形法则**.

求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和的运算称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法. 也可用下面的方法求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 5-3):作有向线段 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{AC}$ 表示的向量即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,此规则称为向量相加的**三角形法则**. 从图 5-2 和图 5-3 中可明显看出,用平行四边形法则和用三角形法则求出的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一致的. 当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行时,用三角形法则求它们的和也是适用的.

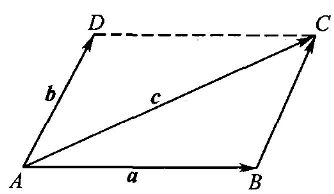


图 5-2

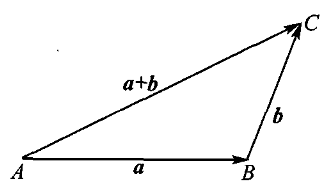


图 5-3

向量的加法满足下列运算规律:

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律);

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律).

由向量加法的平行四边形法则知,交换律显然是成立的,结合律则可由图 5-4 得到验证.

根据零向量、负向量的定义及加法的运算规律,立即得到

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

利用负向量可以规定向量的**减法**,向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**差**为

$$a-b=a+(-b).$$

向量的减法也可以用三角形法则表示(图 5-5).

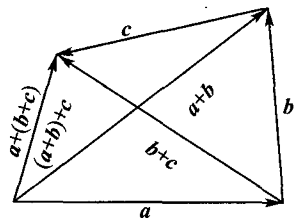


图 5-4

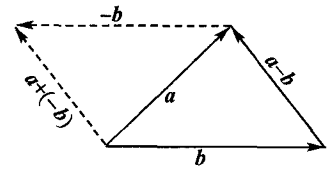


图 5-5

因为向量的加法满足交换律和结合律,所以加法可以推广至求任意有限个向量和的情况. n 个向量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 相加可写成

$$a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

并容易看出只要把 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 依次首尾相接,则由 a_1 的起点到 a_n 的终点的有向线段所表示的向量即为所求的和. 图 5-6 给出了 $n=5$的情况:

$$s=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.$$

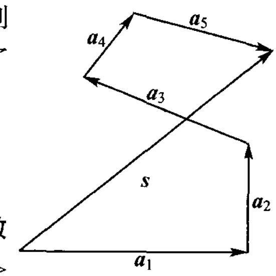


图 5-6

2. 向量与数的乘法(简称数乘)

设 a 是一向量,λ 是一实数,我们定义 a **与** λ **的乘积**(简称数乘)是一个向量,记作 λa,它的模 $|\lambda a|=|\lambda|\cdot|a|$,它的方向,当 $\lambda>0$ 时与 a 相同,当 $\lambda<0$ 时与 a 相反(图 5-7).

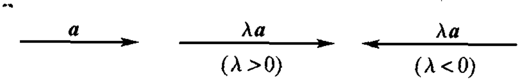


图 5-7

特别地,

$$1\cdot a=a,\quad (-1)a=-a.$$

当 $\lambda=0$ 时,

$$\lambda a=\mathbf{0}.$$

显然,对于任意向量 a、b 和实数 λ、μ,数乘满足下列运算规律:

(1) $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a=\mu(\lambda a)$(结合律);

(2) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$(对实数的分配律);

(3) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$(对向量的分配律).

由向量加法和数乘的定义可以直接推出(1)、(2). 图 5-8 给出了(3)的几何解释.

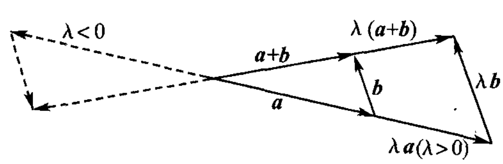


图 5-8

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，取 $\lambda=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，则向量 $\lambda\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 注意到 $\left|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1$，可见 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a$，于是有

$$\boxed{\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.}$$

这说明任何非零向量可以表示为它的模与同方向单位向量的数乘.

进而可以得到下面的命题：

命题 5-1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 由向量数乘的定义立即得到充分性. 下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则取 $\lambda=0$，有 $\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则由 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 知 $\boldsymbol{e}_b/\!/\boldsymbol{e}_a$，这里 $\boldsymbol{e}_b$ 和 $\boldsymbol{e}_a$ 分别是与 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，因而 $\boldsymbol{e}_b=\pm\boldsymbol{e}_a$. 于是

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_b=|\boldsymbol{b}|(\pm\boldsymbol{e}_a)=|\boldsymbol{b}|\left(\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，取 $\lambda=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，取 $\lambda=-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

利用向量的线性运算，有时可方便地证明一些几何命题.

【例 5-1】 证明三角形两腰中点的连线平行于底边，且等于底边的一半.

证明 如图 5-9 所示，在△ABC 中，D、E 分别为 AB、AC 的中点，

$$\boldsymbol{DE}=\boldsymbol{DA}+\boldsymbol{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{BA}+\frac{1}{2}\boldsymbol{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AC})=\frac{1}{2}\boldsymbol{BC},$$

所以 $\boldsymbol{DE}/\!/\boldsymbol{BC}$，且 $|\boldsymbol{DE}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{BC}|$.

设有向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，如果通过平移将它们的起点移至同一点后，这些向量均在同一平面上，则称向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ **共面**.

命题 5-2 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，而 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，则存在实数 λ 和 μ 使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

证明 因为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，故可知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量. 过一定点 O 作 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{c}$. 由题设知 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OC}$ 共面.

过点 C 分别作直线 OB 和 OA 的平行线，交 OA 于 E，交 OB 于 F（图 5-10），从而

$$\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{OE}+\boldsymbol{OF}.$$

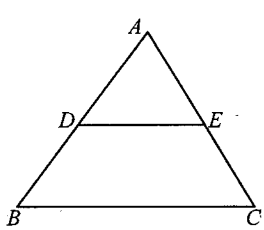


图 5-9

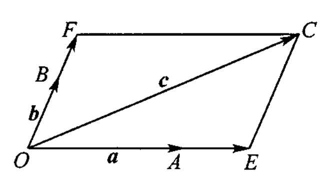


图 5-10

又因 $\boldsymbol{OE}$ 与 $\boldsymbol{OA}$ 共线，由命题 5-1 知存在实数 λ，使得

$$\boldsymbol{OE}=\lambda\boldsymbol{OA}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

同理存在实数 μ，使得

$$\boldsymbol{OF}=\mu\boldsymbol{OB}=\mu\boldsymbol{b}.$$

于是

$$\boldsymbol{OC}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

进而还可以得到：

命题 5-3 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面，则对任一向量 $\boldsymbol{d}$，存在实数 λ、μ、ν，使得

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}.$$

该命题证法类似命题 5-2，作为练习留给读者完成.

5.1.3 向量的数量积(点积、内积)

由物理学知，某物体在力 $\boldsymbol{f}$ 的作用下，沿直线从点 A 移至点 B，用 $\boldsymbol{s}$ 表示物体位移 $\boldsymbol{AB}$，那么力 $\boldsymbol{f}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 5-11).

由此我们规定向量的数量积运算.

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，则称实数 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(scalar product)，或称**点积**(dot product)，也称**内积**(inner product)，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta.}$$

按照数量积的定义，力 $\boldsymbol{f}$ 所作的功可表示为 $W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$.

下面给出数量积的几何意义.

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 所在的直线为 l，且 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$. 用有向线段 $\boldsymbol{AB}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$，过点 A 和点 B 作平面垂直于直线 l，并与 l 分别交于点 A' 和点 B'(图 5-12)，则称点 A' 和点 B' 分别为点 A 和点 B 在 l 上的**投影**，称有向线段 $\boldsymbol{A'B'}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影向量**. 容易看出

$$\boldsymbol{A'B'}=(|\boldsymbol{AB}|\cos\theta)\boldsymbol{e}_a=(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)\boldsymbol{e}_a,$$

称上式中的实数 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影**(projection)，并记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$. 当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影向量的长度；当 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影向量长度的相反数；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 等于零. 我们还注意到，无论向量 $\boldsymbol{b}$ 如何平移，它在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影都是同一个实数，即具有唯一性.

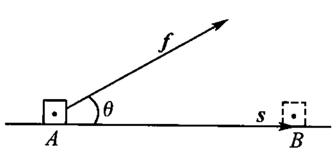


图 5-11

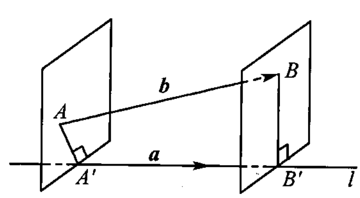


图 5-12

根据数量积的定义,当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,立即得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

这表明,数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影的 $|\boldsymbol{a}|$ 倍,特别是当 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 就等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影.

不难验证,投影具有下面的线性性质:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},$$

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}.$$

由向量投影的定义,可立即推出前一式,图 5-13 给出了后一式的几何解释.

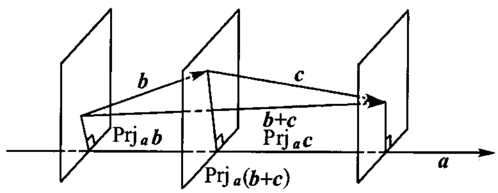


图 5-13

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ、μ,向量的数量积满足下面的运算规律:

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律);

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$(数乘结合律);

(3)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

前两式由数量积和数乘定义可立即推出. 式(3)当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时自然成立. 下面就 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 的情况给予讨论,有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

这就验证了分配律的正确性.

由数量积的定义还可推知:

> 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模
>
> $$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}.$$
>
> 向量 a 与 b 的夹角满足
>
> $$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$
>
> $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是
>
> $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

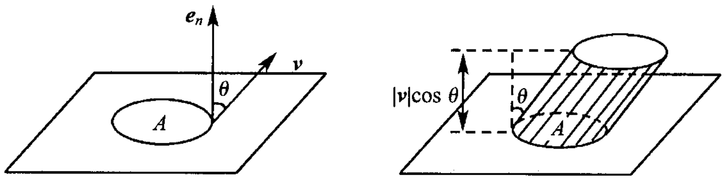
【例 5-2】 设流体以速度 $\boldsymbol{v}$ 流经平面 Π,在 Π 上有一面积为 A 的区域,$\boldsymbol{e}_n$ 为垂直于 Π 的单位向量[图 5-14(a)],试用数量积表示流体经过该区域且流向 $\boldsymbol{e}_n$ 所指一侧的流量(即单位时间内流过该区域的流体质量),已知流体的密度为常数 ρ.

解 单位时间内流经该区域的流体是底面积为 A、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体[图 5-14(b)]. 设 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 的夹角为 θ,则此斜柱体的体积为

$$V=A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n.$$

从而所求流量为

$$\Phi=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_n.$$



(a)　　　　(b)

图 5-14

5.1.4　向量的向量积(叉积、外积)

在物理学中,讨论刚体转动时,要考虑作用在刚体上的力所产生的力矩.例如,一物体的支点为 O,力 $\boldsymbol{f}$ 作用在物体上的点为 A,$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{OA}$ 的夹角为 θ,点 O 到力 $\boldsymbol{f}$ 作用线的距离为 $|OP|$(图 5-15).则力 $\boldsymbol{f}$ 对支点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}$ 是一个向量,它的大小为力的大小与支点到力作用线距离的乘积,即

$$|\boldsymbol{M}|=|OP|\,|\boldsymbol{f}|=|\boldsymbol{OA}|\,|\boldsymbol{f}|\sin\theta.$$

$\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{OA}$ 与 $\boldsymbol{f}$,指向符合"右手法则",即当右手的四指从 $\boldsymbol{OA}$ 转向 $\boldsymbol{f}$ 时(转角为两者的夹角),大拇指的指向就是 $\boldsymbol{M}$ 的方向.由此我们规定向量的向量积运算.

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个向量,$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(vector product)是一个向量,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,它的模

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

它的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,并且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则(图 5-16).

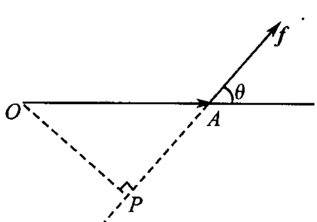


图 5-15

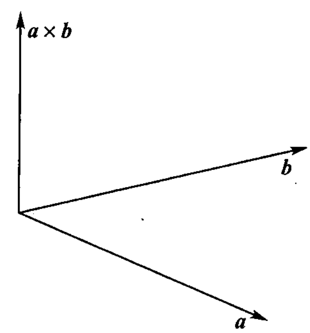


图 5-16

向量的向量积也称向量的**叉积**(cross product)或**外积**(outer product).

据此定义,上述力矩可以记作 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{f}$.

两向量的向量积有如下几何意义:

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积(图 5-17);

(2)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与一切既平行于 $\boldsymbol{a}$ 又平行于 $\boldsymbol{b}$ 的平面垂直.

向量积的几何意义在后面的空间解析几何中有着重要的应用.

向量的向量积满足下面运算规律：

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$(注意：不满足交换律)；

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$(结合律)；

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$(分配律).

式(1)和式(2)由向量积定义不难验证，式(3)的证明稍显复杂，略去.

由向量积的定义，可立即推出：

$$\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

【例 5-3】 设$\triangle ABC$的三条边长分别是 a、b、c(图 5-18)，试用向量运算证明正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

证明 注意到 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB}$，故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}&=(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB})\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{CA}\times\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}\\&=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}\times(\boldsymbol{CB}+\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}.\end{aligned}$$

于是得到

$$\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}.$$

从而

$$|\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}|=|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}|=|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}|.$$

即

$$ab\sin C=cb\sin A=ca\sin B.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

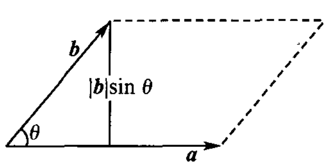


图 5-17

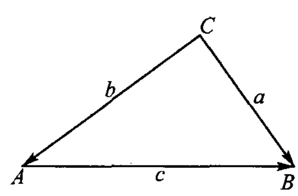


图 5-18

5.1.5 向量的混合积

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 仍是一向量，它还可以与另一向量 $\boldsymbol{c}$ 作数量积，我们称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积(mixed product)，记为$[\boldsymbol{abc}]$，即